

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

GABRIELE DARBO

**Grado topologico e teoremi di esistenza di punti uniti
per trasformazioni plurivalenti di bicelle**

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 19 (1950), p. 371-395

[<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1950__19__371_0>](http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1950__19__371_0)

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1950, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*
<http://www.numdam.org/>

GRADO TOPOLOGICO E TEOREMI DI ESISTENZA DI PUNTI UNITI PER TRASFORMAZIONI PLURI- VALENTI DI BICELLE

Memoria () di GABRIELE DARBO (a Pisa).*

Sono ormai celebri i risultati di BROUWER sull'esistenza di almeno un punto unito in una trasformazione continua univalente di una bicella in sè (1). J. VON NEUMANN (2) ha messo in rilievo per primo, l'interesse che presenta il problema dell'esistenza di punti uniti in trasformazioni plurivalenti semicontinue superiormente (3).

Più recenti sono le ricerche e i risultati conseguiti da S. EILEMBERG e D. MONTGOMERY e da O. H. HAMILTON (4) nel caso di trasformazioni semicontinue di n -celle in sè e in generale tali che l'immagine di un punto sia un insieme chiuso costituito da

(*) Pervenuta in Redazione il 2 giugno 1950.

(1) Per la bibliografia sull'argomento si veda: G. SCORZA DRAGONI: *Criteri per l'esistenza di punti uniti in trasformazioni topologiche del cerchio e loro applicazioni* [Ann. di Mat. pura e appl., (4) - XXV - 1946, pp. 43-65].

(2) J. VON NEUMANN - O. MORGENSTERN: *Theory of games and economic behaviour* - Princeton 1947, pag. 154; J. VON NEUMANN, *Ueber ein ökonomisches Gleichungssystem und eine Verallgemeinerung des Brouwerschen Fixpunktsatzes* [Erg. Math. Kolloqu., vol. 8 (1937)].

(3) Una trasformazione T tra punti P di un insieme chiuso E e insiemi limitati e chiusi di uno spazio $S^{(n)}$ (n -dimensionale) dicesi semicontinua superiormente in E se per ogni punto P_0 di accumulazione di E e per ogni $\varepsilon > 0$ si ha $T(P) \subset [T(P_0)]_\varepsilon$ definitivamente al tendere di P a P_0 in E . Si è indicato con $[T(P_0)]_\varepsilon$ l' ε -intorno n -dimensionale aperto di $T(P_0)$.

(4) S. EILEMBERG - D. MONTGOMERY: *Fixed point theorems for multi-valued transformations* [American Journ. of Math. - LXVIII - 1946, pp. 214-222]; O. H. HAMILTON: *A fixed point theorem for upper semicontinuous transformation of n cells for which the images of points are non - acyclic continua*: [Duke Math. Journ. - 14 - 1947, pp. 689-693].

un solo *componente* ⁽⁵⁾. E. MAGENES ⁽⁶⁾, studiando un problema proposto da R. CACCIOPOLI e di cui si è interessato anche G. SCORZA DRAGONI ⁽⁷⁾, è stato portato a generalizzare il problema impostandolo nei seguenti termini:

Sia $E^{(n)}$ una n -cella di uno spazio $S^{(n)}$ reale, euclideo, n -dimensionale; T una trasformazione dei punti di $E^{(n)}$ soddisfacente alle seguenti condizioni:

$\alpha')$ per ogni $P \in E^{(n)}$, $T(P)$ è un insieme chiuso contenuto in $E^{(n)}$;

$\alpha'')$ T è semicontinua superiormente;

$\alpha''')$ se $P_0 \in E^{(n)}$ e τ è una porzione chiusa, non vuota e isolata di $T(P_0)$ (cioè tale che sia chiuso anche $T(P_0) - \tau$) la distanza di $T(P)$ da τ tende a zero per $P \rightarrow P_0$ in $E^{(n)}$.

Quali ulteriori condizioni conviene imporre alla T affinché ammetta in $E^{(n)}$ almeno un punto unito, cioè un punto $P^* \in E^{(n)}$ e tale che $P^* \in T(P^*)$?

Le ipotesi $\alpha')$, $\alpha'')$, $\alpha''')$ conducono all'esistenza di almeno un punto unito nel caso che $E^{(n)}$ sia di dimensione $n = 1$ ⁽⁸⁾; si dimostrano però insufficienti non appena $E^{(n)}$ ha dimensione $n > 1$ come risulta da un esempio costruito da HAMILTON ⁽⁹⁾ nel caso $n = 2$ e facilmente estendibile per $n > 2$.

Ulteriori condizioni di « aciclicità » degli insiemi $T(P)$ considerate da EILEMBERG e MONTGOMERY ⁽¹⁰⁾ nel caso che $T(P)$

⁽⁵⁾ Dicesi componente (secondo HAUSDORFF) di un insieme chiuso X , l'insieme somma di tutte le parti connesse di X che contengono un medesimo punto P di X .

⁽⁶⁾ E. MAGENES: *Proprietà topologiche di certi insiemi di punti e teoremi di esistenza di punti uniti in trasformazioni plurivalenti di una r -cella in sé*: [Giornale di Mat. di Battaglini - S. N., vol. 78 (1948-49) pp. 168-181].

⁽⁷⁾ G. SCORZA DRAGONI: *Su una questione topologica* [Giorn. di Mat. di Battaglini - S. N., vol. 78 (1948-49) pp. 121-127]; nonché: *Alcune proprietà di struttura per certi insiemi di punti* [Ann. di Mat. pura e appl., (IV) - vol. XXVIII (1949) pp. 221-229].

⁽⁸⁾ V. loc. cit. in (6), pag. 175.

⁽⁹⁾ V. loc. cit. in (4) per secondo, pag. 692.

⁽¹⁰⁾ V. cit. in (4) per primo.

sia costituito da un solo componente e da E. MAGENES ⁽¹¹⁾ nel caso di un numero finito, costante, di componenti, conducono all'esistenza di almeno un punto unito.

A dissipare il dubbio che le condizioni α' , α'' , α''' , associate ad una opportuna condizione di *aciclicità* di $T(P)$ potessero esser sufficienti a garantire l'esistenza di almeno un punto unito, in questo lavoro verrà dato un esempio di trasformazione *continua* ⁽¹²⁾ di una bicella E in sè, tale da far corrispondere ad ogni punto di E un insieme di al più *tre* punti distinti, priva di punti uniti. Successivamente si stabiliranno opportune ipotesi che permetteranno di estendere alle trasformazioni plurivalenti di un certo tipo, la nozione di « *grado topologico* » relativo a un ciclo, già introdotta per le trasformazioni continue univalenti. Infine si darà un teorema d'esistenza di punti uniti per certe trasformazioni semicontinue superiormente di una bicella. In particolare, se per ogni punto P l'insieme trasformato $T(P)$ contiene al più *due* punti, e la trasformazione è continua, questa possiede almeno un punto unito.

1. - Esempio di una trasformazione T plurivalente e continua, di una bicella in sè, priva di punti uniti. - La bicella E sia rappresentata dal cerchio $x^2 + y^2 \leq 1$. Definiamo la trasformazione T nel primo quadrante di E : $x \geq 0$; $y \geq 0$, facendo corrispondere al punto $P \equiv (x, y)$ l'insieme $T(P)$ dei punti Q_1 , Q_2 , Q_3 rispettivamente di coordinate:

⁽¹¹⁾ V. loc. cit. in (6), nonché: E MAGENES: *Un'osservazione sui teoremi di esistenza di punti uniti in trasformazioni plurivalenti di una n -cella*. (Questi Rendiconti pp. 108-113).

⁽¹²⁾ Qui la *continuità* va intesa nel senso usuale della teoria degli insiemi; vale a dire, per ogni punto $P_0 \in E^{(n)}$ sia $\lim_{P \rightarrow P_0} T(P) = T(P_0)$; è chiaro che una trasformazione continua è anche semicontinua superiormente.

$$\begin{aligned}
 Q_1: x_1 &= 8x^2(1-x^2-y^2)-1, & y_1 &= +\sqrt{1-x_1^2}; \\
 (1) \quad Q_2: x_2 &= 8x^2(1-x^2)-1, & y_2 &= -\sqrt{1-x_2^2}; \\
 Q_3: x_3 &= \begin{cases} +1 & \text{per } 0 \leq x \leq \sqrt{\frac{1}{2}} \\ 8x^2(1-x^2)-1 & \text{per } \sqrt{\frac{1}{2}} < x \leq 1 \end{cases}, & y_3 &= -\sqrt{1-x_3^2}.
 \end{aligned}$$

Si noti che i tre punti Q_1, Q_2, Q_3 sono, separatamente considerati, funzioni definite e continue in tutto il primo quadrante di E . Estendiamo ora la definizione di $T(P)$ in tutto il cerchio E in modo che, se P e P' sono punti di E simmetrici rispetto all'asse delle x (oppure y), gli insiemi $T(P)$ e $T(P')$ stiano nella stessa relazione di simmetria rispetto all'asse delle x (o rispettivamente y). Tale estensione è possibile e risulta continua su tutto il cerchio E , poichè ai punti di E appartenenti agli assi corrispondono insiemi $T(P)$ simmetrici rispetto ai medesimi assi. Infatti per $y = 0$ e $0 \leq x \leq 1$, le (1) danno:

$$\begin{aligned}
 x_1 &= x_2, \quad y_1 = -y_2; \\
 (2) \quad \left. \begin{matrix} x_3 = +1 \\ y_3 = 0 \end{matrix} \right\} & \text{per } 0 \leq x \leq \sqrt{\frac{1}{2}}; \quad \left. \begin{matrix} x_3 = x_2 \\ y_3 = y_2 \end{matrix} \right\} & \text{per } \sqrt{\frac{1}{2}} \leq x \leq 1
 \end{aligned}$$

e per $x = 0$, $0 \leq y \leq 1$ danno invece:

$$\begin{aligned}
 (2') \quad \begin{matrix} x_1 = -1, & x_2 = -1, & x_3 = +1 \\ y_1 = 0, & y_2 = 0, & y_3 = 0 \end{matrix}
 \end{aligned}$$

e le (2) e (2') rappresentano insiemi simmetrici rispetto agli assi x e y rispettivamente (naturalmente punti coincidenti vanno considerati come un sol punto).

La trasformazione T così definita è priva di punti uniti. Osserviamo infatti che l'insieme $T(P)$ variando P in E , sta tutto sulla frontiera γ di E , poichè dalle (1) segue $x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2 = x_3^2 + y_3^2 = 1$; quindi, se vi fossero punti uniti, do-

vrebbe trovarsene almeno uno con le coordinate soddisfacenti alle $x^2 + y^2 = 1$; $x \geq 0$; $y \geq 0$. E ciò per il modo stesso con cui si è definita la $T(P)$. Si vede subito che questo non è possibile; infatti, sull'arco di γ contenuto nel primo quadrante risulta $x_1 = -1$, $y_1 = 0$; $x_2 \leq 0$; $y_2 \leq 0$ e gli unici punti che possono essere uniti sono quindi $(1, 0)$ e $(0, 1)$; ora sia al primo che al secondo corrisponde l'unico punto $(-1, 0)$.

La T così definita, come del resto ogni trasformazione continua, soddisfa alle condizioni α' , α'' e α'''). Si noti che l'insieme $T(P)$ variando P in E è costituito da un numero limitato di punti (non superiore a tre) e come tale è un insieme *aciclico*. Si vedrà in seguito che una trasformazione continua al più bivalente di una bicella in sè ammette sempre almeno un punto unito.

2. - Considerazioni preliminari. - Prima di fissare le condizioni da imporre ad una trasformazione plurivalente T , nell'intento di definirne il *grado* relativo a un ciclo, conviene prender le mosse da un esempio particolarmente semplice il quale giustificherà una ipotesi che altrimenti potrebbe apparire artificiosa.

Si abbia una equazione algebrica nel campo complesso

$$(3) \quad z^n + a_1(p) z^{n-1} + \dots + a_n(p) = 0$$

i cui coefficienti $a_j(p)$ ($j = 1, 2, \dots, n$) siano funzioni continue del parametro complesso p . Facciamo corrispondere a p l'insieme $T(p)$ delle radici della (3). La T risulta allora una trasformazione continua plurivalente. Se A è un insieme aperto del piano π dei numeri complessi, la cui frontiera non abbia punti comuni con $T(p_0)$ ($p_0 \in \pi$, prefissato arbitrario) esiste un intorno σ di p_0 , tale che variando p in σ , la somma delle molteplicità delle radici $T(p)$ che cadono in A rimane costante. Ebbene, è proprio di una tale proprietà che ci serviremo, trasportandola in casi più generali.

In questo lavoro ci limiteremo, per brevità, alla considera-

zione di trasformazioni di celle o complessi di celle bidimensionali nel piano $S^{(2)}$. L'estensione al caso n -dimensionale sarà oggetto di una prossima nota.

3. - Nel seguito considereremo esclusivamente una trasformazione plurivalente T dei punti P di una bicella o di un complesso di celle bidimensionale E appartenente al piano reale, euclideo $S^{(2)}$, per cui siano soddisfatte le seguenti ipotesi:

I. *l'immagine $T(P)$ di P sia, per ogni $P \in E$, un insieme limitato e chiuso del piano $S^{(2)}$.*

II. *il complementare, $S^{(2)} - T(P)$ di $T(P)$, per qualunque $P \in E$ sia connesso;*

III. *T sia superiormente semicontinua in tutto E (tale cioè che per ogni $P_0 \in E$ e per qualunque $\varepsilon > 0$ esista un intorno σ di P_0 per cui si abbia $T(P) \subset [T(P_0)]_\varepsilon$ ⁽¹³⁾ allorché $P \in \sigma \cdot E$).*

Se $P \in E$, chiameremo *pezzo* di $T(P)$ una parte chiusa τ di $T(P)$ tale che sia chiusa anche la parte complementare $T(P) - \tau$; potendo τ in particolare coincidere con $T(P)$ o con l'insieme vuoto. Ciò posto, supporremo ancora che

IV. *ad ogni punto $P \in E$ corrisponda una funzione numerica $F_P(\tau)$ additiva, dei pezzi τ di $T(P)$, tale quindi che se τ' e τ'' sono due pezzi disgiunti di $T(P)$ si abbia $F_P(\tau' + \tau'') = F_P(\tau') + F_P(\tau'')$.*

Osserviamo che se $P_0 \in E$ ed A è un insieme aperto di $S^{(2)}$ la cui frontiera non ha punti comuni con $T(P_0)$ e se ε è un numero positivo minore della distanza tra $T(P_0)$ e la frontiera di A , per la ipotesi III esiste un intorno σ di P_0 tale che per $P \in \sigma \cdot E$ si abbia $T(P) \subset [T(P_0)]_\varepsilon$. È allora chiaro che

(13) Se X è un insieme di punti di $S^{(2)}$ (o anche un punto) col simbolo $[X]_\varepsilon$ essendo ε un numero positivo, indichiamo l' ε -intorno bidimensionale aperto di X , ossia l'insieme dei punti di $S^{(2)}$ che distano da X meno di ε .

$A \cdot T(P)$ è un pezzo di $T(P)$ e avrà senso la espressione $F_p[A \cdot T(P)]$.

Noi supporremo quindi che valga una proprietà analoga a quella messa in rilievo nel numero precedente e precisamente:

V. se A è un qualunque insieme aperto di $S^{(2)}$ la cui frontiera è disgiunta da $T(P_0)$, esista un intorno σ di P_0 tale che per ogni $P \in \sigma \cdot E$ sia $F_p[A \cdot T(P)] = F_p[A \cdot T(P_0)]$.

4. - Se P è un punto di E , e γ è un ciclo continuo ⁽¹⁴⁾ 1-dimensionale appartenente a $S^{(2)} - T(P)$, l'insieme aperto $S^{(2)} - \bar{\gamma}$ ⁽¹⁵⁾ sarà costituito da al più una infinità numerabile di componenti aperti, connessi e disgiunti $\{A_k\}$. I punti di $T(P)$ appartenenti a un medesimo componente A_k formeranno un pezzo $\tau_k = A_k \cdot T(P)$ di $T(P)$. Dimostriamo che i pezzi τ_k non vuoti sono in numero finito; infatti se δ è la distanza (certamente positiva) di $T(P)$ da $\bar{\gamma}$, i δ -interni aperti $[\tau_k]_\delta$ sono privi di punti comuni a due a due, sono complessivamente limitati poichè la loro somma coincide con $[T(P)]_\delta$, e ciascuno di essi ha misura superficiale non inferiore a quella di un cerchio di raggio δ . Il loro numero non può superare quindi $\frac{\text{mis } [T(P)]_\delta}{\pi \delta^2}$.

L'insieme dei pezzi τ_k non vuoto in cui viene decomposto $T(P)$ dal ciclo γ è dunque finito. Inoltre, l'ordine ⁽¹⁶⁾ di un

(14) Qui e nel seguito considereremo catene continue e cicli continui che saranno intesi esclusivamente nel senso di «*singuläre Kette*» e «*Geschlossene singuläre Kette*» secondo il SEIFERT-THRELFALL, Lehrbuch der Topologie - Leipzig, 1934, pp. 94-97.

(15) Se $z = \sum \lambda_j z_j$ è una catena continua (combinazione lineare dei semplici continui z_j linearmente indipendenti), colla notazione $\bar{z}$ indicheremo il sostegno di z ossia l'insieme dei punti appartenenti ai semplici continui z_j i cui coefficienti λ_j sono diversi da zero. È chiaro che il sostegno $\bar{z}$ di z è sempre un insieme chiuso e limitato.

(16) Cfr. P. ALEXANDROFF - H. HOPF - Topologie - Berlin 1935, pp. 419, 423, 458 e segg. - Per quanto il concetto di «*Stetiger Zyklus*» ivi definito non coincida, a rigor di termini, con quello da noi usato, il lettore noterà che la definizione di ordine di un punto rispetto a un ciclo può esser trasportata integralmente alle nostre «*Geschlossene singuläre Ketten*».

punto $Q \in \tau_k$ rispetto al ciclo γ non dipende da Q poichè è $\tau_k \subset A_k$ e A_k è un componente connesso del complementare di $\bar{\gamma}$. Indicato con ν_k detto *ordine* porremo

$$(4) \quad \omega_P(\gamma) = \sum_k \nu_k F_P(\tau_k)$$

dove la somma va estesa a tutti i *pezzi* τ_k della menzionata decomposizione di $T(P)$ operata dal ciclo γ .

Il numero $\omega_P(\gamma)$ non varia se P vien fatto variare su un continuo $K \subset E$ la cui *immagine* ⁽¹⁷⁾ $T(K)$ non ha punti comuni con $\bar{\gamma}$. Infatti, sia $P_0 \in K$ e A_k il componente connesso di $S^{(2)} - \bar{\gamma}$ che contiene il *pezzo* τ_k^0 di $T(P_0)$, si abbia dunque $\tau_k^0 = A_k \cdot T(P_0)$. Per la condizione V esiste un intorno σ di P_0 per cui, se $P \in \sigma \cdot K$, si ha

$$F_P[A_k \cdot T(P)] = F_{P_0}[A_k \cdot T(P_0)]$$

ossia, posto $\tau_k = A_k \cdot T(P)$, anche $F_P(\tau_k) = F_{P_0}(\tau_k^0)$ e quindi

$$\omega_P(\gamma) = \sum_k \nu_k F_P(\tau_k) = \sum_k \nu_k F_{P_0}(\tau_k^0) = \omega_{P_0}(\gamma)$$

⁽¹⁷⁾ L'immagine di un insieme $X \subset E$ che indichiamo con $T(X)$ è l'insieme descritto da $T(P)$ variando P in X . Se X è limitato e chiuso $T(X)$ è pure limitato e chiuso.

Dimostriamo intanto che $T(X)$ è limitato. Fissato un $\varepsilon > 0$ per la semicontinuità superiore di T ad ogni punto $P \in X$ corrisponde almeno un intorno σ_P tale che $T(\sigma_P \cdot X) \subset [T(P)]_\varepsilon$. Per il teorema di PINCHERLE-BOREL potremo scegliere in X un numero finito di punti $P_1, P_2, \dots, P_m$ tali che i corrispondenti intorni $\{\sigma_{P_j}\}$ ricoprano tutto X . Si avrà allora:

$$\sum_{j=1}^m X \cdot \sigma_{P_j} = X \text{ e quindi } T(X) = \sum_{j=1}^m T(X \cdot \sigma_{P_j}) \subset \sum_{j=1}^m [T(P_j)]_\varepsilon. \text{ Essendo}$$

limitata la somma $\sum_{j=1}^m [T(P_j)]_\varepsilon$ di un numero finito di insiemi limitati, tale sarà pure $T(X)$.

Sia ora Q^* un punto di accumulazione di $T(X)$. Nell'intorno $[Q^*]_{\frac{1}{n}}$ ($n = 1, 2, \dots$) vi sono punti di $T(X)$; non è vuoto quindi l'insieme β_n dei punti P di X , per i quali $T(P)[Q^*]_{\frac{1}{n}} \neq \emptyset$. Detto P^* un punto di X tale che ogni intorno $[P^*]_\rho$ ($\rho > 0$) abbia punti comuni con infiniti β_n , po-

dove ν_k è l'ordine di un qualunque punto di A_k rispetto a γ . Concludendo, per ogni punto $P_0 \in K$, esiste un intorno σ di P_0 tale che variando P in $\sigma \cdot K$ il numero $\omega_P(\gamma)$ rimane costante; ma essendo K un continuo, $\omega_P(\gamma)$ dovrà esser costante su tutto K come si riconosce facilmente applicando il teorema di PINCHERLE - BOREL.

5. - Siano $P_0 \in E$, γ' e γ'' due cicli continui 1-dimensionali, appartenenti a $S^{(2)} - T(P_0)$. Vogliamo dimostrare la relazione:

$$(5) \quad \omega_{P_0}(\gamma' + \gamma'') = \omega_{P_0}(\gamma') + \omega_{P_0}(\gamma'').$$

Se chiamiamo $\{\tau_k\}$, $\{\tau'_i\}$, $\{\tau''_l\}$ i sistemi di pezzi in cui resta decomposto $T(P_0)$ dai cicli $\gamma' + \gamma''$, γ' , γ'' rispettivamente, e ν_k , ν'_i , ν''_l gli ordini dei punti di τ_k , τ'_i , τ''_l relativi ai cicli corrispondenti, sarà, secondo la definizione

$$\begin{aligned} \omega_{P_0}(\gamma' + \gamma'') &= \sum_k \nu_k F_{P_0}(\tau_k), \quad \omega_{P_0}(\gamma') = \sum_i \nu'_i F_{P_0}(\tau'_i), \\ \omega_{P_0}(\gamma'') &= \sum_l \nu''_l F_{P_0}(\tau''_l). \end{aligned}$$

tremo determinare in corrispondenza ad un $\varepsilon > 0$ arbitrario, un $\rho_0 > 0$ tale che per $P \in X \cdot [P^*]_{\rho_0}$ sia $T(P) \subset [T(P^*)]_{\frac{\varepsilon}{2}}$ e un intero n_0 tale che:

$$a) \quad \frac{1}{n_0} < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$b) \quad \beta_{n_0} \cdot [P^*]_{\rho_0} \neq 0$$

se $\bar{P} \in \beta_{n_0} \cdot [P^*]_{\rho_0}$, sarà $T(\bar{P}) \subset [T(P^*)]_{\frac{\varepsilon}{2}} \cup T(\bar{P}) \cdot [Q^*]_{\frac{1}{n_0}} \neq 0$. Quest'ultima relazione equivale a $Q^* \in [T(P^*)]_{\frac{1}{n_0}}$ che colla precedente ci dà:

$$Q^* \in [T(P^*)]_{\frac{1}{n_0}} + \frac{\varepsilon}{2} \subset [T(P^*)]_{\varepsilon}.$$

Per l'arbitrarietà di ε , tenendo presente che $T(P^*)$ è un insieme chiuso, dovrà essere $Q^* \in T(P^*) \subset T(X)$. Perciò $T(X)$, contenendo ogni suo punto d'accumulazione, è chiuso.

Posto $\tau_{kil} = \tau_k \cdot \tau'_i \cdot \tau''_l$, sarà τ_{kil} un pezzo di $T(P_0)$ e inoltre

$$\tau_k = \sum_{il} \tau_{kil}, \quad \tau'_i = \sum_{kl} \tau_{kil}, \quad \tau''_l = \sum_{ki} \tau_{kil}$$

per cui, tenendo presente l'additività di $F_{P_0}(\tau)$

$$\omega_{P_0}(\gamma' + \gamma'') = \sum_k \nu_k F_{P_0} \left(\sum_{il} \tau_{kil} \right) = \sum_{kil} \nu_k F_{P_0}(\tau_{kil})$$

$$(6) \quad \omega_{P_0}(\gamma') = \sum_i \nu'_i F_{P_0} \left(\sum_{kl} \tau_{kil} \right) = \sum_{kil} \nu'_i F_{P_0}(\tau_{kil})$$

$$\omega_{P_0}(\gamma'') = \sum_l \nu''_l F_{P_0} \left(\sum_{ki} \tau_{kil} \right) = \sum_{kil} \nu''_l F_{P_0}(\tau_{kil})$$

le somme essendo estese a tutte le terne di indici k, i, l per cui $\tau_{kil} \neq 0$. Sommando membro a membro le ultime due delle (6) ed essendo, per l'additività dell'ordine di un punto rispetto ad un ciclo⁽¹⁸⁾ $\nu_k = \nu'_i + \nu''_l$ (dove per ogni k, i ed l sono gli indici per cui $\tau_{kil} \neq 0$) dal confronto con la prima delle (6) si trae la (5).

È immediato pure che, se γ è un ciclo in $S^{(2)} - T(P_0)$ e $-\gamma$ è il ciclo opposto è

$$\omega_{P_0}(-\gamma) = -\omega_{P_0}(\gamma)$$

e più in generale se $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ sono cicli in $S^{(2)} - T(P_0)$ e $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ interi relativi

$$\begin{aligned} \omega_{P_0}(\lambda_1 \gamma_1 + \lambda_2 \gamma_2 + \dots + \lambda_n \gamma_n) &= \lambda_1 \omega_{P_0}(\gamma_1) + \\ &+ \lambda_2 \omega_{P_0}(\gamma_2) + \dots + \lambda_n \omega_{P_0}(\gamma_n). \end{aligned}$$

(18) V. loc. cit. in (1^o) pag. 418 formula (2) e pp. 419-423,

6. Se H è un insieme limitato e chiuso di $S^{(2)}$, il complementare $S^{(2)} - H$ è costituito dalla somma di regioni aperte, connesse e disgiunte, delle quali una ed una sola, A , è illimitata. Un punto o un insieme contenuto in A lo diremo «*non circondato da H* ».

Indicheremo con E_0 l'insieme dei punti uniti di E nella T , cioè dei punti $P \in E$ tali che $P \in T(P)$. Ciò posto, dimostriamo il seguente

LEMMA I. - Se P_0 è un punto di $E - E_0$, esiste un ρ -intorno di P_0 ($\rho > 0$), tale che ogni insieme chiuso $K \subset E \cdot [P_0]_\rho$ è non circondato dalla propria immagine $T(K)$.

Per la condizione II esisterà una poligonale $\pi \subset S^{(2)} - T(P_0)$ collegante il punto P_0 con un punto O non circondato da $T(E)$. Se δ è la distanza ($\delta > 0$) tra $T(P_0)$ e π , per la condizione III esisterà un ρ -intorno di P_0 , con $0 < \rho \leq \frac{\delta}{2}$, tale che per ogni punto $P \in E \cdot [P_0]_\rho$ sia $T(P) \subset [T(P_0)]_{\frac{\delta}{2}}$. Se K è un qua-

lunque insieme chiuso contenuto in $E \cdot [P_0]_\rho$, sarà $T(K) \subset [T(P_0)]_{\frac{\delta}{2}}$. Preso un punto P qualunque di K , esso potrà

congiungersi con O mediante la poligonale $\pi' = \pi + P_0P$ ottenuta da π aggiungendovi il segmento rettilineo P_0P . I punti di P_0P distano da P_0 , e quindi da π meno di $\rho \leq \frac{\delta}{2}$. La poligonale π' è perciò esterna all'insieme $[T(P_0)]_{\frac{\delta}{2}}$ e a maggior

ragione esterna a $T(K)$. Ma O essendo non circondato da $T(E)$ sarà non circondato da $T(K)$ poichè $T(K) \subset T(E)$. L'altro estremo P della poligonale π' dovendo quindi appartenere allo stesso componente connesso di $S^{(2)} - T(K)$ che contiene O , sarà esso pure non circondato da $T(K)$. Dall'esser P arbitrario in K segue l'asserto.

7. - Sia $z = \sum_i \lambda_i z_i$ una r -catena continua ($r = 1, 2$) appartenente a $E - E_0$. Diremo che z è una *catena normale* quando ogni punto $P \in z$ soddisfa alla seguente proprietà:

β) « la somma H_P dei sostegni $\bar{z}_i$ dei semplici appartenenti ad z che contengono P non è circondata dalla propria immagine $T(H_P)$ ».

Dimostriamo ora il seguente

LEMMA II. — Se z è una r -catena continua ($r=1, 2$) appartenente a $E - E_0$, esiste una **suddivisione baricentrica** ⁽¹⁹⁾ di z (di rango abbastanza elevato) che è una **catena normale**.

Dette $z = {}^0z, {}^1z, \dots, {}^nz, \dots$ le successive suddivisioni baricentriche di z , chiamiamo con G_n l'insieme dei punti P di nz per i quali la proprietà β) non è soddisfatta.

Se per qualche n è $G_n = 0$ allora nz è una catena normale. Basterà quindi dimostrare che non può essere per ogni n , $G_n \neq 0$.

Supponiamo, se è possibile, $G_n \neq 0$ per ogni n . Esisterà allora almeno un punto P^* tale che ogni suo intorno abbia punti comuni con infiniti G_n . Determiniamo in conformità del lemma I (n. 6), un ρ -intorno di P^* , tale che ogni insieme chiuso contenuto in $E \cdot [P^*]_\rho$ sia *non circondato* dalla propria immagine. Se diciamo δ_n il massimo *diametro* ⁽²⁰⁾ dei sostegni dei semplici costituenti la r -catena nz , sarà $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 0$.

Potremo quindi scegliere un intero n_0 in modo che sia $\delta_{n_0} < \frac{\rho}{2}$ e che nell'intorno $[P^*]_{\frac{\rho}{2}}$ cada qualche punto di G_{n_0} .

Sia $P_0 \in G_{n_0} \cdot [P^*]_{\frac{\rho}{2}}$, se H_{P_0} è la somma dei sostegni dei semplici di ${}^{n_0}z$ che contengono il punto P_0 , sarà H_{P_0} un insieme chiuso di *diametro* minore di $\frac{\rho}{2}$ e poichè è $\overline{P_0 P^*} < \frac{\rho}{2}$ sarà $H_{P_0} \subset E \cdot [P^*]_\rho$. Ne segue che H_{P_0} è non circondato dalla propria immagine $T(H_{P_0})$, e P_0 soddisfacendo alla condizione β) non dovrebbe appartenere a G_{n_0} , contrariamente all'ipotesi.

⁽¹⁹⁾ V. opera citata in ⁽¹⁴⁾, pag. 105 (è usato il termine « Normalunterteilung »).

⁽²⁰⁾ Diametro di un insieme di punti è l'estremo superiore delle distanze delle coppie di punti appartenenti all'insieme.

8. - Grado della trasformazione T relativo a un ciclo normale. - Sia Γ una 1-catena normale di frontiera nulla, appartenente ad $E - E_0$, brevemente, un *ciclo normale* ⁽²¹⁾.

Posto $\Gamma = \sum_{k=1}^N \Gamma_k$, dove i Γ_k sono gli 1-simplessi continui di Γ (non necessariamente tutti distinti); se, come di consueto, indichiamo con un punto sovrapposto il passaggio da una catena alla propria frontiera e poniamo $\dot{\Gamma}_k = P_{k,1} - P_{k,2}$ essendo $P_{k,1}$ e $P_{k,2}$ i vertici di Γ_k , dovrà essere $\dot{\Gamma} = \sum_{k=1}^N \dot{\Gamma}_k = \sum_{k=1}^N (P_{k,1} - P_{k,2}) = 0$ ossia

$$(7) \quad \sum_{k=1}^N P_{k,1} = \sum_{k=1}^N P_{k,2};$$

l'una o l'altra delle somme (7) rappresenta la 0-catena dei vertici di Γ .

Consideriamo un vertice $P_{k,i}$ ($k = 1, 2, \dots, N$; $i = 1, 2$) di Γ e indichiamo con $H_{k,i}$ l'insieme (chiuso), somma dei *sostegni* $\bar{\Gamma}_j$ dei semplici Γ_j che contengono $P_{k,i}$, poniamo cioè $H_{k,i} = \sum_{P_{k,i} \in \bar{\Gamma}_j} \bar{\Gamma}_j$. Ciascun insieme $H_{k,i}$, per la definizione di ciclo

normale, sarà *non circondato* da $T(H_{k,i})$ e quindi se O è un punto *non circondato* da $T(\bar{\Gamma})$ potremo far corrispondere ad ogni vertice $P_{k,i}$ una 1-catena $C_{k,i}$ godente delle seguenti proprietà:

$$(8) \quad \begin{aligned} \dot{C}_{k,i} &= O - P_{k,i} \\ \overline{C}_{k,i} &\subset S^{(n)} - T(H_{k,i}). \end{aligned}$$

Un insieme di catene come $\{C_{k,i}\}$ lo chiameremo un *sistema di catene associato al ciclo normale* Γ . Sarà bene tener presente

⁽²¹⁾ I cicli considerati qui e nel seguito saranno supposti sempre cicli continui 1-dimensionali, anche senza dichiararlo esplicitamente.

che se $C_{k,i}$ e $C_{h,j}$ sono due catene di un sistema associato a Γ , supporremo $C_{k,i} = C_{h,j}$, qualora sia $P_{k,i} = P_{h,j}$.

Con un sistema $\{C_{k,i}\}$ associato a Γ potremo costruire i cicli

$$\gamma_k = C_{k,1} + \Gamma_k - C_{k,2}$$

per i quali, osservando che $\bar{\gamma}_k \subset \bar{C}_{k,1} + \bar{\Gamma}_k + \bar{C}_{k,2}$, $\bar{C}_{k,i} \subset S^{(2)} - T(H_{k,i}) \subset S^{(2)} - T(\bar{\Gamma}_k)$, $\bar{\Gamma}_k \subset H_{k,i} \subset S^{(2)} - T(H_{k,i}) \subset S^{(2)} - T(\bar{\Gamma}_k)$, segue

$$(9) \quad \bar{\gamma}_k \subset S^{(2)} - T(\bar{\Gamma}_k).$$

La (9) ci dice che l'espressione $\omega_{P_k}(\gamma_k)$ ha senso per ogni punto $P_k \in \bar{\Gamma}_k$ e non dipende dal particolare P_k scelto nel continuo $\bar{\Gamma}_k$ per quanto s'è detto al n. 4.

Definiamo ora il *grado* $\Omega(\Gamma)$ della trasformazione T relativo al ciclo normale Γ ponendo

$$\Omega(\Gamma) = \sum_{k=1}^N \omega_{P_k}(\gamma_k).$$

Il grado $\Omega(\Gamma)$ non dipende dalla scelta del punto O e del sistema di catene $\{C_{k,i}\}$ associato a Γ .

Infatti se $\{C'_{k,i}\}$ è un altro sistema di catene associato a Γ sarà $\dot{C}'_{k,i} = O' - P_{k,i}$, con O' non circondato da $T(\bar{\Gamma})$. Esisterà quindi una 1-catena C tale che $\dot{C} = O' - O$, $\bar{C} \subset S^{(2)} - T(\bar{\Gamma})$; allora, posto $\gamma'_k = C'_{k,1} + \Gamma_k - C'_{k,2}$, sarà

$$\gamma'_k = (C_{k,1} + \Gamma_k - C_{k,2}) + (C'_{k,1} - C_{k,1} - C) - (C'_{k,2} - C_{k,2} - C)$$

ossia

$$(10) \quad \gamma'_k = \gamma_k + (C'_{k,1} - C_{k,1} - C) - (C'_{k,2} - C_{k,2} - C)$$

da cui segue

$$(11) \quad \sum_{k=1}^N \omega_{P_k}(\gamma'_k) = \sum_{k=1}^N \omega_{P_k}(\gamma_k) + \sum_{k=1}^N \omega_{P_k}(C'_{k,1} - C_{k,1} - C) - \\ - \sum_{k=1}^N \omega_{P_k}(C'_{k,2} - C_{k,2} - C)$$

essendo $C'_{k,1} - C_{k,1} - C$ e $C'_{k,2} - C_{k,2} - C$ dei cicli appartenenti a $S^{(2)} - T(\bar{\Gamma}_k)$.

Per l'arbitrarietà di $P_k \in \bar{\Gamma}_k$ avremo

$$(12) \quad \sum_{k=1}^N \omega_{P_k}(C'_{k,1} - C_{k,1} - C) = \sum_{k=1}^N \omega_{P_{k,1}}(C'_{k,1} - C_{k,1} - C), \\ \sum_{k=1}^N \omega_{P_k}(C'_{k,2} - C_{k,2} - C) = \sum_{k=1}^N \omega_{P_{k,2}}(C'_{k,2} - C_{k,2} - C);$$

si riconosce facilmente che le somme ai secondi membri delle (12) contengono gli stessi termini poichè se indichiamo con $\sum_{j=1}^{N'} \mu_j Q_j = \sum_{k=1}^N P_{k,1} = \sum_{k=1}^N P_{k,2}$ la 0-catena dei vertici di Γ , dove i Q_j sono punti a due a due *distinti* e μ_j le rispettive molteplicità, il valore comune delle due somme risulta uguale a

$$\sum_{j=1}^{N'} \mu_j \omega_{Q_j}(C'_j - C_j - C)$$

avendo indicato con C_j la catena $C_{k,1}$ per $P_{k,1} = Q_j$ e analogamente per C'_j .

Si ha quindi per la (11)

$$\sum_{k=1}^N \omega_{P_k}(\gamma_k) = \sum_{k=1}^N \omega_{P'_k}(\gamma'_k)$$

cioè l'indipendenza di $\Omega(\Gamma)$ dalla scelta particolare del sistema $\{C_{k,i}\}$ di catene associato a Γ .

9. - Teorema di addizione. - Dimostriamo il seguente teorema fondamentale:

Se $\Gamma^{(1)}, \Gamma^{(2)}, \dots, \Gamma^{(n)}$ sono cicli normali (appartenenti quindi a $E - E_0$) e se è

$$(13) \quad \sum_{k=1}^n \Gamma^{(k)} = 0$$

è pure

$$\sum_{\nu=1}^n \Omega(\Gamma^{(\nu)}) = 0.$$

Potremo, mediante un sistema di semplici continui $z_1, z_2, \dots, z_N$ linearmente indipendenti rappresentare i cicli

$$\Gamma^{(\nu)} = \sum_{k=1}^N \sigma_k^{(\nu)} z_k \quad (\nu = 1, 2, \dots, n)$$

restando così determinati gli interi (relativi) $\sigma_k^{(\nu)}$ ($k = 1, 2, \dots, N$; $\nu = 1, 2, \dots, n$).

Avremo anzitutto, se $P_{k,1}$ e $P_{k,2}$ sono i vertici di z_k in modo che $z_k = P_{k,1} - P_{k,2}$,

$$\dot{\Gamma}^{(\nu)} = \sum_{k=1}^N \sigma_k^{(\nu)} \dot{z}_k = \sum_{k=1}^N \sigma_k^{(\nu)} (P_{k,1} - P_{k,2})$$

da cui, $\sum_{k=1}^N \sigma_k^{(\nu)} P_{k,1} = \sum_{k=1}^N \sigma_k^{(\nu)} P_{k,2}$. Queste somme rappresentano la 0-catena dei vertici di $\Gamma^{(\nu)}$; rappresentiamole anche mediante un opportuno sistema di punti a due a due distinti $P_1^*, P_2^*, \dots, P_s^*$ ponendo

$$\sum_{k=1}^N \sigma_k^{(\nu)} P_{k,1} = \sum_{k=1}^N \sigma_k^{(\nu)} P_{k,2} = \sum_{j=1}^s \mu_j^{(\nu)} P_j^* ;$$

in tal modo i $\mu_j^{(\nu)}$ saranno interi determinati.

Se O è un punto *non circondato* da nessun insieme $T(\bar{\Gamma}^{(v)})$, potremo per ogni $v = 1, 2, \dots, n$ scegliere un sistema $\{C_{k,i}^{(v)}\}$ di catene associato al ciclo normale $\Gamma^{(v)}$ e tale che

$$\dot{C}_{k,i}^{(v)} = O - P_{k,i} \quad (i = 1, 2)$$

e ciò per ogni k per cui z_k è contenuto *effettivamente* in $\Gamma^{(v)}$ ossia per cui è $\sigma_k^{(v)} \neq 0$. Per ogni altro valore di k intenderemo per $C_{k,i}^{(v)}$ la 1 catena nulla.

Il *grado* $\Omega(\Gamma^{(v)})$ sarà (essendo P_k un punto arbitrario in $\bar{z}_k$)

$$\begin{aligned} \Omega(\Gamma^{(v)}) &= \sum_{k=1}^N \sigma_k^{(v)} \omega_{P_k}(C_{k,1}^{(v)} + z_k - C_{k,2}^{(v)}) = \\ &= \sum_{k=1}^N \omega_{P_k}(\sigma_k^{(v)} C_{k,1}^{(v)} + \sigma_k^{(v)} z_k - \sigma_k^{(v)} C_{k,2}^{(v)}) \end{aligned}$$

e quindi

$$\begin{aligned} (14) \quad \sum_{v=1}^n \Omega(\Gamma^{(v)}) &= \sum_{v=1}^n \sum_{k=1}^N \omega_{P_k}(\sigma_k^{(v)} C_{k,1}^{(v)} + \sigma_k^{(v)} z_k - \sigma_k^{(v)} C_{k,2}^{(v)}) = \\ &= \sum_{k=1}^N \omega_{P_k} \left(\sum_{v=1}^n \sigma_k^{(v)} C_{k,1}^{(v)} - \sum_{v=1}^n \sigma_k^{(v)} C_{k,2}^{(v)} \right) \end{aligned}$$

perchè dalla (13) segue

$$\sum_{v=1}^n \Gamma^{(v)} = \sum_{v=1}^n \sum_{k=1}^N \sigma_k^{(v)} z_k = \sum_{k=1}^N z_k \sum_{v=1}^n \sigma_k^{(v)} = 0$$

ed essendo gli z_k indipendenti: $\sum_{v=1}^n \sigma_k^{(v)} = 0$.

Osserviamo che $\sum_{v=1}^n \sigma_k^{(v)} C_{k,i}^{(v)}$ per $i = 1, 2$, sono cicli apparte-

nenti a $S^{(2)} - T(\bar{z}_k)$ per cui potremo scindere la somma (14) in due parti come segue:

$$(15) \quad \sum_{v=1}^n \Omega(\Gamma^{(v)}) = \sum_{k=1}^N \omega_{P_k} \left(\sum_{v=1}^n \sigma_k^{(v)} C_{k,1}^{(v)} \right) - \sum_{k=1}^N \omega_{P_k} \left(\sum_{v=1}^n \sigma_k^{(v)} C_{k,2}^{(v)} \right);$$

ma le due somme a secondo membro della (15) sono uguali perchè, posto $P_k = P_{k,1}$ nella prima e $P_k = P_{k,2}$ nella seconda, possiamo in queste raggruppare i termini i cui indici k sono rispettivamente tali che $P_{k,1} = P_j^*$ e $P_{k,2} = P_j^*$, ottenendo

$$(16) \quad \sum_{k=1}^N \omega_{P_{k,i}} \left(\sum_{v=1}^n \sigma_k^{(v)} C_{k,i}^{(v)} \right) = \sum_j \omega_{P_j^*}(\Delta_j)$$

dove è

$$\Delta_j = \sum_{P_{k,i}=P_j^*} \left\{ \sum_{v=1}^n \sigma_k^{(v)} C_{k,i}^{(v)} \right\} = \sum_{v=1}^n \left\{ \sum_{P_{k,i}=P_j^*} \sigma_k^{(v)} C_{k,i}^{(v)} \right\}.$$

Per quei k per cui $P_{k,i} = P_j^*$, le $C_{k,i}^{(v)}$ per un fissato v , sono tutte coincidenti con una catena che possiamo chiamare $C_j^{(v)}$; perciò potremo scrivere:

$$\Delta_j = \sum_{v=1}^n \left\{ C_j^{(v)} \cdot \sum_{P_{k,i}=P_j^*} \sigma_k^{(v)} \right\}$$

e poichè la $\sum_{P_{k,i}=P_j^*} \sigma_k^{(v)} = \mu_j^{(v)}$ non dipende da i ($i = 1, 2$), per la (16) le due somme a secondo membro della (15) sono eguali ed è quindi $\sum_{v=1}^n \Omega(\Gamma^{(v)}) = 0$. Rimane con ciò dimostrato il teorema.

10. - Facciamo alcune brevi considerazioni:

a) Se Γ è un ciclo normale, tale è pure $-\Gamma$ ed essendo $\Gamma + (-\Gamma) = 0$ si ha, per il teorema di addizione $\Omega(\Gamma) + \Omega(-\Gamma) = 0$ quindi:

$$\Omega(-\Gamma) = -\Omega(\Gamma);$$

b) Se Γ è un ciclo normale somma di cicli normali $\Gamma^{(v)}$ ($v = 1, 2, \dots, n$), da $\sum_{v=1}^n \Gamma^{(v)} - \Gamma = 0$ segue

$$\Omega(\Gamma) = \sum_{v=1}^n \Omega(\Gamma^{(v)});$$

c) Se $\Gamma = \sum_{k=1}^N \Gamma_k$ è un ciclo normale e $\bar{\Gamma}$ è non circondato da $T(\bar{\Gamma})$ potremo scegliere un sistema di catene $\{C_{k,i}\}$ associato a Γ , tale che $\overline{C_{k,i}} \subset S^{(2)} - T(\bar{\Gamma})$ ($k = 1, 2, \dots, N; i = 1, 2$). In tal caso, poichè $\omega_P(C_{k,1} + \Gamma_k - C_{k,2})$ non varia se P varia su $\bar{\Gamma}$, sarà

$$(17) \quad \Omega(\Gamma) = \sum_{k=1}^N \omega_P(C_{k,1} + \Gamma_k - C_{k,2}) = \omega_P \left[\sum_{k=1}^N (C_{k,1} + \Gamma_k - C_{k,2}) \right] = \omega_P(\Gamma)$$

dove P è un punto arbitrario di $\bar{\Gamma}$.

Se inoltre Γ è omologo a zero in $S^{(2)} - T(\bar{\Gamma})$, cioè se Γ è frontiera di una 2 catena continua appartenente a $S^{(2)} - T(\bar{\Gamma})$ sarà

$$\Omega(\Gamma) = \omega_P(\Gamma) = 0$$

come si riconosce facilmente osservando che nella formula (4) n. 4 definente $\omega_P(\gamma)$ tutti i v_k sono nulli quando γ è omologo a zero in $S^{(2)} - T(P)$;

d) Sia ancora $\Gamma = \sum_{k=1}^N \Gamma_k$ un ciclo normale; ${}^p\Gamma$ la p -esima *suddivisione baricentrica* di Γ e ${}^p\Gamma_k$ la p -esima *suddivisione baricentrica* del simpleso continuo Γ_k ($k = 1, 2, \dots, N$), sarà ${}^p\Gamma = \sum_{k=1}^N {}^p\Gamma_k$ e quindi, essendo anche $\Gamma - {}^p\Gamma$ un ciclo normale, $\Omega(\Gamma - {}^p\Gamma) = \Omega\left[\sum_{k=1}^N (\Gamma_k - {}^p\Gamma_k)\right]$. Ma i $\Gamma_k - {}^p\Gamma_k$ sono cicli normali non circondati dalla propria immagine dato che $\overline{\Gamma_k - {}^p\Gamma_k} = \overline{\Gamma_k} - \overline{{}^p\Gamma_k} = \overline{\Gamma_k}$ e Γ_k è un simpleso di un ciclo normale. Inoltre essendo $\Gamma_k - {}^p\Gamma_k$ omologo a zero in $S^{(2)} - T(\overline{\Gamma_k})$, per le considerazioni fatte in (c) sarà $\Omega(\Gamma - {}^p\Gamma) = \sum_{k=1}^N \Omega(\Gamma_k - {}^p\Gamma_k) = 0$; da ciò segue

$$\Omega(\Gamma) = \Omega({}^p\Gamma).$$

Quest'ultima proprietà ci permette di *estendere la definizione di grado di T rispetto ad un ciclo 1-dimensionale non normale $\mathfrak{z}$ appartenente a $E - E_0$, ponendo*

$$\Omega(\mathfrak{z}) = \Omega({}^p\mathfrak{z})$$

dove ${}^p\mathfrak{z}$ è una *suddivisione baricentrica* di $\mathfrak{z}$, di rango p tale che ${}^p\mathfrak{z}$ sia un ciclo normale. In tal caso $\Omega({}^p\mathfrak{z})$ non dipende da p e la definizione è dunque legittima.

11. - Abbiamo definito il *grado* della trasformazione T per un qualunque ciclo 1-dimensionale $\mathfrak{z}$ appartenente a $E - E_0$.

Il *grado* così definito rimane invariato per le successive *suddivisioni baricentriche* di $\mathfrak{z}$. Evidentemente anche il teorema di addizione dimostrato al n. 9 per i cicli normali continua a sussistere per i cicli normali di $E - E_0$.

Dimostriamo ora l'*invarianza del grado di T relativo a cicli omologhi*.

Supponiamo che il ciclo $\mathfrak{z}$ sia omologo a zero in $E - E_0$, vale a dire esista una 2-catena $\mathfrak{z}$ appartenente a $E - E_0$ per cui sia $\mathfrak{z} = \mathfrak{z}$; scriveremo allora colla notazione usuale $\mathfrak{z} \sim 0$.

Per il lemma II (n. 7) esisterà una *suddivisione baricentrica* ${}^p\mathfrak{z}$ di $\mathfrak{z}$ che sarà una catena normale. La frontiera ${}^p\dot{\mathfrak{z}}$ di ${}^p\mathfrak{z}$ coinciderà colla p -esima *suddivisione baricentrica* di $\mathfrak{z}$.

Se poniamo ${}^p\mathfrak{z} = \sum_{j=1}^h {}^p\mathfrak{z}_j$ dove gli ${}^p\mathfrak{z}_j$ sono i semplici continui (bidimensionali) costituenti ${}^p\mathfrak{z}$ saranno le frontiere ${}^p\dot{\mathfrak{z}}_j$ di questi, dei cicli normali omologhi a zero in $S^{(2)} - T({}^p\dot{\mathfrak{z}}_j)$ e non circondati dalle proprie immagini $T({}^p\dot{\mathfrak{z}}_j)$; per quanto s'è dimostrato al n. 10 in (c) si avrà $\Omega({}^p\dot{\mathfrak{z}}_j) = 0$ e quindi

$$\Omega(\mathfrak{z}) = \Omega\left(\sum_{j=1}^h {}^p\dot{\mathfrak{z}}_j\right) = 0.$$

Se infine $\mathfrak{z}$ e $\mathfrak{z}'$ sono cicli omologhi in $E - E_0$ da $\mathfrak{z} - \mathfrak{z}' \sim 0$ in $E - E_0$ segue $\Omega(\mathfrak{z} - \mathfrak{z}') = 0$ ossia

$$\Omega(\mathfrak{z}) = \Omega(\mathfrak{z}').$$

12. - Teorema di esistenza di punti uniti in trasformazioni plurivalenti di una bicella. - Come applicazione della teoria esposta nei numeri precedenti, diamo un teorema di esistenza di punti uniti per una trasformazione plurivalente T dei punti di E , soddisfacente alle condizioni I, II, III, IV, V del n. 3, nel caso che E sia una bicella. In tale ipotesi E sarà il sostegno di un semplice topologico ⁽²²⁾ $\mathfrak{z}$ e la frontiera di E coinciderà col sostegno della frontiera di $\mathfrak{z}$. Se $\overline{\mathfrak{z}}$ non contiene punti uniti, sarà $\dot{\mathfrak{z}}$ un ciclo appartenente a $E - E_0$. Qualora si abbia $\Omega(\dot{\mathfrak{z}}) \neq 0$ esiste almeno un punto unito interno ad E . Infatti se E_0 fosse vuoto, sarebbe $\dot{\mathfrak{z}} \sim 0$ in $E - E_0 = E$ da cui seguirebbe $\Omega(\dot{\mathfrak{z}}) = 0$ per quanto s'è dimostrato al numero precedente, e ciò contrariamente all'ipotesi.

⁽²²⁾ Cfr. SEIFERT-THRELFALL, *Lehrbuch der Topologie* - Leipzig (1934) pag. 41; i semplici topologici si possono considerare come particolari semplici continui in corrispondenza biunivoca con un proprio « Urbild ».

Calcoliamo ora il *grado* relativo a $\tilde{z}$ nel caso che si abbia

$$(18) \quad T(\tilde{z}) \subset E.$$

Se $T(\tilde{z})$ è totalmente *interno* ad E , $\tilde{z}$ è un ciclo normale, non circondato da $T(\tilde{z})$ e per la (17) n. 10 si ha $\Omega(\tilde{z}) = \omega_P(\tilde{z})$ con $P \in \tilde{z}$. Essendo l'*ordine* di qualunque punto interno ad E rispetto ad $\tilde{z}$, ± 1 a seconda dell'orientazione di $\tilde{z}$, sarà

$$\Omega(z) = \pm F_P[T(P)] \quad \text{con } P \in \tilde{z}.$$

Se $T(\tilde{z})$ ha qualche punto sulla frontiera di E pur valendo la (18), potremo ricondurci al caso precedente col seguente artificio: sia H un *simplessso euclideo orientato* del piano $\Sigma^{(2)}$. Detto Φ un *omeomorfismo* tra $\Sigma^{(2)}$ e $S^{(2)}$ per cui si abbia $z = \Phi(H)$ ed H^* un *simplessso* in $\Sigma^{(2)}$ *omotetico* ad H con centro di omotetia nel baricentro di H e contenente H nel suo interno, sarà $z^* = \Phi(H^*)$ un *simplessso topologico* il cui sostegno $E^* = \tilde{z}^*$ conterrà internamente $E = \tilde{z}$. Definiamo la trasformazione T^* dei punti della bicella E^* ponendo

$$T^*(P) = T(P) \quad \text{per } P \in E$$

$$T^*(P) = T(P_1) \quad \text{per } P \in E^* - E$$

dove P_1 è quel punto della frontiera di E per cui $\Phi^{-1}(P_1)$ è la proiezione di $\Phi^{-1}(P)$ dal baricentro di H sulla frontiera di H . La trasformazione T^* è definita in E^* e soddisfa evidentemente alle condizioni I, II, III, IV, V qualora si ponga

$$F_P^*(\tau) = F_P(\tau) \quad \text{se } P \in E \text{ e } \tau \text{ è un pezzo di } T^*(P) = T(P)$$

$$F_{P_1}^*(\tau) = F_{P_1}(\tau) \quad \text{se } P \in E^* - E \text{ e } \tau \text{ è un pezzo di } T^*(P) = T(P_1).$$

Ma essendo $T^*(\tilde{z}^*) = T(\tilde{z}) \subset E$ ed E *interno* ad E^* ci siamo ricondotti al caso precedente per cui, indicando con $\Omega^*(...)$ il grado della trasformazione T^* , sarà

$$\Omega^*(\tilde{z}^*) = \pm F_P^*[T^*(P)] = \pm F_{P_1}[T(P_1)]$$

dove P è un punto qualunque di $\bar{z}^*$. Ora essendo $z^* \sim z$ in $E^* - E_0$ sarà $\Omega^*(z^*) = \Omega^*(z)$; osservando infine che $\bar{z} \subset E$ e che in tutto E la $T^*(P)$ e la F_P^* coincidono rispettivamente colla $T(P)$ e con F_P si avrà

$$\Omega^*(z) = \Omega(z) = \pm F_{P_1}[T(P_1)] \text{ con } P_1 \in \bar{z}.$$

Possiamo quindi enunciare il seguente teorema:

Se T è una trasformazione plurivalente dei punti di una bicella E , soddisfacente alle condizioni I, II, III, IV, V (cfr. n. 3) e se inoltre:

$\alpha)$ l'immagine della frontiera di E è contenuta in E

$\beta)$ $F_P[T(P)] \neq 0$ per $P \in E$ ⁽²³⁾

esiste in E almeno un punto $P \in T(P)$.

13. - Sono soddisfatte tutte le condizioni del teorema precedente quando una trasformazione T di una bicella E soddisfa alle I, II, III del n. 3, alla condizione (α_1) e ad una delle (α_2) , (α'_2) seguenti:

$\alpha_1)$ se P_0 è un punto qualunque di E e se τ_0 è un pezzo di $T(P_0)$, l'insieme $T(P)[\tau_0]_\varepsilon$ per ogni $\varepsilon > 0$, sia definitivamente non vuoto al tendere di P a P_0 in E ⁽²⁴⁾.

$\alpha_2)$ $T(P)$ per ogni $P \in E$ sia costituito da un numero finito e costante h di componenti ⁽²⁵⁾.

$\alpha'_2)$ $T(P)$ per ogni $P \in E$ abbia al più due componenti.

Nell'ipotesi (α_2) sono soddisfatte anche le condizioni IV e V se poniamo per $P \in E$:

$$(19) \quad F_P(\tau) = \text{numero dei componenti di } \tau$$

⁽²³⁾ $F_P[T(P)]$ non varia al variare di P in E e ciò per la ipotesi V.

⁽²⁴⁾ Cioè, per ogni $\varepsilon > 0$ esista un intorno σ di P_0 tale che per $P \in E \cdot \sigma$ sia $T(P)[T_0]_\varepsilon \neq \emptyset$.

⁽²⁵⁾ V. nota (7) nonché: P. ALEXANDROFF - H. HOPF - *Topologie* - Berlin - 1935 - pp. 49 e 117.

e lo stesso nell'ipotesi (α'_2) se poniamo :

$$(20) \quad F_P(\tau) = \begin{cases} 0 & \text{se } \tau = 0 \\ 1 & \text{se } \tau \neq 0, \tau \notin T(P) \\ 2 & \text{se } \tau = T(P) \end{cases}$$

τ essendo un pezzo qualunque di $T(P)$.

È facile riconoscere che in entrambi i casi la $F_P(\tau)$ è una funzione additiva dei pezzi τ di $T(P)$. Resta da dimostrare che sussiste la condizione V. Nell'ipotesi (α_2) , sia $P_0 \in E$, $T_1, T_2, \dots, T_h$ i componenti di $T(P_0)$ ed A un insieme aperto in $S^{(2)}$ la cui frontiera non abbia punti in comune con $T(P_0)$. Se δ è la distanza (necessariamente positiva) tra $T(P_0)$ e la frontiera di A , ed ε un numero positivo minore di δ e tale che gli ε -intorni $[T_j]_\varepsilon$ ($j = 1, 2, \dots, h$) non interferiscano a due a due, sarà $[T(P_0)]_\varepsilon = \sum_{j=1}^h [T_j]_\varepsilon$ e ciascun $[T_j]_\varepsilon$ sarà totalmente interno o totalmente esterno ad A .

Per la semicontinuità superiore della T e per l'ipotesi (α_2) esisterà un $\rho > 0$ tale che per ogni $P \in E \cdot [P_0]_\rho$ sia $T(P) \subset [T(P_0)]_\varepsilon$ e in ciascun $[T_j]_\varepsilon$ cada qualche punto di $T(P)$. Allora $T(P) \cdot [T_j]_\varepsilon$ è un pezzo non vuoto di $T(P)$ e poichè i $[T_j]_\varepsilon$ sono tutti disgiunti e in numero di h , ciascuno dei $[T_j]_\varepsilon$ conterrà uno ed un solo componente di $T(P)$. Se μ è il numero dei componenti T_j di $T(P_0)$ contenuti in A , lo stesso μ sarà il numero dei componenti di $T(P)$ contenuti in A , per cui per la (19) si ha

$$F_P[A \cdot T(P)] = F_{P_0}[A \cdot T(P_0)] = \mu$$

per ogni $P \in E \cdot [P_0]_\rho$. Vale quindi la condizione V.

Nell'ipotesi (α'_2) , mantenendo per P_0 , A ed ε il significato anzidetto, potranno presentarsi tre casi:

1° $A \cdot T(P_0) = 0$; allora per la semicontinuità superiore di T esiste un $\rho > 0$ tale che per ogni $P \in E \cdot [P_0]_\rho$ si abbia

$T(P) \subset [T(P_0)]_\varepsilon$, sarà quindi per tali punti $A \cdot T(P) = 0$ da cui per la (20)

$$F_P[A \cdot T(P)] = F_{P_0}[A \cdot T(P_0)] = 0.$$

2° $A \cdot T(P_0) = T(P_0)$; per $P \in E \cdot [P_0]_\rho$ è $T(P) \subset [T(P_0)]_\varepsilon \subset A$ e per tali P si avrà per la (20)

$$F_P[A \cdot T(P)] = F_{P_0}[A \cdot T(P_0)] = 2.$$

3° $A \cdot T(P_0) \neq 0$, $A \cdot T(P_0) \neq T(P_0)$; in questo caso $T(P_0)$ è costituito da due componenti T_1 e T_2 una interna e l'altra esterna ad A . Per $P \in E \cdot [P_0]_\rho$ si avrà $T(P) \subset [T_1]_\varepsilon + [T_2]_\varepsilon = [T(P_0)]_\varepsilon$ e se ρ è abbastanza piccolo, per la (α'_2) ciascun *perxo* $T(P)[T_1]_\varepsilon$, $T(P)[T_2]_\varepsilon$ è non vuoto ed è quindi un componente di $T(P)$. Se T_1 è il componente di $T(P_0)$ contenuto in A si ha

$$A \cdot T(P) = T(P)[T_1]_\varepsilon \neq T(P)$$

per ogni $P \in E \cdot [P_0]_\rho$. Avremo dunque in questo caso per la (20)

$$F_P[A \cdot T(P)] = F_{P_0}[A \cdot T(P_0)] = 1.$$

È soddisfatta quindi la condizione V. Inoltre nell'ipotesi (α_2) si ha evidentemente

$$F_P[T(P)] = h \neq 0 \quad \text{per } P \in E$$

e nell'ipotesi (α'_2)

$$F_P[T(P)] = 2 \quad \text{per } P \in E.$$

In entrambi i casi è quindi soddisfatta la condizione (β) del n. 12. Basterà imporre anche la (α) del n. 12 per poter affermare nei due casi l'esistenza di almeno un punto unito (²⁶).

(²⁶) Il Teorema di esistenza nell'ipotesi (α_2) limitandoci a trasformazioni di bicelle in sè, è in sostanza contenuto in un teorema analogo per r -celle dimostrato da E. MAGENES nella nota citata (⁶) pp. 175-181.