

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

EMMA MARCHENTE

Teoremi di confronto per problemi al contorno relativi a sistemi di due equazioni differenziali del primo ordine

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 12 (1941), p. 81-88

http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1941__12__81_0

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1941, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

TEOREMI DI CONFRONTO PER PROBLEMI AL CON- TORNO RELATIVI A SISTEMI DI DUE EQUAZIONI DIFFERENZIALI DEL PRIMO ORDINE

Nota di EMMA MARCHENTE (a Bassano del Grappa).

In questo volume TREVISAN ⁽¹⁾ e SCORZA DRAGONI ⁽²⁾ hanno dato dei teoremi di unicità per gli integrali dei sistemi di due equazioni differenziali del primo ordine. Per chiarezza sarà utile ricordare esplicitamente i seguenti:

Se $f(x, y, z)$, $g(x, y, z)$ sono funzioni continue nello strato

$$(1) \quad S: a \leq x \leq b, \quad -\infty < y < +\infty, \quad -\infty < z < +\infty$$

e inoltre:

a) $f(x, y, z)$ è crescente rispetto a x e lipschitziana in y ;

b) $g(x, y, z)$ è crescente rispetto a y ;

allora il sistema:

$$(2) \quad \begin{aligned} y' &= f(x, y, z), \\ z' &= g(x, y, z) \end{aligned}$$

ammette, nell' intervallo

$$(3) \quad I: a \leq x \leq b,$$

⁽¹⁾ G. TREVISAN, *Teoremi di unicità e confronto per problemi relativi a sistemi di due equazioni differenziali ordinarie del primo ordine* [questo volume, pagg. 12-21].

⁽²⁾ G. SCORZA DRAGONI, *Teoremi di unicità relativi a un problema al contorno per un sistema di due equazioni differenziali, ordinarie, del primo ordine* [questo volume, pagg. 30-50].

al più una coppia di integrali verificanti le condizioni:

$$(4) \quad y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta \quad (3);$$

e:

Se $f(x, y, z)$, $g(x, y, z)$ sono funzioni continue nello strato S e

a) $f(x, y, z)$ è non decrescente (non crescente) rispetto a z e lipschitziana in y ;

b) $g(x, y, z)$ è non decrescente (non crescente) rispetto a y e lipschitziana in z ,

il sistema (2) ammette, in I , al più una coppia di integrali soddisfacenti alle (4) (4).

Inoltre TREVISAN ha dato anche dei teoremi di confronto per le soluzioni di due sistemi. Precisamente egli ha dimostrato che:

Se i secondi membri del sistema

$$(5) \quad y' = f_i(x, y, z), \quad z' = g_i(x, y, z) \quad (i = 1, 2)$$

sono continui nello strato S e

$$y_i(x), \quad z_i(x)$$

verificano le (5) in tutto I ; se inoltre f_1 è crescente in z , g_1 decrescente in y e lipschitziana in z , g_2 crescente in y e lipschitziana in z , mentre $f_1 \leq f_2$, $g_1 \leq g_2$, da

$$z_1(a) < z_2(a), \quad y_1(b) > y_2(b)$$

segue

$$z_1(x) < z_2(x), \quad y_1(x) > y_2(x) \quad (a \leq x \leq b).$$

TREVISAN considera anche il caso che dalle

$$y_1(a) < y_2(a), \quad z_1(b) < z_2(b)$$

(3) loc. cit. (4), n. 1.

(4) loc. cit. (2), § 3. Veramente SCORZA DRAGONI suppone f e g misurabili rispetto ad z e continue rispetto ad (y, z) ; introduco, in questo lavoro, l'ipotesi della continuità di $f(x, y, z)$ e $g(x, y, z)$ [rispetto a (x, y, z)] solo per motivi di semplicità.

si vogliano dedurre le

$$y_1(x) < y_2(x), \quad x_1(x) < x_2(x) \quad (5).$$

In questa Nota mi propongo di dare dei teoremi di confronto in cui le ipotesi fatte si avvicinino di più come tipo a quelle del secondo dei teoremi di unicità sopra ricordati. Applicherò poi i risultati ottenuti per indicare un teorema d'esistenza, relativo alle soluzioni delle (2) soddisfacenti alle (4), quando le funzioni $f(x, y, z)$ e $g(x, y, z)$ si suppongano continue in un insieme della forma

$$\Gamma: a \leq x \leq b, \quad \sigma_1(x) \leq y \leq \sigma_2(x), \quad \tau_1(x) \leq z \leq \tau_2(x).$$

1. - Avrò spesso bisogno nel seguito di un lemma che, per comodità, riporto qui esplicitamente:

Le funzioni $\Gamma(x, y)$ e $\Delta(x, y)$ siano continue nella striscia

$$\Sigma: a \leq x \leq b, \quad -\infty < y < +\infty;$$

siano lipschitziane ivi rispetto alla y e vi soddisfacciano alla

$$\Gamma(x, y) \leq \Delta(x, y).$$

Allora, se

$$\gamma(x), \quad \delta(x)$$

sono rispettivamente integrali delle

$$y' = \Gamma(x, y), \quad y' = \Delta(x, y)$$

e se in un punto x_0 di $a \leq x \leq b$ riesce

$$\gamma(x_0) \leq \delta(x_0),$$

è anche

$$\gamma(x) \leq \delta(x) \quad \text{in} \quad x_0 \leq x \leq b;$$

se invece riesce

$$\gamma(x_0) \geq \delta(x_0),$$

(5) loc. cit. (4), nn. 4 e 5.

è anche

$$\gamma(x) \geq \delta(x) \quad \text{in} \quad a \leq x \leq x_0^{(*)}.$$

2. - Dimostriamo ora il seguente teorema:

Le funzioni $f(x, y, z)$, $g(x, y, z)$, $\varphi(x, y, z)$ e $\phi(x, y, z)$ siano continue nello strato S definito dalle (1) e $y = p(x)$, $z = r(x)$ siano soluzioni del sistema

$$y' = f(x, y, z),$$

$$z' = g(x, y, z),$$

mentre $y = \pi(x)$, $z = \rho(x)$ lo siano del sistema

$$y' = \varphi(x, y, z),$$

$$z' = \phi(x, y, z);$$

e $p(x)$, $r(x)$, $\pi(x)$, $\rho(x)$ si suppongano definite in tutto l'intervallo

$$I: a \leq x \leq b.$$

Allora se:

I) $f(x, y, z)$, $\varphi(x, y, z)$ sono lipschitziane in y ;

II) $g(x, y, z)$, $\phi(x, y, z)$ sono lipschitziane in z ;

sè, per ogni x dell'intervallo I e per y, y_1, y_2, z, z_1, z_2 qualunque, è

$$(6) \quad f(x, y, z_1) \leq \varphi(x, y, z_2),$$

$$(7) \quad g(x, y_1, z) \geq \phi(x, y_2, z)$$

e se inoltre risulta

$$p(a) \leq \pi(a), \quad r(b) \leq \rho(b),$$

in I è sempre

$$p(x) \leq \pi(x), \quad r(x) \leq \rho(x).$$

(*) Per un teorema un po' più generale cfr. loc. cit. (*), § 2. Per altri teoremi dello stesso tipo, validi per i sistemi, si veda M. PICONI, *Teoremi di confronto per i sistemi di equazioni differenziali ordinarie e loro conseguenze* [Annali di Matematica pura ed applicata, serie IV, tomo XX (1941), pagg. 67-103], n. 1.

Dalla (6) segue infatti

$$f(x, y, r(x)) \leq \varphi(x, y, \rho(x))$$

e quindi per il lemma del n. 1, per la I) e la $p(a) \leq \pi(a)$ si ha appunto

$$p(x) \leq \pi(x).$$

Dalla (7) segue poi

$$g(x, p(x), z) \geq \psi(x, \pi(x), z)$$

e, per il lemma precedente e per la II) e la $z(b) \leq \rho(b)$, si ha

$$r(x) \leq \rho(x) \text{ (')}.$$

3. - In modo analogo si dimostra che, se è

$$(8) \quad f(x, y, z_1) \leq \varphi(x, y, z_2),$$

$$(9) \quad g(x, y_1, z) \leq \psi(x, y_2, z),$$

se

I) $f(x, y, z)$ e $\varphi(x, y, z)$ sono lipschitziane in y ,

II) $g(x, y, z)$ e $\psi(x, y, z)$ sono lipschitziane in z

e

$$p(a) \leq \pi(a) \quad r(b) \geq \rho(b),$$

è sempre in I

$$p(x) \leq \pi(x), \quad r(x) \geq \rho(x).$$

4. - OSSERVAZIONE. A chiarimento dei risultati precedenti dimostriamo ora che, se le funzioni $f(x, y, z)$, $g(x, y, z)$, $\varphi(x, y, z)$, $\psi(x, y, z)$ soddisfanno alle condizioni seguenti:

(') Se nel teorema dimostrato si suppone $f = \varphi$ e $g = \psi$, la (6) porta che f non dipende da z , mentre dalla (7) segue che g non dipende da y . Il sistema (2) si spezza in due equazioni differenziali distinte. E le affermazioni del testo sono conseguenze del fatto che, nelle nostre ipotesi, gli integrali di queste sono univocamente determinati dai valori iniziali.

- $\alpha)$ $f(x, y, z)$ è non decrescente in z ,
 $\beta)$ $g(x, y, z)$ è non decrescente in y ,
 $\gamma)$ $\varphi(x, y, z)$ è non crescente in z ,
 $\delta)$ $\phi(x, y, z)$ è non crescente in y ,

$$(10) \quad f(x, y, z) \leq \varphi(x, y, z),$$

$$(11) \quad g(x, y, z) \geq \phi(x, y, z),$$

esse soddisfanno pure alle (6) e (7).

Supponiamo infatti $z_1 \leq z_2$; da questa ipotesi, dalla (10) e dalla $\alpha)$ segue:

$$f(x, y, z_1) \leq f(x, y, z_2) \leq \varphi(x, y, z_2).$$

Supponiamo invece $z_1 > z_2$; da questa ipotesi, dalla (10) e dalla $\gamma)$ segue:

$$f(x, y, z_1) \leq \varphi(x, y, z_1) \leq \varphi(x, y, z_2).$$

Cioè la (6) è sempre verificata.

Dalle $\beta)$, $\delta)$ e dalla (11) segue invece la (7).

In modo analogo si dimostra che, se le funzioni $f(x, y, z)$, $g(x, y, z)$, $\varphi(x, y, z)$, $\phi(x, y, z)$ soddisfanno alle $\alpha)$, $\beta)$, $\gamma)$, $\delta)$ ed alle:

$$f(x, y, z) \leq \varphi(x, y, z),$$

$$g(x, y, z) \leq \phi(x, y, z),$$

esse soddisfanno pure alle (8) e (9).

5. - *Nell'insieme*

$$\Gamma: a \leq x \leq b, \quad \alpha_1(x) \leq y \leq \alpha_2(x), \quad \tau_1(x) \leq z \leq \tau_2(x),$$

ove $\alpha_i(x)$ e $\tau_i(x)$ ($i = 1, 2$) sono continue e derivabili in

$$I: a \leq x \leq b,$$

siano date due funzioni continue $f(x, y, z)$ e $g(x, y, z)$, con

$$(12) \quad \begin{aligned} \alpha'_1(x) &\leq f(x, y, z) \leq \alpha'_2(x), \\ \tau'_1(x) &\geq g(x, y, z) \geq \tau'_2(x), \end{aligned}$$

e sia $f(x, y, z)$ lipschitziana in y e $g(x, y, z)$ lipschitziana in z ; allora, dati due numeri α e β verificanti le

$$\sigma_1(a) \leq \alpha \leq \sigma_2(a),$$

$$\tau_1(b) \leq \beta \leq \tau_2(b),$$

esiste in I una coppia di soluzioni $\sigma(x)$ e $\tau(x)$ delle

$$y' = f(x, y, z),$$

$$z' = g(x, y, z)$$

verificanti le

$$\sigma(a) = \alpha \quad \tau(b) = \beta^{(8)}.$$

Poniamo

$$\bar{f}(x, y, z) = f(x, y, z) \quad \text{in } \Gamma,$$

$$\bar{f}(x, y, z) = f(x, \sigma_1(x), z) \quad \text{se } y < \sigma_1(x), \quad \tau_1(x) \leq z \leq \tau_2(x),$$

$$\bar{f}(x, y, z) = f(x, \sigma_2(x), z) \quad \text{se } y > \sigma_2(x), \quad \tau_1(x) \leq z \leq \tau_2(x),$$

$$\bar{f}(x, y, z) = f(x, y, \tau_2(x)) \quad \text{se } z > \tau_2(x),$$

$$\bar{f}(x, y, z) = f(x, y, \tau_1(x)) \quad \text{se } z < \tau_1(x),$$

e definiamo mediante uguaglianze analoghe la $\bar{g}(x, y, z)$ a partire da $g(x, y, z)$.

Poniamo inoltre:

$$\varphi_i(x, y, z) = \sigma'_i(x) \quad (i = 1, 2),$$

$$\psi_i(x, y, z) = \tau'_i(x).$$

Risulta allora per le (12)

$$(13) \quad \varphi_1(x, y, z_1) \leq \bar{f}(x, y, z_2) \leq \varphi_2(x, y, z_3),$$

$$\psi_1(x, y_1, z) \geq \bar{g}(x, y_2, z) \geq \psi_2(x, y_3, z)$$

ed inoltre $\sigma_i(x)$, $\tau_i(x)$ sono integrali del sistema

$$y' = \varphi_i(x, y, z),$$

$$z' = \psi_i(x, y, z).$$

⁽⁸⁾ Nei nn. 10 e 11 di loc. cit. ⁽²⁾ sono dimostrati dei teoremi analoghi in cui si suppone o $\sigma_1(a) = \sigma_2(a) = \alpha$ oppure $\tau_1(b) = \tau_2(b) = \beta$.

Chiamiamo $\bar{\sigma}(x)$, $\bar{\tau}(x)$ una coppia di integrali, certamente esistenti ⁽⁹⁾, del sistema

$$\begin{aligned} y' &= \bar{f}(x, y, x), \\ x' &= \bar{g}(x, y, x) \end{aligned}$$

definiti in I e soddisfacenti alle condizioni

$$\bar{\sigma}(a) = \alpha, \quad \bar{\tau}(b) = \beta.$$

Allora, da $\sigma_1(a) \leq \bar{\sigma}(a)$ e $\tau_1(b) \leq \bar{\tau}(b)$ e dalle (13), per il teorema del n. 2, segue:

$$\sigma_1(x) \leq \bar{\sigma}(x), \quad \tau_1(x) \leq \bar{\tau}(x) \quad (a \leq x \leq b).$$

Allo stesso modo, dalle (13) e dalle $\bar{\sigma}(a) \leq \sigma_2(a)$, $\bar{\tau}(b) \leq \tau_2(b)$, segue:

$$\bar{\sigma}(x) \leq \sigma_2(x), \quad \bar{\tau}(x) \leq \tau_2(x)$$

e quindi $\bar{\sigma}(x)$ e $\bar{\tau}(x)$ verificano il sistema:

$$\begin{aligned} y' &= f(x, y, x), \\ x' &= g(x, y, x), \end{aligned}$$

c. v. d.

Ricorrendo al risultato del n. 3, si trova un teorema analogo al precedente in cui però la $\tau_1(x) \leq \tau_2(x)$ è sostituita dalla $\tau_1(x) \geq \tau_2(x)$ e quindi Γ è l'insieme $a \leq x \leq b$, $\sigma_1(x) \leq y \leq \sigma_2(x)$, $\tau_2(x) \leq x \leq \tau_1(x)$

(⁹) Per una dimostrazione elementare di questa circostanza cfr. A. MINZONI, *Su un problema ai limiti per un sistema di due equazioni differenziali del 1° ordine* [questi Rendiconti, vol. IX (1938), pagg. 142-149] nn. 1-2.