

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

GIORGIO TREVISAN

**A proposito delle relazioni di congruenza
sui quasi-gruppi**

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 19 (1950), p. 367-370

[<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1950__19__367_0>](http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1950__19__367_0)

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1950, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

A PROPOSITO DELLE RELAZIONI DI CONGRUENZA SUI QUASI-GRUPPI

Nota () di* GIORGIO TREVISAN *(a Padova).*

1. - Un quasi-gruppo G può essere definito ⁽¹⁾ come un'algebra dotata di due operazioni binarie O_1 , O_2 verificanti le condizioni:

1) O_1 ed O_2 sono definite per ogni coppia ordinata a, b di elementi di G ed i risultati $O_1(a, b)$, $O_2(a, b)$ sono elementi di G univocamente determinati;

2) sono univocamente determinati gli elementi y e z di G per modo che $O_1(a, y) = b$ ed $O_2(a, z) = b$;

3) $O_1(a, b) = O_2(b, a)$.

Nel seguito si chiameranno algebre $\overline{G}$ quelle dotate di una operazione binaria come $O_1(x, y)$ che verifichi delle 1) e 2) le proprietà che la riguardano ed inoltre tale che:

4) $O_1(\overline{G}, x) = \overline{G}$ qualunque sia l'elemento x di $\overline{G}$, dove $O_1(\overline{G}, x)$ rappresenta l'insieme degli elementi $O_1(g, x)$ con $g \in \overline{G}$.

Per semplicità si scriverà xy al posto di $O_1(x, y)$.

In questa Nota, definito il concetto di normalità per le relazioni di congruenza su $\overline{G}$, come fa KIOKEMEISTER ⁽²⁾ per i quasi-gruppi, si dimostra che le relazioni normali su $\overline{G}$ sono tra loro permutabili.

(*) Pervenuta in Redazione il 27 maggio 1950.

(1) La forma della presente definizione si ritiene sia nuova e possa risultare di qualche interesse.

(2) F. KIOKEMEISTER. *A theory of normality for quasi-groups*, [American Journal of mathematics, vol. LXX, n. 1, (1948)] pagg. 100, condizioni i) e ii).

In particolare si vedrà che nei quasi-gruppi con un numero finito di elementi tutte le relazioni di congruenza sono normali e quindi tra loro permutabili. Si risponde così ad una domanda posta da BIRKHOFF ⁽³⁾.

2. - Si osservi che la condizione 4) esprime che, assegnati gli elementi x e b di $\overline{G}$ esiste *almeno* un elemento a di $\overline{G}$ tale che $ax = b$.

Si conclude col

TEOREMA I: *Un quasi-gruppo è un algebra $\overline{G}$.*

Si ha poi il

TEOREMA II: *Un algebra $\overline{G}$ con un numero finito di elementi è un quasi-gruppo.*

Infatti per la 4) $O_1(x, a)$ al variare di x in $\overline{G}$ descrive $\overline{G}$. Quindi se $\overline{G}$ ha un numero finito di elementi è unico lo x per cui $O_1(x, a) = b$.

Epperò, se si definisce l'operazione $O_2(x, y)$ con la posizione $O_2(x, y) = O_1(y, x)$, la seconda delle 2) risulta anche essa verificata e $\overline{G}$ è allora un quasi-gruppo.

3. - Una relazione di equivalenza ⁽⁴⁾ θ su $\overline{G}$ distribuisce gli elementi di $\overline{G}$, in sottoinsiemi disgiunti, i blocchi ⁽⁵⁾ della θ e per indicare che due elementi a e b appartengono ad uno stesso blocco della θ si scrive $a \equiv b(\theta)$.

La θ è detta poi una relazione di congruenza su $\overline{G}$, se verifica la condizione:

$\alpha)$ se $a \equiv b(\theta)$ e $c \equiv d(\theta)$ è pure $ac \equiv bd(\theta)$.

(3) G. BIRKHOFF, *Lattice theory* [American Math. Society, Colloquium Publications, vol. XXV, (1948)] a pag. 86 nel «Problem 31» tra l'altro si domanda se esistono quasi-gruppi con un numero finito di elementi le cui relazioni di congruenze non siano permutabili.

(4) Cioè una relazione binaria che gode della proprietà riflessiva, simmetrica e transitiva.

(5) Questo termine è usato da O. ORE, *Theory of equivalence relations* [Duke Journal 9 (1942)] pag. 574.

Seguendo KROEMER, la relazione di congruenza θ su $\overline{G}$ è normale se

β) $ax \equiv bx(\theta)$ implica $a \equiv b(\theta)$ e $xa \equiv xb(\theta)$ implica $a \equiv b(\theta)$.

Vale allora il

LEMMA: Se θ è una relazione di congruenza normale su $\overline{G}$ ed A_1 è un blocco e $a \in \overline{G}$ anche $A_1 \cdot a^{(6)}$ è un blocco della θ . Se A_1 ed A_2 sono blocchi distinti della θ , tali sono $A_1 \cdot a$ ed $A_2 \cdot a$.

Per la α) tutti gli elementi di $A_1 \cdot a$ appartengono ad uno stesso blocco C della θ ; se $c \in C$, $a_1 \in A_1$ e se per l'elemento u risulta $ua = c$ ⁽⁷⁾, si ha $ua \equiv a_1 a(\theta)$ e per la β) $u \equiv a_1(\theta)$ cioè $u \in A_1$, e $A_1 \cdot a$ contiene C .

Se $a_2 \in A_2$ e se $a_2 \cdot a \in C$, dalla $a_2 a \equiv a_1 a(\theta)$ e dalla β) segue $a_2 \equiv a_1(\theta)$, contro l'ipotesi che A_1 ed A_2 siano blocchi diversi e quindi insiemi disgiunti. Da cui appunto $A_1 \cdot a \neq A_2 \cdot a$.

Ora è possibile dimostrare il

TEOREMA III: Se A_1, A_2 e B_1, B_2 sono blocchi rispettivamente delle congruenze normali su $\overline{G}$, θ e θ_1 e verificano le

$$(1) \quad A_1 \cap B_1 \neq 0, \quad A_1 \cap B_2 \neq 0, \quad B_1 \cap A_2 \neq 0,$$

A_2 e B_2 soddisfanno alla

$$(2) \quad A_2 \cap B_2 \neq 0.$$

Sia $k \in A_1 \cap B_1$ ed $h \in A_1 \cap B_2$, ed y un elemento di $\overline{G}$ tale che $ky = h$ e quindi per il lemma, $B_1 y = B_2$.

Si dica A^* il blocco della θ al quale appartiene y .

Sia $u \in A_2 \cap B_1$, allora $uy = v \in B_2$.

Scelto z in modo che sia $hz = h$, dalla $k \equiv h(\theta)$ segue, per la α), $ky \equiv hy(\theta)$; ma è anche $ky = h = hz$, quindi $hz \equiv hy(\theta)$ e, per la β), $z \equiv y(\theta)$; cioè $z \in A^*$.

Dall'ultima congruenza stabilita si trae $ux \equiv uy(\theta)$. Ma esiste un $\tau \in B_2$ tale che $\tau z = v = uy$ (poichè dalla $h; = h$ si

⁽⁶⁾ Con $A_1 a$ s'intenda l'insieme degli elementi $a_1 a$ con $a_1 \in A_1$.

⁽⁷⁾ L'esistenza di u segue dalla 4).

ricava per il lemma $B_2 x = B_2$; e si conclude che $\tau x \equiv u x(\theta)$; per la β) è quindi $\tau \equiv u(\theta)$; perciò $\tau \in A_2$ e in definitiva $A_2 \cap B_2$ è diverso da zero perchè contiene τ . E la (2) è dimostrata.

TEOREMA IV: *Una relazione di congruenza θ su $\overline{G}$, la quale distribuisca gli elementi di $\overline{G}$ in un numero finito di blocchi è normale.*

Siano $A_1, A_2, \dots, A_n$ i blocchi della θ .

Gli insiemi $x A_1, x A_2, \dots, x A_n$ sono, per la α), contenuti ciascuno in un blocco delle θ . Inoltre essi esauriscono $\overline{G}$ perchè $x \overline{G} = \overline{G}$ per la prima delle 2). Quindi ogni blocco della θ coincide con uno di questi insiemi.

Lo stesso può dirsi in virtù del lemma per gli insiemi $A_1 x, A_2 x, \dots, A_n x$. Perciò se $xa \equiv xb(\theta)$ e $a \in A_i, b \in A_j$, segue $xA_i = xA_j$; cioè $i = j$ e quindi $a \equiv b(\theta)$. In modo analogo si dimostra che è soddisfatta anche la seconda parte della β).

Si ottiene così come corollario il

TEOREMA V: *Un quasi-gruppo $\overline{G}$, con un numero finito di elementi, possiede soltanto relazioni di congruenza normali.*

Basta tener conto dei teoremi I e IV.

4. - Si conclude ora con il

TEOREMA VI: *In un quasi-gruppo con un numero finito di elementi tutte le relazioni di congruenza sono permutabili.*

Il fatto che le (1) implicino la (2), che è chiamato da DUBREIL⁽⁸⁾ associabilità delle relazioni di congruenza θ e θ_1 , da DUBREIL stesso è mostrato essere equivalente alla permutabilità delle θ e θ_1 cioè al fatto che se $a \equiv x(\theta)$, $x \equiv b(\theta_1)$ esiste y per cui $a \equiv y(\theta_1)$, $y \equiv b(\theta)$ e viceversa.

Perciò se si tiene conto dei teoremi III e V ne segue il teorema VI.

⁽⁸⁾ P. DUBREIL, *Algèbre* [Cahiers Scientifiques, Gauthier-Villars, Paris, 1946] pagg. 17-18. La cosa del resto è facile a dimostrarsi.