

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

GIUSEPPE SCORZA DRAGONI

Sul teorema generale di traslazione

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 8 (1937), p. 83-91

http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1937__8__83_0

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1937, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*
<http://www.numdam.org/>

SUL TEOREMA GENERALE DI TRASLAZIONE

Nota di GIUSEPPE SCORZA DRAGONI

Un automorfismo T ⁽¹⁾ di una superficie sferica S che conservi il senso delle rotazioni ammette almeno un punto unito, secondo un teorema di BROUWER⁽²⁾. E se di punti uniti ne esiste uno solo, BROUWER ha anche dimostrato che:

Ogni punto P di S diverso dal punto unito O è interno ad un campo di traslazione di T ⁽³⁾,

intendendo qui per campo di traslazione di T un insieme aperto, rispetto ad S naturalmente, e semplicemente connesso, delimitato (cioè, la cui completa frontiera è costituita) da due curve di Jordan, che passano per O ed hanno in comune solo questo punto, tali che una conveniente di esse sia la trasformata dell'altra in T .

Nel caso che C ammetta due e due soli punti uniti, è stato finora soltanto dimostrato che:

Se gli intorni dei due punti uniti sono ruotati in versi opposti, allora esiste sulla sfera una curva di Jordan che non incontra la propria immagine e che separa i due punti uniti⁽⁴⁾.

(1) Automorfismo = trasformazione topologica, cioè biunivoca e continua, in sè.

(2) Cfr. B. v. KERÉKJÁRTÓ, *Vorlesungen über Topologie* [Springer, Berlino, 1923], vol. I, pag. 193.

(3) L. E. J. BROUWER, *Beweis des ebenen Translationssatzes* [Mathematische Annalen, vol. 72 (1912), pagg. 37-54].

Per un'altra dimostrazione dello stesso teorema si veda H. TERASAKA, *Ein Beweis des Brouwerschen ebenen Translationssatzes* [Japanese Journal of Mathematics, vol. VII (1930), pag. 61-69].

(4) G. SCORZA DRAGONI, *Su l'ultimo teorema geometrico di Poincaré* [Memorie della Reale Accademia d'Italia. Classe di Sc. fis. mat. e nat., vol. VII (1936), pagg. 35-59], pagg. 35-36 (se ne veda anche il n. 25); *Su*

Il campo (campo = insieme aperto e connesso) doppiamente connesso delimitato da questa curva e dalla sua immagine è privo di punti in comune con il suo trasformato in T ; lo si può ancora chiamare un campo di traslazione di T ; e quindi si può dire che nelle ipotesi del teorema precedente T ammette *almeno* un campo di traslazione.

Questi sono i due soli risultati finora acquisiti nell'ambito del così detto teorema generale di traslazione di BROUWER⁽⁵⁾, del quale si conoscono soltanto tentativi di dimostrazione⁽⁶⁾ e secondo il quale, ad esempio, per un automorfismo T di S , diretto e dotato di due soli punti uniti O_1, O_2 , dovrebbe valere⁽⁷⁾ il seguente teorema:

La trasformazione topologica T ammette sempre un campo di traslazione, cioè un campo di S privo di punti in comune con la propria immagine e delimitato da due curve di Jordan, tali che una conveniente di esse sia l'immagine dell'altra nella T e tali da essere entrambe

1) *o semplici e chiuse e prive di punti in comune* (nel qual caso esse separano entrambe O_1 da O_2);

2) *o semplici e chiuse, passanti o per O_1 , o per O_2 , le due alternative escludendosi a vicenda, e prive di altri punti in comune* (nel qual caso una conveniente di esse separa l'altra rispettivamente o da O_2 , o da O_1);

una classe di trasformazioni del piano in sè, topologiche e dirette, prive di punti uniti [ibidem, vol. VII (1936), pagg. 215-240], pag. 219.

Per la validità del teorema non è affatto necessario che i due intorno ruotati in versi opposti dalla trasformazione siano, in quanto insiemi di punti, invarianti.

⁽⁵⁾ BROUWER, *Über eindeutige, stetige Transformationen von Flächen in sich* [Mathematische Annalen, vol. 69 (1910), pagg. 176-180], pagg. 178-179.

⁽⁶⁾ Cfr., per esempio, v. KERÉKJÁRTÓ, *Note on the general translation theorem of Brouwer* [Atti del Congresso Internazionale dei Matematici del 1928, Zanichelli, Bologna, vol. IV, pagg. 235-238].

⁽⁷⁾ BROUWER, *Continuous one-one transformations of surfaces in themselves* [vol. 12 (1909) dell'edizione inglese dei Rendiconti della R. Accademia delle scienze di Amsterdam, pagg. 286-297], pag. 295; v. KERÉKJÁRTÓ loc. cit. nota precedente, n. 5.

3) o semplici e aperte, aventi O_1 ed O_2 per estremi e prive di altri punti in comune.

Orbene, dagli enunciati finora attribuiti al teorema generale di traslazione non mi sembra risulti in modo chiaro se si debba intendere come impregiudicato che ogni punto di S diverso da O_1 e O_2 sia interno ad un campo di traslazione del tipo 1), o 2), o 3); o se non piuttosto, che ogni tal punto risulti sempre interno ad un tal campo, analogamente a quanto accade nell'ipotesi dell'esistenza di un solo punto unito ⁽⁸⁾. Non sarà quindi

⁽⁸⁾ v. KERÉKJÁRTÓ (loc. cit. ⁽⁶⁾, n. 5) scrive:

«... The construction leads either to a transformation-field which is periodic and has for boundary two curves corresponding on the surface F to two closed curves, or else to a transformation-field bounded by two open curves, both converging in the two directions to two invariant points (which may coincide)».

Questi *transformation-fields* sono dei campi di traslazione del tipo 1), 2), 3), se F è una superficie sferica e se i punti uniti sono due.

Subito dopo v. KERÉKJÁRTÓ aggiunge:

«The result obtained in this way forms the content of the general translation theorem of BROUWER enounced by him in *Mathem. Annalen* (vol. 69, p. 178) but not yet proved. This theorem contains evidently as special case the plane translation theorem of BROUWER and the last geometric theorem of POINCARÉ».

dei quali il primo coincide col primo teorema dell'introduzione di questa mia Nota e l'altro, relativo ai punti uniti in un automorfismo di una corona circolare, è contenuto nel secondo della stessa introduzione, se si prescinde dal fatto che nelle ipotesi di POINCARÉ vi sono almeno dei punti invarianti distinti, come BIRKHOFF ha stabilito.

Ora BROUWER, che nel passo cit. in ⁽⁷⁾ affermava soltanto che

«An arbitrary continuous one-one transformation of a twosided surface in itself with invariant indicatrix possesses a transformation domain, which either breaks the connection of the surface, or joins two point invariant for the transformation».

nel passo ricordato da v. KERÉKJÁRTÓ e posteriore a quello ora riprodotto, dice:

«... Sodann konstruiren wir zu einem willkürlichen nicht invarianten Punkt der Fläche ein diesen Punkt enthaltendes Transformationsfeld».

Anche BROUWER specifica la struttura di un *Transformationsfeld* in maniera che, se non mi inganno, nel caso di un automorfismo di una sfera, diretto e dotato di due punti uniti, un «campo di trasformazione» è sempre un campo di traslazione dei tipi 1), 2), 3).

Va da sè che non intendo escludere ogni contenuto di verità dal pen-

forse inutile mostrare su di un esempio che quest'ultima alternativa non corrisponde alla realtà delle cose, costruendo un automorfismo di S che, soddisfacendo alle ipotesi del teorema formulato per secondo, ammette almeno un campo di traslazione del tipo 1), ma non un campo di traslazione contenente un punto prefissato ad arbitrio.

Prima di procedere a questa costruzione (che sarà data nei nn. 3-6) farò vedere (nn. 1 e 2) che i campi del tipo 1) e 2) godono effettivamente delle proprietà specificate fra parentesi.

1. - Supponiamo dunque che esista un campo di traslazione del tipo 1), delimitato cioè da una curva semplice e chiusa j e dalla sua immagine j^1 , j e j^1 essendo prive di punti in comune e quindi non passando nè per O_1 nè per O_2 .

Allora, se j separa O_1 da O_2 , lo stesso accade anche per j^1 - infatti j^1 separa le immagini di O_1 e O_2 , ma questi punti sono uniti -; e viceversa.

Supponiamo allora che O_1 e O_2 non siano separati mediante j e diciamo J quello dei due campi di S delimitati da j che non contiene O_1 ed O_2 , I l'altro; J^1 ed I^1 abbiamo lo stesso ufficio nei riguardi di j^1 ; di guisa che J^1 è l'immagine di J ed I^1 quella di I , perchè I ed I^1 contengono O_1 ed O_2 che sono uniti in T .

Allora si riconosce subito che j^1 non può essere contenuta in J ; perchè altrimenti anche J^1 apparterebbe a J , l'insieme $J + j$ sarebbe mutato da T in una sua porzione e, per un altro teorema di BROUWER⁽⁹⁾, T ammetterebbe almeno un punto unito in $J + j$ (anzi interno a $J + j$) e quindi avrebbe almeno tre punti uniti distinti. Del pari si riconosce che j non appartiene a J^1 .

Ne segue che, se j non separa O_1 da O_2 , j appartiene ad I^1 e j^1 ad I .

Due sono allora⁽¹⁰⁾ gli insiemi aperti di S che hanno per

siero di BROUWER e v. KERÉKJÁRTÓ; tuttavia mi sembra che l'interpretazione esatta delle loro affermazioni conduca precisamente al teorema che mi propongo di inficiare nella Nota presente.

⁽⁹⁾ BROUWER, *Über Abbildung von Mannigfaltigkeiten* [Mathematische Annalen, vol. 71 (1912), pag. 97-115], pag. 115.

⁽¹⁰⁾ Le cose che diremo ora e nel numero seguente sono del tutto evidenti se si esegue la proiezione stereografica di S sul piano ad essa tangente in O_1 .

completa frontiera $j + j^1$: la somma di J e J^1 e l'intersezione (non vuota poichè contiene O_1 ed O_2) di I ed I^1 . Ma di questi il primo non è connesso, e quindi non è un campo, il secondo ha in comune con la propria immagine O_1 ed O_2 , e quindi non è un campo di traslazione.

Vale a dire, se le due curve j e j^1 delimitano un campo di traslazione, esse separano O_1 da O_2 , come volevasi dimostrare.

2. — Supponiamo ora che esista un campo di traslazione del tipo 2), delimitato dalle due curve j e j^1 (j^1 essendo al solito l'immagine di j) che potremo supporre passanti per O_1 .

Sia allora I quello dei due campi delimitati su S da j che contiene O_2 ; I^1 abbia un significato analogo per j^1 , di guisa che I^1 è l'immagine di I ; anche il significato da dare a J e J^1 è palese; J^1 sarà ancora l'immagine di J .

Se delle due curve j e j^1 nessuna è separata mediante l'altra da O_2 — se cioè non è verificata nessuna delle due eguaglianze $(J + j) \cdot j^1 = j^1$, $(J^1 + j^1) \cdot j = j$ —, ogni punto di j diverso da O_1 appartiene a I^1 , mentre ogni punto di j^1 diverso da O_1 appartiene a I ; cioè J è contenuto in I^1 e J^1 in I .

Due sono allora gli insiemi aperti di S che hanno per completa frontiera $j + j^1$; la somma $J + J^1$ e l'intersezione (non vuota perchè contiene O_2) di I e I^1 ; ecc...

3. — Nello spazio reale ed euclideo a tre dimensioni sia x, y, z la terna di assi di un sistema di coordinate ortogonali; sia S la sfera di equazione

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2;$$

e sia T un automorfismo di S che muti in se stesse e la zona C dei punti di S per cui

$$-1 \leq z \leq 1$$

e le due calotte C_1 e C_2 dei punti di S per cui, rispettivamente,

$$z \leq -1, \quad z \geq 1.$$

Supponiamo che T faccia ruotare in versi opposti e di un angolo costante, per esempio uguale a π in valore assoluto, i due paralleli $p_1 = C \cdot C_1$ e $p_2 = C \cdot C_2$ che delimitano C ; C_1 e C_2

siano da T ruotate rigidamente (in versi opposti e di un angolo uguale a π) intorno all'asse x . I due punti $O_1 \equiv (0, 0, -2)$ ed $O_2 \equiv (0, 0, 2)$ risultano allora uniti; supponiamo che siano i soli ad esserlo, per il che occorre e basta che non vi siano punti uniti nella zona C .

Allora esiste sempre almeno un campo di traslazione del tipo 1) contenuto in $C^{(1)}$; ma, come vedremo, T non ammette campi di traslazione dei tipi 2) e 3) ed ogni campo del tipo 1) è contenuto nella zona C ; di guisa che non è affatto vero che ogni punto di S sia interno ad un campo di traslazione.

4. - Campi di traslazione del tipo 3) non ne esistono, perchè p_1 e p_2 sono ruotati in versi opposti e quindi ogni curva semplice che incontri entrambi questi paralleli incontra anche la propria immagine.

Da questa circostanza si deduce anzi che ogni campo di traslazione di T è per intero contenuto o in $C \dot{+} C_1$, o in $C \dot{+} C_2$.

Dal fatto che T conserva le misure delle porzioni (misurabili) di C_1 e C_2 segue subito che un campo di traslazione (dei tipi 1) e 2)) non può essere contenuto per intero in C_1 , o in C_2 , come dimostreremo sebbene ciò sia implicitamente contenuto anche in quanto diremo nei numeri seguenti.

L'affermazione è presso che evidente per quel che riguarda i campi del tipo 2); infatti, se esiste un simile campo in C_1 (per C_2 si procederebbe in maniera analoga, e sia detto una volta per tutte), in C_1 esiste manifestamente anche un insieme che ha una misura diversa da quella della sua immagine - l'insieme che nel n. 2 è stato indicato con J -, il che è assurdo.

Se in C_1 esiste un campo del tipo 1) delimitato dalle due curve j e j^1 , j^1 immagine di j , diciamo J il campo di S delimitato da j che contiene O_1 e un significato analogo diamo a J^1 . Allora J e J^1 contengono entrambi O_1 ; J^1 è l'immagine di J (ed è al pari di J contenuto in C_1), di guisa che la sua misura coincide con quella di J . Ma tutte queste condizioni sono incompatibili con l'ipotesi che l'intersezione $j \cdot j^1$ sia vuota, quindi, ecc...

(1) Loc. cit. nota (4).

5. - Con ciò abbiamo dimostrato che un qualunque campo di traslazione di T deve avere una parte in comune con C ed è o del tipo 1), o del tipo 2). Ma ora vedremo che esso è del tipo 1) e fa parte di C .

Possiamo naturalmente limitarci a considerare i campi di traslazione contenuti in $C \dot{+} C_1$, per quelli contenuti in $C \dot{+} C_2$ potendosi procedere in maniera perfettamente analoga.

Sia K un tal campo; K sia del tipo 1) e delimitato dalle due curve semplici e chiuse j e j^1 , j^1 essendo l'immagine di j nella T , secondo una convenzione ormai familiare che d'ora in poi sarà tacitamente seguita.

Diciamo J il campo di S delimitato da j e contenente O_1 ; allora anche J^1 contiene O_1 . Senza imporre limitazioni essenziali possiamo supporre che J^1 sia contenuto in J (nel caso contrario, basterebbe sostituire T^{-1} a T), di guisa che ogni punto di $\bar{J}^1 = J^1 + j^1$ è interno a $\bar{J} = J + j$.

Ammettiamo ora che K appartenga sì a $C \dot{+} C_1$ ma non sia contenuto per intero in C ; vale a dire, ammettiamo che vi siano dei punti di j interni a C_1 - infatti, se j appartiene a C , anche j^1 e quindi K appartengono a C .

Diciamo J_0 il campo dei punti di S che si possono unire ad O_1 mediante una curva semplice e aperta tracciata su S che non incontri nè p_1 nè j . Come è noto⁽¹²⁾, questo campo è delimitato da una curva semplice e chiusa, $j_0 \subset p_1 \dot{+} j$, che è evidentemente contenuta in C_1 , ma che, per l'ipotesi fatta su j , non può coincidere con p_1 : di guisa che vi saranno punti di j_0 che appartengono a j e sono interni a C_1 .

Consideriamo le immagini j_0^1 e J_0^1 di j_0 e J_0 .

Dico che J_0^1 appartiene a J_0 .

Infatti ogni punto P di J_0 si può unire ad O_1 mediante una curva l semplice e aperta di estremi O_1 e P che ha tutti i suoi punti entro J_0 e quindi nell'interno di C_1 e J . Indi anche l^1 ha tutti i suoi punti entro J_0 ; infatti l^1 ha un estremo in O_1 mentre dall'invarianza di p_1 e da $l \cdot p_1 = 0$, segue $l^1 \cdot p_1 = 0$;

(12) Cfr. il n. 4 della mia Nota: *Qualche teorema sulle curve di Jordan* [Rendiconti della Reale Accademia Nazionale dei Lincei, serie VI, vol. 23 (1936), pagg. 181-186].

inoltre dall'ipotesi che \bar{J}^1 sia interno a \bar{J} segue $l \cdot j^{-1} = 0$, e quindi $l \cdot j = 0$. Ma allora P^1 è al pari di P un punto di J_0 .

Indi anche $\bar{J}_0^1 = J_0^1 + j_0^1$ appartiene a $\bar{J}_0 = J_0 + j_0$.

Sia ora R un punto di j_0 interno a C_1 e quindi contenuto in j . Allora R^1 è ancora interno all'insieme invariante C_1 e non appartiene a j^1 , perchè $j \cdot j^1 = 0$; vale a dire, poichè $j_0 \subset p_1 + j$, vi sono dei punti di j_0^1 che non appartengono a j_0 e quindi sono interni a \bar{J}_0 , dato quanto precede.

Ma allora \bar{J}_0 è una porzione di C_1 la cui misura non è invariante di fronte alla T . E l'assurdo cui siamo pervenuti dimostra che ogni campo del tipo 1) è contenuto in C .

6. - Ci rimane da escludere che possano presentarsi campi del tipo 2), contenuti in $C + C_1$.

Sia, eventualmente, K un tal campo; diciamone j e j^1 le due curve, passanti per O_1 , che lo delimitano; J e J^1 siano i campi di S rispettivamente delimitati da queste curve che non contengono O_2 e supponiamo (v. n. 2) che J contenga J^1 , come è lecito perchè nel caso contrario basterebbe dare il ruolo di T a T^{-1} ; allora ogni punto di $\bar{J}^1 = J^1 + j^1$ è interno a $\bar{J} = J + j$, eccezion fatta per O_1 .

Sia O' un punto di J interno a C_1 che si possa unire ad O_1 mediante una curva semplice ed aperta di estremi O_1 ed O' tale che ogni suo punto diverso da O_1 appartenga a J e non a p_1 . Un punto quale O' esiste di certo.

Sia J_0 il campo dei punti di S che si possono unire ad O' con una curva semplice, aperta, priva di punti comuni con p_1 e j .

Allora J_0 è delimitato ⁽¹³⁾ da una curva semplice e chiusa $j_0 \subset p_1 + j$ che passa evidentemente per O_1 e che anzi nell'intorno di O_1 coincide con j ; ed J_0 si può anche definire come il campo dei punti di S che si possono unire con O_1 mediante una curva semplice e aperta che non incontri p_1 e che a meno di O_1 si svolga in J ⁽¹⁴⁾.

⁽¹³⁾ Loc. cit. nota precedente.

⁽¹⁴⁾ Il punto O' è stato considerato solo per rendere più immediata l'applicazione del teorema ricordato in ⁽¹²⁾.

Si noti che le affermazioni fatte nei riguardi di J_0 e O_1 sono evidenti

Dico che J_0^1 appartiene a J_0 .

Infatti ogni punto P di J_0 si può unire ad O_1 mediante una curva semplice ed aperta l che non incontra mai p_1 e, tolto l'estremo O_1 , si svolge tutta entro J . Indi l^1 parte da O_1 , non incontra p_1 e tolto l'estremo O_1 , si mantiene in J^1 cioè in J , perchè J contiene J^1 ; ma allora P^1 , che è un punto arbitrario di J_0^1 , appartiene a J_0 .

Ne segue che $\bar{J}_0^1 = J_0^1 + j_0^1$ appartiene a $\bar{J}_0 = J_0 + j_0$.

Sia ora R un punto di j interno a C_1 , diverso da O_1 ma sufficientemente prossimo ad O_1 per essere un punto di j_0 ; allora R^1 è un punto di j_0^1 che non appartiene a p_1 perchè interno a C_1 e non a j perchè $j \cdot j^1 = O_1$, $R^1 \neq O_1$; quindi j_0^1 contiene punti che non appartengono a j_0 (perchè $j_0 \subset p_1 + j$), cioè contiene dei punti interni a \bar{J}_0 .

Ma allora \bar{J}_0 è una porzione di C_1 la cui misura non è invariante di fronte alla T ; e l'assurdo a cui siamo pervenuti dimostra che T non ammette campi di traslazione del tipo 2), come appunto volevamo dimostrare.

se si suppone (come è lecito, previo un eventuale omeomorfismo) che j sia una circonferenza.

Roma
