

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

ENEA BORTOLOTTI

**Nuova esposizione, su basi geometriche, del calcolo
assoluto generalizzato dei vitali, e applicazione alle
geometrie riemanniane di specie superiore**

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 2 (1931), p. 164-212

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1931__2__164_0>

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1931, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

NUOVA ESPOSIZIONE, SU BASI GEOMETRICHE,
DEL CALCOLO ASSOLUTO
GENERALIZZATO DEL VITALI,
E APPLICAZIONE ALLE GEOMETRIE RIEMANNIANE
DI SPECIE SUPERIORE.

di ENEA BORTOLOTTI *a Cagliari*

P A R T E I I ^a

LE GEOMETRIE RIEMANNIANE DI SPECIE SUPERIORE

CAP. 1° - Geometria intrinseca di una V_m nel gruppo
delle applicabilità di specie m .

10. - Applicabilità o deformazioni di specie m . Condizioni per l'applicabilità di specie m . Veniamo ad applicare i risultati finora ottenuti allo studio delle proprietà metriche di una varietà riemanniana in cui interviene, insieme ad un punto generico, il suo *intorno di ordine m* sulla varietà, e precisamente, per ora, *allo studio delle varietà riemanniane nel gruppo delle applicabilità (o deformazioni) di specie m qualunque.*

Rammenterò che, secondo il BOMPIANI ⁽³⁵⁾, si dicono *deformazioni di specie m* di una varietà riemanniana V_m in R_N le trasformazioni di questa che lasciano invariati l'elemento

⁽³⁵⁾ Ved. **11**, 1916, p. 628. Ved. anche **7**, 1914, p. 131; **9**, p. 1193; **12** p. 509; **31**, p. 388; **15**.

lineare e le curvature (assolute, cioè, relative all'ambiente R_N), fino alla $(m-1)$ -esima inclusa, delle curve tracciate sulla varietà supposta.

Ebbene: condizione necessaria e sufficiente perchè due V_m siano l'una sull'altra applicabili di specie m è che esse possano riferirsi l'una all'altra in modo che, in punti corrispondenti, e secondo elementi d'ordine m (E_m) ⁽³⁶⁾ di due curve corrispondenti che ne escano, in relazione ad una (qualunque) parametrizzazione comune delle due curve ⁽³⁷⁾ risultino eguali i valori delle forme fondamentali complete di specie m delle due varietà (n. prec.). In altre parole: che esista una trasformazione (3) delle coordinate curvilinee tale che, essendo $a_{\alpha, \beta}$ ed $\bar{a}_{\gamma, \delta}$ le componenti, in relazione ai due sistemi coordinati (u^α ed $\bar{u}^\gamma$), dei tensori fondamentali di specie m delle due varietà (n. 2), risulti

$$(130) \quad a_{\alpha, \beta} = \frac{\partial \bar{u}^\gamma}{\partial u^\alpha} \frac{\partial \bar{u}^\delta}{\partial u^\beta} \bar{a}_{\gamma, \delta} \quad (\rho_\alpha, \rho_\beta, \rho_\gamma, \rho_\delta \leq m) \quad (38).$$

In effetto: anzitutto se sussistono le (130) per $\rho_\alpha, \rho_\beta, \rho_\gamma, \rho_\delta \leq m$, tenendo presente che $\frac{\partial \bar{u}^\delta}{\partial u^\alpha} = 0$ per $\rho_\delta > \rho_\alpha$ (form. (6) del n. 1) abbiamo subito che le (130) sussistono anche per $\rho_\alpha, \rho_\beta, \rho_\gamma, \rho_\delta \leq h$, con $1 \leq h \leq m$. Cosicchè se le forme fondamentali complete di specie m , Φ_m e $\bar{\Phi}_m$, sono trasformabili l'una nell'altra, lo stesso avviene (e mediante la stessa trasformazione) per tutte le forme fondamentali complete, Φ_h e $\bar{\Phi}_h$, di specie h , con $1 \leq h \leq m$. Ma conservandosi Φ_1 , cioè il ds^2 , si conservano le lunghezze d'arco, e in relazione a una qualunque

⁽³⁶⁾ Secondo BOMPIANI (5, 1913, p. 395) dico elemento d'ordine m , od E_m , di una curva in un punto l'insieme di questo e degli $S_1, S_2, \dots, S_m$ ivi osculatori alla curva.

⁽³⁷⁾ Data una curva e un suo elemento d'ordine m in un punto, non è corrispondentemente determinato il valore di Φ_m che se si fissa per la curva una parametrizzazione, cioè, se si riferiscono i punti della curva ai valori di un parametro.

⁽³⁸⁾ Cfr., pel caso $n=2$, BOMPIANI, 11, pp. 630 e seg.

parametrizzazione *comune* di due curve omologhe, si conservano lungo queste d^2s , d^3s , ecc. . . .; poichè inoltre si conserva Φ_2 , che calcolata lungo una linea su cui s è la lunghezza d'arco, e $\frac{1}{\rho_1}$ è la prima curvatura, vale $\frac{ds^4}{\rho_1^2} + (d^2s)^2$, si conserva pure $\frac{1}{\rho_1}$; conservandosi anche Φ_3 , ne viene subito che pure la seconda curvatura, $\frac{1}{\rho_2}$, non è alterata dalla trasformazione supposta; infine questa conserva tutte le curvature della linea supposta fino alla $(m-1)$ -esima inclusa, e quindi è una applicabilità di specie m .

Viceversa, se una supposta trasformazione della varietà è una applicabilità di specie m , due curve omologhe γ , $\bar{\gamma}$ qualunque risultano fra loro riferite per uguaglianza d'arco, ed hanno pure, in punti corrispondenti, eguali le curvature prime, seconde, . . . , $(m-1)$ -esime, e (in generale) non le m -esime. Allora in punti corrispondenti e secondo direzioni corrispondenti risultano eguali le forme Φ_1 ; preso (per semplicità) come parametro su ciascuna delle due curve considerate la lunghezza d'arco, secondo E_2 corrispondenti risultano eguali le forme Φ_2 , e così via, fino alle Φ_m che risultano eguali, mentre ciò in generale non può dirsi delle Φ_{m+1} .

Dunque la forma fondamentale completa di specie m , Φ_m , può stare a base di una *geometria intrinseca di specie m* , geometria delle proprietà invarianti per le *applicabilità di specie m* : come nel caso ben noto $m=1$ ⁽³⁹⁾. Tali proprietà potranno tutte esprimersi mediante i coefficienti di Φ_m , e viceversa, ogni proprietà intrinseca della V_m che ammetta una rappresentazione analitica in cui figurino le sole $a_{\alpha, \beta}$ (ρ_α , $\rho_\beta \leq m$) (e loro derivate) sarà una proprietà intrinseca di specie m .

Ma prima di venire ad occuparci di queste proprietà premettiamo alcune considerazioni circa la *determinazione intrinseca* di una varietà nel gruppo delle applicabilità di specie m .

(39) Le applicabilità di specie 1 sono, naturalmente, le ordinarie applicabilità (metriche).

Le $E_{r_1 r_2 \dots r_h, s_1 s_2 \dots s_h}$ sono componenti di tensori d'ordine $2h$ (a indici di classe 1) simmetrici rispetto ad $r_1 r_2 \dots r_h$ e ad $s_1 s_2 \dots s_h$. Ma nelle (131) a tali tensori conviene sostituire i tensori ottenuti *mischiando* rispetto a tutti gli indici: *le componenti di questi* saranno da considerare come i coefficienti delle corrispondenti forme φ_{2h} . Per individuare la V_n nel gruppo delle applicabilità di specie m si dovranno dunque assegnare (in relazione a un supposto sistema coordinato) tali coefficienti

$$(136) \quad F_{r_1 r_2 \dots r_h, s_1 s_2 \dots s_h} = F_{r_1 r_2 \dots r_h, s_1 s_2 \dots s_h},$$

in numero di $\binom{n+2m-1}{2m}$. Però se $h > 1$ tali coefficienti $F_{r_1 r_2 \dots r_h, s_1 s_2 \dots s_h}$ non si potranno assegnare *tutti ad arbitrio*, perchè fra di essi sussistono delle relazioni necessarie; conseguenza delle relazioni fra le $a_{\alpha, \beta}$ ($\rho_\alpha, \rho_\beta \leq m$) di cui diremo fra breve (n. seg.).

Abbiamo già osservato (all'inizio del n. 2) come i coefficienti $a_{\alpha, \beta}$ delle forme fondamentali complete per il caso ($n=2$) delle superficie non differiscano che per la notazione dai simboli $I_{hk, h_1 k_1}$ di E. E. LEVI (2, p. 8) o $[hk h_1 k_1]$ del BOMPIANI (11, p. 629). Già il BOMPIANI aveva osservato (11, p. 630 e seg.) che una superficie può individuarsi a meno di deformazioni di specie m mediante i corrispondenti simboli $[hk h_1 k_1]$ ⁽⁴²⁾, e anzi, appunto per effetto di certe relazioni che sussistono fra questi, mediante l'assegnazione di alcuni soltanto di questi simboli, di quelli che egli chiama i simboli *fondamentali* (11, p. 632). Di

possono intervenire, oltre ai *moduli*, anche le *direzioni* dei vettori di curvatura normale. In questo senso va certamente intesa una affermazione del CARTAN circa la forma φ_1 (23, 1925, p. 46, cfr. p. 44).

⁽⁴²⁾ Il LEVI si vale invece dei simboli $I_{hk, h_1 k_1}$ per il problema della determinazione di una superficie di R_N nel gruppo dei movimenti di R_N . Ma questo problema non è, in sostanza, che un caso particolare di quello poi studiato dal BOMPIANI e qui ripreso in considerazione: in quanto, per m sufficientemente grande, le deformazioni di specie m di una superficie (o varietà) entro un ambiente euclideo di assegnata dimensione N si riducono ai movimenti.

questi ultimi egli si serve per formare un sistema di forme differenziali del 1° ordine e dei gradi $2, 4, \dots, 2m$ ("forme fondamentali di specie $1, 2, \dots, m$ "); invarianti per deformazione di specie m ma non per trasformazione delle coordinate curvilinee. In un secondo tempo (ved. **15**, Nota 1, 1919, p. 256) il BOMPIANI ha sostituito a quello ora detto un altro sistema di forme differenziali, $L_1^2, L_2^2, \dots, L_m^2$, pure del 1° ordine e dei gradi $2, 4, \dots, 2m$, come le precedenti atte a individuare la superficie nel gruppo delle applicabilità di specie m , ma invarianti anche pei mutamenti delle coordinate curvilinee: appunto come le nostre $\varphi_2, \varphi_4, \dots, \varphi_{2m}$.

È a priori prevedibile che fra le $L_1^2, L_2^2, \dots, L_m^2$ e le $\varphi_2, \varphi_4, \dots, \varphi_{2m}$ abbiano a sussistere semplici relazioni: in effetto si ha

$$(137) \quad L_m^2 = \left(\frac{1}{m!} \right)^2 \varphi_{2m}$$

come si vede, nel modo più semplice, paragonando il significato geometrico (poco sopra notato) delle nostre φ_{2h} con quello indicato dal BOMPIANI per le forme L_h^2 ($h = 1, 2, \dots, m$) ⁽⁴³⁾.

11. - *Condizioni necessarie per l'esistenza di una varietà, della quale sia assegnata la m -esima forma fondamentale completa Φ_m .* Torniamo al caso generale (n qualunque). Abbiamo accennato, poco sopra, all'esistenza di relazioni necessarie fra i coefficienti delle forme fondamentali semplici φ_{2h} , $h = 1, 2, \dots, m$, o della forma completa Φ_m : per effetto delle quali (come del resto è a priori prevedibile) non è lecito assegnare le forme φ_{2h} oppure Φ_m in modo del tutto arbitrario.

Precisamente: perchè una forma differenziale quadratica d'ordine m , $\Phi_m = a_{\alpha, \beta} \delta^m u^\alpha \delta^m u^\beta$, sia la m -esima forma fon-

⁽⁴³⁾ La forma L_h^2 esprime il quadrato della distanza di un punto della superficie, preso nell'intorno di ordine h di un punto P , dallo spazio $(h-1)$ -oscultore alla superficie in P .

Alle nostre $\varphi_2, \varphi_4, \dots, \varphi_{2m}$ sono pure equivalenti quelle che W. MAYER chiama "die Formenquadrate", : $I_1, I_2, \dots, I_m$ (ved. **100**, pp. 205 e 219, e ulteriore bibliogr. a p. VI). Precisamente, si ha $\varphi_{2h} = ds^{2h} I_h$.

damentale completa di una V_n è condizione necessaria che le $a_{\alpha, \beta}$ ($\rho_\alpha, \rho_\beta \leq m$) soddisfino alle seguenti relazioni differenziali ⁽⁴⁴⁾:

$$(138) \quad \left\{ \begin{array}{l} a) \quad \frac{\partial a_{\lambda, \mu}}{\partial u^r} - a_{\lambda r, \mu} - a_{\lambda, \mu r} = 0 \quad \rho_\lambda, \rho_\mu \leq m-1 \\ \\ b) \quad \frac{\partial a_{\lambda, \kappa r}}{\partial u^s} - \frac{\partial a_{\lambda, \kappa s}}{\partial u^r} + a_{\kappa s, \lambda r} - a_{\kappa r, \lambda s} = 0 \\ \quad \rho_\lambda \leq m-1; \quad \rho_\kappa = m-1 \\ \\ c) \quad \frac{\partial a_{\kappa s, \pi t}}{\partial u^r} + \frac{\partial a_{\kappa t, \pi r}}{\partial u^s} + \frac{\partial a_{\kappa r, \pi s}}{\partial u^t} - \frac{\partial a_{\kappa t, \pi s}}{\partial u^r} - \\ - \frac{\partial a_{\kappa r, \pi t}}{\partial u^s} - \frac{\partial a_{\kappa s, \pi r}}{\partial u^t} = 0, \quad \rho_\kappa = \rho_\pi = m-1 \quad (45). \end{array} \right.$$

Infatti si esprime che $a_{\alpha, \beta}$ ($\rho_\alpha, \rho_\beta \leq m$) è il tensore fondamentale di specie m della varietà $P = P(u^1, u^2, \dots, u^n)$ scrivendo

$$(139) \quad \left\{ \begin{array}{l} a) \quad P_\lambda \times P_\mu - a_{\lambda, \mu} = 0 \quad \rho_\lambda, \rho_\mu \leq m-1, \\ \\ b) \quad P_\lambda \times P_{\kappa s} - a_{\lambda, \kappa s} = 0 \quad \rho_\lambda \leq m-1, \quad \rho_\kappa = m-1 \\ \\ c) \quad P_{\kappa r} \times P_{\pi s} - a_{\kappa r, \pi s} = 0 \quad \rho_\kappa = \rho_\pi = m-1. \end{array} \right.$$

⁽⁴⁴⁾ Cfr. (per caso $n=2$) LEVI, **2**, pp. 11-17; BOMPIANI, **11**, pp. 630-633; ove sono indicate relazioni che rientrano fra le (138) a) e b). Le "condizioni di compatibilità degli I in termini finiti", del LEVI (**2**, pp. 9-11) non hanno qui riscontro, come è naturale, in quanto esse si presentano soltanto quali condizioni perchè i σ_n osculatori alla superficie abbiano un numero assegnato di dimensioni (o in particolare, perchè la superficie esista in un ambiente euclideo di cui è assegnato il numero delle dimensioni). A queste condizioni avremo occasione d'accennare più oltre: sono le $L_{n, N}$ del n. 15, esprimenti che la caratteristica della matrice $\|a_{\alpha, \beta}\|$ non supera un numero assegnato N .

⁽⁴⁵⁾ Le formole (138) sono riportate anche nella Nota preventiva **92**: sono in questa le (31) di p. 473, ove va corretto un evidente errore di stampa. (V'è fatto uso del simbolo $\frac{d}{du^r}$ al luogo di $\frac{\partial}{\partial u^r}$).

Ora: le (138) si hanno agevolmente *quali conseguenze differenziali delle* (139), supposte soddisfatte.

Anche per altre vie si giunge alle equazioni (138), che appaiono fondamentali nella presente teoria: otteniamo facilmente le (138) *b)* e *c)* quali *condizioni necessarie e sufficienti perchè le espressioni dei simboli di CHRISTOFFEL generalizzati* $C_{\tau, \alpha}$ ($\rho_\tau \leq m+1$, $\rho_\alpha \leq m$) *date dalle* (82) e (84) n. 6, *e corrispondenti alle diverse permutazioni delle cifre di* τ , *o di* α , *siano tutte fra loro equivalenti.*

Inoltre: le (138) *a)* *b)* e *c)* si ottengono pure eliminando, dalle equazioni esprimenti il lemma di RICCI generalizzato ((101) n. 7, od (80) n. 6),

$$(140) \quad -\frac{\partial a_{\alpha, \beta}}{\partial n^r} = C_{\alpha r, \beta} + C_{\alpha, \beta r} \quad \rho_\alpha, \rho_\beta \leq m,$$

tutti i simboli di CHRISTOFFEL generalizzati mediante le loro espressioni (81), (82), (84). Cosicchè:

Dato il tensore covariante, a due indici di classe m , $a_{\alpha, \beta}$, *e definiti mediante le* (81), (82), (84) *i relativi simboli di CHRISTOFFEL* $C_{\tau, \alpha}$, *le* (138) *sono condizioni necessarie e sufficienti perchè detti simboli (e quindi anche, il corrispondente calcolo assoluto) risultino univocamente determinati, e insieme perchè sussistano, pel supposto tensore* $a_{\alpha, \beta}$, *le formule di RICCI generalizzate, (140) o (101).*

Infine, come vedremo al n. 15 (cfr. anche n. 12) le (138) *b)* e *c)* (o le equivalenti equazioni invariantive (166) *b)* e *c)* del n. 12) si ottengono come caso particolare delle equazioni di GAUSS generalizzate (le (203) del n. 15); anzi le (138) *b)* e *c)*, insieme a combinazioni lineari delle (138) *a)*, sono tutte e sole ⁽⁴⁶⁾ *le relazioni fra le sole* $\alpha_{\alpha, \beta}$ *che si possono ricavare dalle equazioni fondamentali (di GAUSS, di CODAZZI, di KÜHNE generalizzate) esprimenti le condizioni necessarie e sufficienti per*

⁽⁴⁶⁾ Ciò se si fa astrazione dalle relazioni $L_{\alpha, N}$ in termini finiti già menzionate in una nota precedente, ⁽⁴⁴⁾. (Ved. n. 15).

l'esistenza di una varietà di R_N per la quale il tensore $\alpha_{\alpha, \beta}$ e certi altri enti ($A_{i, \nu}, \omega_{\tau}^i$: ved. n. 15) siano assegnati.

Concludendo, le (138) si presentano quali condizioni *necessarie e sufficienti* perchè sul tensore $\alpha_{\alpha, \beta}$ si possa basare un calcolo differenziale assoluto, del tipo generale che abbiamo studiato nella Parte I: e quali condizioni *almeno necessarie* perchè tale tensore (come tensore fondamentale di specie m) e tale calcolo assoluto *siano suscettibili di una effettiva realizzazione geometrica*, su di una corrispondente V_n , immersa in uno spazio euclideo a un numero convenientemente grande di dimensioni. (O, se si vuole, nello *spazio hilbertiano*).

L'interesse delle (138) aumenterebbe assai se si potesse affermare che esse sono pure condizioni *sufficienti* per l'esistenza di una V_n su cui $\alpha_{\alpha, \beta}$ sia il tensore fondamentale di specie m , entro uno spazio euclideo a un numero convenientemente grande di dimensioni: di questa proprietà, pel caso generale, non posseggo fino ad ora una dimostrazione soddisfacente.

Vi è un caso assai particolare, ma non del tutto privo d'interesse, in cui il teorema certo sussiste: il caso ($n=1$) delle curve ⁽⁴⁷⁾. In questo caso le (138) *b*) e *c*) si riducono ad identità; e modificate opportunamente le notazioni con lo scrivere u al luogo di n^1 , e (cfr. 40, p. 1204) $P_{[a]}$ al luogo di

$$P_{11\dots 1} = \frac{\partial'' P}{\partial u^a} (a \leq m), \quad a_{[a, b]} \text{ per } P_{[a]} \times P_{[b]}, \quad (a, b \leq m), \text{ le}$$

(138) *a*) prendono la seguente forma:

$$(141) \quad \frac{\partial \alpha_{[c, d]}}{\partial u} = a_{[c+1, d]} + a_{[c, d+1]}, \quad (c, d \leq m-1).$$

Ora: se sono assegnate a priori le $a_{[a, b]}$, ($a, b \leq m$), le (141) sono condizioni necessarie e sufficienti perchè possa costruirsi in R_N , $N \geq m$, una corrispondente curva sulla quale $\alpha_{[a, b]}$ sia il tensore fondamentale di specie m , si abbia cioè

⁽⁴⁷⁾ Allo studio metrico differenziale delle curve di R_N mediante il calcolo assoluto generalizzato del VITALI è dedicata una ricerca di ALIPRANDI (40). Ved. anche VITALI, 65, pp. 214-222.

$$(142) \quad P_{[a]} \times P_{[b]} = a_{[a, b]}, \quad (a, b \leq m).$$

La dimostrazione è agevole. Posto $a_{[a, b]}(u_0) = a_{[a, b]}^0$, essendo $N > m - 1$ in infiniti modi possiamo determinare in R_N $m - 1$ vettori $P_{[1]}^0, P_{[2]}^0, \dots, P_{[m-1]}^0$ pei quali si abbia

$$(143) \quad P_{[c]}^0 \times P_{[d]}^0 = a_{[c, d]}^0, \quad c, d \leq m - 1;$$

ricaviamo poi dalle

$$(144) \quad P_{[a]} \times P_{[m]} = a_{[a, m]}, \quad a \leq m,$$

risolte rispetto a $P_{[m]}$, un sistema differenziale d'ordine m in $P(u)$; la soluzione di questo sistema che soddisfa alle condizioni iniziali

$$(145) \quad P(u_0) = P^0, \quad P_{[1]}(u_0) = P_{[1]}^0, \dots, P_{[m-1]}(u_0) = P_{[m-1]}^0$$

(ove P^0 è un punto arbitrario di R_N) soddisfa anche a tutte le (142).

Ho accennato alle linee di questa dimostrazione, relativa al caso assai elementare $n = 1$, m qualunque, perchè penso che una opportuna generalizzazione di questo procedimento dimostrativo e ad un tempo di quello analogo, seguito per l'altro caso particolare $m = 1$, n qualunque (cioè, pel così detto teorema di SCHLÄFLI) dal JANET (ved. **28**, 1926; cfr. CARTAN, **30**, 1927) possa forse condurre a stabilire in generale la sufficienza delle (138) per l'esistenza di una varietà corrispondente a un assegnato tensore $a_{\alpha, \beta}$.

Una dimostrazione di questo tipo, soggetta veramente a certe restrizioni ⁽⁴⁸⁾, ho potuto ottenere per il caso $n = 2$, $m = 2$. Se $m = 2$ le (138) si scrivono

⁽⁴⁸⁾ Anche nella dimostrazione di JANET appaiono restrizioni analoghe (**28**, p. 42); che però sono inessenziali, e in effetto possono togliearsi. (Ved. CARTAN, **30**). È presumibile che lo stesso possa dirsi per le restrizioni qui sopra accennate.

$$(146) \left\{ \begin{array}{l} a) \quad \frac{\partial a_{s,t}}{\partial u^r} - a_{sr,t} - a_{tr,s} = 0, \\ b) \quad \frac{\partial a_{rs,p}}{\partial u^t} - a_{rs,pt} = \frac{\partial a_{st,p}}{\partial u^r} - a_{st,pr} = \frac{\partial a_{tr,p}}{\partial u^s} - a_{tr,ps}, \\ c) \quad \frac{\partial a_{rs,pq}}{\partial u^t} + \frac{\partial a_{rq,pt}}{\partial u^s} + \frac{\partial a_{rt,ps}}{\partial u^q} - \frac{\partial a_{rq,ps}}{\partial u^t} - \\ \quad - \frac{\partial a_{rt,pq}}{\partial u^s} - \frac{\partial a_{rs,pt}}{\partial u^q} = 0; \end{array} \right.$$

se poi *anche* $n = 2$, le (146) *c*) si riducono ad identità; le (146) *a*) sono sei relazioni fra le $a_{\alpha,\beta}$, da cui si possono ricavare, espresse per le $a_{r,s}$, in termini finiti tutte le $a_{rs,t}$ (come del resto è ben naturale, trattandosi degli usuali simboli di CHRISTOFFEL di prima specie):

$$(147) \left\{ \begin{array}{l} a_{11,1} = \frac{1}{2} \frac{\partial a_{1,1}}{\partial u^1}, \quad a_{12,1} = \frac{1}{2} \frac{\partial a_{1,1}}{\partial u^2}, \\ a_{22,1} = \frac{\partial a_{1,2}}{\partial u^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial a_{2,2}}{\partial u^1}, \\ a_{22,2} = \frac{1}{2} \frac{\partial a_{2,2}}{\partial u^2}, \quad a_{21,2} = \frac{1}{2} \frac{\partial a_{2,2}}{\partial u^1}, \\ a_{11,2} = \frac{\partial a_{2,1}}{\partial u^1} - \frac{1}{2} \frac{\partial a_{1,1}}{\partial u^2}; \end{array} \right.$$

le (146) *b*) in forza delle (146) *a*) e delle loro conseguenze differenziali si riducono a una sola relazione fra le $a_{r,s}$ ed $a_{11,22}$, $a_{12,12}$ (che corrisponde alla classica equazione di GAUSS):

$$(148) \quad a_{11,22} - a_{12,12} = \frac{\partial^2 a_{1,2}}{\partial u^1 \partial u^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 a_{1,1}}{\partial (u^2)^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 a_{2,2}}{\partial (u^1)^2}.$$

Le (139) poi nel caso attuale si scrivono

$$(149) \quad P_r \times P_s = a_{r,s}; \quad P_r \times P_{st} = a_{r,st}; \quad P_{rs} \times P_{pq} = a_{rs,pq}, \\ r, s, t, p, q = 1, 2.$$

Ora: tenute presenti le (147) e (148), dalle (149) e dalle loro conseguenze differenziali possiamo ricavare successivamente cinque gruppi di equazioni, che per brevità non staremo a scrivere, ma che indicheremo semplicemente con A, B, C, D, E : esprimenti i prodotti scalari rispettivamente a fianco indicati (in A, B , per le $a_{\alpha, \beta}$ e loro derivate soltanto; in C, D, E anche per derivate di P , le quali in C sono, rispetto ad u^2 , d'ordine non superiore al 1°; in D , d'ordine non superiore al 2°; in E , d'ordine non superiore al 3°):

$$(150) \quad \left\{ \begin{array}{l} A - 1) P_1 \times P_1, \\ \quad \quad 2) P_1 \times P_{11}, \quad P_{11} \times P_{11}; \\ \\ B - 1) P_1 \times P_2, \quad P_2 \times P_2, \quad P_{11} \times P_2, \quad P_{111} \times P_2, \\ \quad \quad 2) P_1 \times P_{12}, \quad P_{12} \times P_{12}, \quad P_{11} \times P_{12}, \quad P_{111} \times P_{12}; \\ \\ C \quad \quad P_1 \times P_{22}, \quad P_2 \times P_{22}, \quad P_{11} \times P_{22}, \quad P_{12} \times P_{22}, \\ \quad \quad P_{22} \times P_{22}, \quad P_{111} \times P_{22}, \quad P_{112} \times P_{22}, \quad P_{1111} \times P_{22}; \\ \\ D \quad \quad P_1 \times P_{222}, \quad P_2 \times P_{222}, \quad P_{11} \times P_{222}, \quad P_{12} \times P_{222}, \\ \quad \quad P_{22} \times P_{222}, \quad P_{111} \times P_{222}, \quad P_{112} \times P_{222}, \quad P_{1111} \times P_{222}, \\ \\ E \quad \quad P_1 \times P_{2222}, \quad P_2 \times P_{2222}, \quad P_{11} \times P_{2222}, \quad P_{12} \times P_{2222}, \\ \quad \quad P_{22} \times P_{2222}, \quad P_{111} \times P_{2222}, \quad P_{112} \times P_{2222}, \quad P_{1111} \times P_{2222}. \end{array} \right.$$

Diamo nelle A, B, C, D un valore iniziale u_0^2 ad u^2 : siano A^0, B^0, C^0, D^0 , le equazioni così ottenute. Dalle A^0 2), considerate come equazioni differenziali nella funzione $P(u^1, u_0^2)$, assunta la A^0 1) come condizione iniziale (per $u^1 = u_0^1$) possiamo ricavare, in infiniti modi purchè sia $N > 2$, la rappresentazione parametrica $P = P^0(u^1)$, di una linea γ tale che il vettore tangente $P_1^0(u^1) = \frac{\partial P^0}{\partial u^1}$, insieme al suo vettore derivato $P_{11}^0(u^1) = \frac{\partial P_1^0}{\partial u^1}$, $P_{11}^0(u^1) = \frac{\partial P_1^0}{\partial u^1}$, soddisfi a tutte le A^0 : otteniamo anche corrispondenti espressioni per $P_{111}^0 = \frac{\partial P_{11}^0}{\partial u^1}, \dots$ Dalle B^0 , poste pei vet-

tori $P_1^0, P_{11}^0, \dots$ le espressioni ora dette, se $N \geq 8$, almeno nelle ipotesi più generali circa le $a_{\alpha, \beta}$ (soltanto soddisfacenti alle (147), (148)) è possibile ricavare due vettori $P_2^0(u^1), P_{12}^0(u^1)$

di R_N tali che sia $P_{12}^0(u^1) = \frac{\partial P_2^0}{\partial u^1}$: e quindi anche $P_{112}^0, \dots$

In generale i sette vettori $P_1^0, P_2^0, P_{11}^0, P_{12}^0, P_{111}^0, P_{112}^0, P_{1111}^0$ di R_N risulteranno lungo γ indipendenti, e si potrà, fatte le sostituzioni, e sempre nell'ipotesi che sia $N \geq 8$, ricavare $P_{22}^0(u^1)$ dalle C^0 . Ancora: in generale questo vettore P_{22}^0 e i sette detti sopra formeranno in R_N ($N \geq 8$) un gruppo di otto vettori indipendenti, e si potrà ricavare dalle D^0 un vettore $P_{222}^0(u^1)$; dalle E , analogamente, un sistema differenziale del 4° ordine, risolubile rispetto alle componenti di $P_{2222}(u^1, u^2)$, per la funzione incognita $P(u^1, u^2)$. La soluzione di questo sistema che soddisfa alle condizioni iniziali

$$(151) \quad P(u^1, u_0^2) = P^0(u^1), \quad P_2(u^1, u_0^2) = P_2^0(u^1),$$

$$P_{22}(u^1, u_0^2) = P_{22}^0(u^1), \quad P_{222}(u^1, u_0^2) = P_{222}^0(u^1)$$

soddisfa a tutte le (149). Dunque: almeno quando non si facciano ulteriori ipotesi circa le $a_{\alpha, \beta}$ ($\rho_\alpha, \rho_\beta \leq 2$) le (147) e (148) risultano condizioni (oltrechè necessarie) sufficienti perchè, in uno spazio euclideo ad almeno 8 dimensioni possa effettivamente costruirsi una superficie per la quale $a_{\alpha, \beta}$ sia il tensore fondamentale di 2° specie.

In altre parole: una superficie generica di R_N euclideo (N comunque grande) è rappresentabile per applicabilità di 2° specie (cioè, con conservazione delle lunghezze d'arco e delle prime curvature) su di uno spazio euclideo ad 8 dimensioni (cioè: su di una conveniente superficie di R_8).

E probabile che ulteriori ipotesi circa le $a_{\alpha, \beta}$ portino soltanto, eventualmente, ad abbassare il numero (8) di dimensioni di questo ambiente euclideo minimo. (Che in casi particolari, assai facilmente costruibili, vi sia effettivo abbassamento, è ovvio).

Su questo argomento mi propongo di tornare (e spero, con risultati più completi e conclusivi) in altro prossimo lavoro.

12. - Proprietà intrinseche di specie m di una V_n riemanniana (geometria intrinseca tangenziale). - Riprendiamo il caso generale (n, m qualunque). Da quanto s'è visto ai nn. prec. (10, 11) ricaviamo che la geometria intrinseca di specie m di una V_n è determinata quando di questa sia assegnato il tensore fondamentale di specie m , tensore simmetrico $a_{\alpha, \beta}$ di σ_m , le cui componenti soddisfano alle condizioni (138). Da un punto di vista analitico, tale geometria è *la teoria degli invarianti della m -esima forma fondamentale completa*, e il corrispondente *calcolo assoluto*, che ha come operatori differenziali $\bar{d}_{(m)}$ e $D_{(m)}$ (nn. 5, 7), ne è il naturale strumento di ricerca.

Rammentiamo che esso è *determinato* dalla conoscenza delle $a_{\alpha, \beta}$, pel fatto, a suo tempo stabilito (n. 6), che queste determinano i valori dei simboli $C_{\tau, \alpha}$ ($\rho_{\tau} \leq m + 1, \rho_{\alpha} \leq m$).

Per bene intendere la vera essenza di questa *geometria intrinseca di specie m* (che diremo, quando occorra distinguerla dalla geometria intrinseca *normale* considerata al n. seg., geometria intrinseca *tangenziale* di specie m per la V_n) conviene riprendere per un momento in esame il caso classico $m = 1$.

Data una X_n , cioè una varietà n -dimensionale, indipendentemente da ogni ipotesi sull'esistenza di un ambiente euclideo R_N in cui la X_n sia immersa, è lecito interpretare geometricamente il fatto analitico, che una qualunque trasformazione sulle coordinate curvilinee u^r induce una trasformazione lineare sui differenziali du^r , *riguardando l'intorno del primo ordine di un punto generico P della X_n come appartenente ad uno spazio affine: lo spazio affine tangente in P alla X_n , E_n^P* (CARTAN).

I vettori (controvarianti o covarianti) della X_n in P sono allora tutti e soli i vettori di E_n^P ; le componenti ξ^r di un vettore controvariante ξ della X_n in P sono le coordinate cartesiane del punto $Q = P + \xi$ di E_n^P nel sistema che ha P come origine, e i vettori di componenti $10 \dots 0, 01 \dots 0, \dots, 00 \dots 1$ come *vettori fondamentali* degli n assi. In questo sistema le du^r sono le coordinate cartesiane del punto P^* della X_n , nell'intorno del 1° ordine di P , avente le coordinate curvilinee $u^r + du^r$.

Se alla X_n si dà una *metrica* riemanniana, cioè, se ne fa una V_n , assegnando un (arbitrario) tensore simmetrico $a_{r,s}$, tale soltanto che sia $|a_{r,s}| \neq 0$, come tensore fondamentale, ossia una forma differenziale quadratica (non specializzata) del 1° ordine, $\Phi_1 = a_{r,s} du^r du^s$, come espressione del ds^2 , si fa anche di ciascuno spazio affine tangente E_n uno spazio euclideo, R_n , e in-

sieme, si viene a determinare, mediante il trasporto per equipollenza di LEVI-CIVITA subordinato a Φ_1 , un raccordo metrico (cioè, una rappresentazione congruente) fra gli spazi euclidei tangenti in punti infinitamente vicini. Si può anche dire, secondo CARTAN, che alla varietà è data una *connessione euclidea* (che chiameremo: *di prima specie*).

Ogni trasformazione puntuale fra due V_n muta gli spazi euclidei tangenti all'una negli spazi euclidei tangenti all'altra: fra di esse le *applicabilità* (di specie 1) sono caratterizzate dal fatto che *esse subordinano delle rappresentazioni congruenti fra spazi affini tangenti in punti omologhi*. Tali rappresentazioni *conservano l'equipollenza* (di prima specie); questa però non è una proprietà *caratteristica* per esse.

Non è difficile ora passare dal caso $m=1$ al caso generale (m qualunque). Si osserverà anzitutto che una trasformazione sulle u^r induce anche sui differenziali l -esimi di PASCAL, $\delta^l u^\lambda$ ($\rho_\lambda \leq l$; $l=2, 3, \dots, m$; ved. n. 9, form. (121) o (124))

una trasformazione lineare, di coefficienti $\frac{\partial u^\lambda}{\partial \bar{u}^\mu}$ ($\rho_\lambda, \rho_\mu \leq l$).

Di più; se, scritto per uniformità $\delta^l u^r$ per du^r , completiamo i sistemi $\delta^l u^\lambda$ ($\rho_\lambda \leq l$), facendone dei sistemi a un indice di classe m , $\delta^l u^\alpha$ ($\rho_\alpha \leq m$) col porre $\delta^l u^\alpha = \delta_\lambda^\alpha \delta^l u^\lambda$, (cioè $\delta^l u^\alpha = 0$ per $l < \rho_\alpha \leq m$ (cfr. n. 8)), abbiamo anche, più in generale, che tutte le $\delta^l u^\alpha$, per $1 \leq l \leq m$, e quindi anche le quantità

$$(152) \quad \xi_{(m)}^\alpha = \delta u^\alpha + \frac{1}{2} \delta^2 u^\alpha + \dots + \frac{1}{m!} \delta^m u^\alpha$$

subiscono una stessa trasformazione lineare, di coefficienti

$\frac{\partial u^\alpha}{\partial \bar{u}^\beta} (\rho_\alpha, \rho_\beta \leq m)$. Se la X_n esiste in un R_N euclideo, per le (120) le $\xi_{(m)}^\alpha$ sono, nello spazio σ_m (m -osculatore alla V_n nel punto P generico) σ_m -componenti controvarianti del vettore $P^* - P = dP + \frac{1}{2} d^2 P + \dots + \frac{1}{m!} d^m P$, e quindi anche, sono le coordinate cartesiane (in σ_m) del punto P^* (che è un qualunque punto della varietà nell'intorno di ordine m di P) in un sistema cartesiano di origine P e avente i vettori P_α ($\rho_\alpha \leq m$) come vettori fondamentali dei v assi ⁽⁴⁹⁾.

Ma indipendentemente dall'esistenza dell'ambiente euclideo, la proprietà sopra notata a proposito delle $\xi_{(m)}^\alpha$ è sufficiente a permetterci di *riguardare l'intorno dell'ordine m del punto generico P sulla X_n come appartenente ad uno spazio affine, che diremo: spazio affine m -osculatore alla X_n in P* , e che indicheremo ancora con σ_m . In questo spazio le $\xi_{(m)}^\alpha$ sono coordinate cartesiane del punto (della X_n) di coordinate curvilinee $u^r + du^r + \frac{1}{2} d^2 u^r + \dots + \frac{1}{m!} d^m u^r$. Un qualunque sistema controvariante a un indice di classe m , η^α , può considerarsi costituito dalle componenti cartesiane di un vettore η di quello spazio, e le η^α possono pure interpretarsi come coordinate cartesiane, in σ_m , del punto $P + \eta$. Se si assegna un tensore simmetrico $a_{\alpha, \beta}$ a due indici di classe m , tale che le sue componenti soddisfino alle (138), e per la caratteristica μ di $\|a_{\alpha, \beta}\|$ si abbia $n \leq \mu \left(\leq v = \binom{n+m}{m} - 1 \right)$, e del resto arbitrario, come tensore fondamentale di una metrica, si fa di ciascuno spazio

⁽⁴⁹⁾ Intendiamo qui "sistema cartesiano", in un significato più ampio di quello usuale, in quanto i v assi possono non essere indipendenti. Essendo P l'origine, e_α i vettori fondamentali dei v assi, a coordinate di un punto Q si dovranno assumere v numeri x^α tali che sia $P + x^\alpha e_\alpha = Q$. Un punto avrà dunque *infiniti sistemi di coordinate* se i v assi sono linearmente legati; ciò non porta inconvenienti, ma va tenuto presente.

affine m -osculatore alla varietà uno spazio euclideo a μ dimensioni (e insieme, anche degli spazi l -osculatori, $1 \leq l \leq m$, degli spazi euclidei, e della varietà stessa, una varietà riemanniana). D'altra parte al tensore $\alpha_{\alpha, \beta}$ è subordinato un trasporto (per equipollenza) dei vettori di σ_m , e mediante questo trasporto risulta definito un raccordo metrico (congruente) fra i σ_m relativi a due punti infinitamente vicini della varietà; si può dire allora che a questa è data una *connessione euclidea di specie m* .

Ogni trasformazione puntuale fra due V_n muta gli spazi affini m -osculatori all'una negli spazi affini m -osculatori all'altra; ciò equivale a dire che la trasformazione muta l'intorno d'ordine m di un punto nell'intorno d'ordine m del punto omologo, e sotto questo aspetto la cosa è evidente. Fra le trasformazioni puntuali le applicabilità di specie m sono caratterizzate dal fatto che *esse subordinano delle rappresentazioni congruenti fra gli spazi m -osculatori in punti omologhi*. Tali rappresentazioni conservano l'equipollenza di specie m (proprietà non caratteristica).

In particolare la nozione di equipollenza (o di parallelismo) di specie m (e ovviamente, anche quelle di equipollenza o parallelismo di specie l , $1 \leq l \leq m$) sono nozioni invarianti per applicabilità di specie m , cioè, appartengono alla geometria intrinseca di specie m ; naturalmente nello sviluppo di questa avranno quel ruolo fondamentale che nel caso classico ($m = 1$) è tenuto dal parallelismo di LEVI-CIVITA.

Non ci restringeremo, nel seguito, a considerazioni rigorosamente intrinseche di specie m : cioè *torneremo a supporre, in generale*, anche ove questa ipotesi non sia essenziale, *l'esistenza di un ambiente euclideo R_N in cui la V_n sia immersa*.

Curvature di specie m - Nuove leggi di trasporto per le direzioni e i vettori. Oltre alle nozioni, già più volte e anche poco sopra accennate, di equipollenza e parallelismo di specie m , molte altre nozioni e risultati relativi al caso generale, della geometria intrinseca di specie m qualunque, possono ricavarsi quali agevoli estensioni di nozioni e risultati della geometria intrinseca usuale (di specie 1). Ad es.: Data una serie di vettori $\xi(s)$ di σ_m , applicati ai punti di una curva γ di V_n , di cui

s è la lunghezza d'arco, si potrà definire la *curvatura (tangenziale) di specie m* della serie $\xi(s)$ nel seguente modo:

$$(153) \quad \frac{1}{\rho_{[m]}'} = \text{mod} \frac{d_{(m)}' \xi}{ds} = \sqrt{a_{\alpha, \beta} \frac{\bar{d}_{(m)}' \xi^\alpha}{ds} \frac{\bar{d}_{(m)}' \xi^\beta}{ds}}, \quad \rho_\alpha, \rho_\beta \leq m;$$

e anche questa sarà invariante per applicabilità di specie m . Se analogamente chiamiamo *curvatura normale di specie m della serie $\xi(s)$* la quantità

$$(154) \quad \frac{1}{\rho_{[m]}''} = \text{mod} \left(\Omega_{\alpha r} \xi^\alpha \frac{du^r}{ds} \right) = \sqrt{{}_{m+1} E_{\alpha r, \beta s} \xi^\alpha \xi^\beta \frac{du^r}{ds} \frac{du^s}{ds}},$$

e indichiamo con $\frac{1}{\rho_1}$ la (1^a) curvatura ordinaria in R_N , $\text{mod} \frac{d\xi}{ds}$, si ha la relazione pitagorica

$$(155) \quad \left(\frac{1}{\rho_1} \right)^2 = \left(\frac{1}{\rho_{[m]}'} \right)^2 + \left(\frac{1}{\rho_{[m]}''} \right)^2,$$

e sussistono interpretazioni geometriche analoghe a quelle note pel caso $m = 1$ (⁵⁰). Ad es. $\frac{1}{\rho_{[m]}'}$ indica lo scostarsi della serie di vettori $\xi(s)$, nel punto P considerato, dalle serie dei loro componenti secondo il σ_m osculatore a V_n in P . Si noti che la curvatura normale di specie m di una serie di vettori di σ_m (e non di σ_{m-1}) non è un elemento intrinseco di specie m , ma lo è di specie $m+1$: tale è dunque anche la curvatura ordinaria (in R_N) della serie, che per una serie di vettori di σ_m coincide con la curvatura tangenziale di specie $m+1$.

In particolare è sempre $\frac{1}{\rho_{[m]}'} = 0$, cioè $\frac{1}{\rho_1} = \frac{1}{\rho_{[m]}'}$, per vettori di σ_{m-1} o, a maggior ragione, di σ_h , $1 \leq h \leq m-1$. Per una curva di V_n , cioè pel caso in cui la serie $\xi(s)$ è la serie

(⁵⁰) Per vettori $\xi(s)$ di V_n , $\frac{1}{\rho_{[1]}'}$ è la *curvatura associata*, secondo

dei vettori unitari tangenti a γ , la curvatura $\frac{1}{\rho'_{[2]}}$ è quella ordinaria, e così tutte le successive $\frac{1}{\rho'_{[h]}}$ ($h > 2$). Se i vettori $\xi(s)$ sono di σ_h ($1 \leq h \leq m$) la curvatura $\frac{1}{\rho'_{[h]}}$ è invariante per applicabilità di specie $\geq h$.

Si può introdurre come *prima normale principale*, relativa a σ_h , associata alla serie di vettori $\xi(s)$ la direzione di $\frac{d'_{(h)} \xi}{ds}$, e giungere a costruire, se il σ_h osculatore ha α dimensioni, un sistema principale di α direzioni due a due ortogonali associate alla serie $\xi(s)$ in ciascun punto di γ , e $\alpha - 1$ curvature, e ottenere infine un gruppo di *formule di FRENET* generalizzate, tutti gli elementi introdotti essendo invarianti per applicabilità di specie $\geq h$.

Il parallelismo di specie m o $(m, 1)$ -parallelismo, porta vettori di σ_m in vettori di σ_m ; non porta però, generalmente, vettori di σ_h in vettori di σ_h , per $h < m$; e in particolare, se $m > 1$, non porta vettori di σ_1 (cioè, tangenti a V_n) in vettori di σ_1 : ciò può accadere soltanto per particolari vettori, e in particolari classi di varietà, che probabilmente presentano un certo interesse.

Ma si possono definire altre specie di trasporto dei vettori che portano invece sempre vettori di σ_1 in vettori di σ_1 , o più in generale, vettori di σ_h in vettori di σ_h ($1 \leq h \leq m$), pure essendo *invarianti per le deformazioni di specie m e non per tutte le deformazioni di specie $m - 1$* ; in particolare, non per tutte le deformazioni di specie h , se $h < m$.

Diciamo *parallelismo di ordine m* , o $(1, m)$ -parallelismo, o anche *m -parallelismo*, la legge di trasporto di un vettore $\xi(s)$ di V_n lungo una curva γ , $P = P(s)$, definita dalla condizione che l' *m -esima normale principale (assoluta, cioè relativa ad R_γ) associata alla serie $\xi(s)$ lungo γ sia, in ciascun punto di questa curva, normale a σ_1* , cioè alla varietà. Se di più nel trasporto si conserva il modulo del vettore trasportato, si dirà che questo varia per $(1, m)$ -equipollenza, o *equipollenza di ordine m* .

Prima di venire alla rappresentazione analitica di questa legge di trasporto per parallelismo (o equipollenza) di ordine m mostriamo con semplici considerazioni geometriche come una serie di vettori $\xi(s)$ che varino lungo una curva γ di V_n secondo la legge ora detta risulti in effetto determinata quando siano assegnati, in un punto P iniziale di γ , ($s = s_0$), m vettori arbitrari (indipendenti) di σ_m , quali vettore iniziale della serie e vettori derivati: primo, secondo, ..., ($m-1$)-esimo di $\xi(s)$ nel punto supposto:

$$(156) \quad \xi_0 = \xi(s_0), \quad \xi'_0 = \left(\frac{d\xi}{ds} \right)_{s=s_0}, \dots, \quad \xi_0^{m-1} = \left(\frac{d^{m-1}\xi}{ds^{m-1}} \right)_{s=s_0}.$$

Per questo premettiamo che, chiamando S_h *osculatore associato* a una serie di vettori $\xi(s)$ di R_N uscenti dai punti di una curva γ , in un punto P di γ , l' S_h di appartenenza del vettore della serie uscente da P e dei vettori derivato primo, secondo, ..., ($h-1$)-esimo, si può facilmente dimostrare⁽⁵¹⁾ che lo spazio d'appartenenza degli S_{h+1} osculatori associati, in un punto P di γ , alle serie di vettori di V_n uscenti dai punti della data curva γ e aventi in P a comune gli spazi S_1 (cioè: il vettore iniziale), $S_2, S_3, \dots, S_h$ osculatori associati (o brevemente: aventi in P a comune un elemento E'_h d'ordine $h-1$) è in generale un S_{n+h} , contenente l' E'_h comune e l' S_n tangente in P a V_n . Tale S_{n+h} si potrà dire $(h+1, h)$ -*osculatore alla V_n , lungo γ , secondo l' E'_h supposto*⁽⁵²⁾.

Ciò premesso: data dunque la curva (direttrice) γ sulla V_n e in un punto iniziale P di γ un elemento E'_m della serie $\xi(s)$ da costruire (in modo che, lungo γ , $\xi(s)$ vari secondo la legge dell' m -parallelismo), la m -esima normale principale associata in P alla serie da costruire è determinata quale intersezione dell' R_{N-n} normale in R_N a V_n in P , e dell' R_n intersezione dell' $R_{n+m}(m+1, m)$ -osculatore lungo γ in P alla V_n secondo

⁽⁵¹⁾ Con considerazioni analoghe a quelle seguite dal BOMPIANI per il caso degli S_{h+1} osculatori a una curva (cioè, per il caso in cui i vettori $\xi(s)$ siano i vettori unitari tangenti a γ). Ved. 5, 1913, pp. 395-396.

⁽⁵²⁾ Cfr. BOMPIANI, 5, p. 402. (La corrispondente notazione del BOMPIANI è $S(h+1, h)$).

l' E_m supposto, e dell' R_{n-m} normale all' E_m medesimo. Tali spazi R_{n-m} ed R_m s'intersecano in effetto (generalmente) lungo una retta, giacendo entrambi nell' R_{n-1} normale alla direzione iniziale ($\dot{\xi}_0$) assegnata per $\xi(s)$ in P , la quale sta nel σ_1 tangente ivi a V_n .

Il fatto che, assegnato un elemento E_m della serie $\xi(s)$ in un punto di γ , risulta ivi determinata la m -esima normale principale associata e quindi l'elemento E_{m+1} , è, ovviamente, sufficiente ad assicurarci che quelle condizioni iniziali determinano la serie $\xi(s)$.

Considerazioni analoghe (non le stesse) servono a dimostrare che esiste una e una sola curva l' *autoparallela per m -parallelismo*, o *m -geodetica*, di V_n uscente da un punto secondo un E_m assegnato. Tali curve m -geodetiche sono state introdotte dal BOMPIANI (31, 1927, p. 388); il quale per caso ($n=2$) delle superficie ne ha anche indicato (ibid., p. 388 e seg.) le proprietà più essenziali: in particolare, l'invarianza per deformazioni di specie m .

Veniamo a dare, più in generale, dell' *m -parallelismo* (e insieme, anche dell' *m -equipollenza*) delle rappresentazioni analitiche, il che in particolare ci porterà appunto a stabilirne il carattere *invariante per deformazioni di specie m* .

Le equazioni dell' *m -parallelismo* si scrivono assai facilmente in forma vettoriale. Basta esprimere che l' R_{m+1} dei vettori ξ , $d\xi, \dots, d^m \xi$ è normale a ciascuno degli R_{m+1} determinati dai vettori $P_r = \frac{\partial P}{\partial u^r}$, ξ , $d\xi, \dots, d^{m-1} \xi$, per $r=1, 2, \dots, n$. Queste condizioni si scrivono, ricordando la formula per l'angolo di due $(m+1)$ -vettori, nel modo seguente:

$$(157) \quad \begin{vmatrix} \xi \times P_r & d\xi \times P_r & \dots & d^m \xi \times P_r \\ \xi \times \xi & d\xi \times \xi & \dots & d^m \xi \times \xi \\ \xi \times d\xi & d\xi \times d\xi & \dots & d^m \xi \times d\xi \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \xi \times d^{m-1} \xi & d\xi \times d^{m-1} \xi & \dots & d^m \xi \times d^{m-1} \xi \end{vmatrix} = 0. \quad (33)$$

(33) Si confronti con le equazioni date dal BOMPIANI per le curve *k-geodetiche* di una superficie: 31, 1927, p. 389.

Ora: tenendo presenti le formule (111) - (116) (n. 8), vediamo subito che le (157) si possono anche scrivere nella forma seguente:

$$(158) \quad \xi^{\alpha_1} \bar{d}_{(2)} \xi^{\alpha_2} \bar{d}_{(3)}^2 \xi^{\alpha_3} \dots \bar{d}_{(m)}^{m-1} \xi^{\alpha_m} \left| \begin{array}{cccccc} \xi_r & \bar{d}_{(1)} \xi_r & \bar{d}_{(2)}^2 \xi_r & \dots & \bar{d}_{(m)}^m \xi_r \\ \xi_{\alpha_1} & \bar{d}_{(1)} \xi_{\alpha_1} & \bar{d}_{(2)}^2 \xi_{\alpha_1} & \dots & \bar{d}_{(m)}^m \xi_{\alpha_1} \\ \xi_{\alpha_2} & \bar{d}_{(2)} \xi_{\alpha_2} & \bar{d}_{(2)}^2 \xi_{\alpha_2} & \dots & \bar{d}_{(m)}^m \xi_{\alpha_2} \\ \xi_{\alpha_3} & \bar{d}_{(3)} \xi_{\alpha_3} & \bar{d}_{(3)}^2 \xi_{\alpha_3} & \dots & \bar{d}_{(m)}^m \xi_{\alpha_3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \xi_{\alpha_m} & \bar{d}_{(m)} \xi_{\alpha_m} & \bar{d}_{(m)}^2 \xi_{\alpha_m} & \dots & \bar{d}_{(m)}^m \xi_{\alpha_m} \end{array} \right| = 0$$

intendendo, come al n. 8, che la somma rispetto ad α_h ($h=1, \dots, m$) sia estesa agli stati di α_h per quali $\rho_{\alpha_h} \leq h$. Nelle (158) non figurano che *elementi invarianti per deformazioni di specie m* ; ciò prova quanto volevamo. Le (157), (158) sono equazioni differenziali d'ordine m , lineari nelle derivate m -esime, come era facilmente prevedibile.

Le formule (157) e (158) hanno forma invariante per una trasformazione $\xi^* = \lambda \xi$, con λ funzione scalare arbitraria del punto variabile su V_n : dunque esse sono propriamente atte a definire l' m -parallelismo, cioè il trasporto delle direzioni, ed è sempre lecito aggiungere ad esse la condizione della conservazione dei moduli, ottenendo così la rappresentazione della *m -equipollenza*.

Non possiamo soffermarci più a lungo su questo trasporto delle direzioni e dei vettori di V_n . Aggiungiamo soltanto che le leggi di trasporto che abbiamo chiamato *$(m, 1)$ -equipollenza* (pei vettori di σ_m) ed *$(1, m)$ -equipollenza* (pei vettori di σ_1) sono i casi estremi di una serie di trasporti, relativi a V_n , dei vettori dei suoi spazi osculatori, *tutti invarianti per applicabilità di specie m* . Il caso generale è costituito dalla legge di trasporto, relativa a V_n e a σ_n , dei vettori di σ_h ($h=1, 2, \dots, m$) per la quale la *$(m-h+1)$ -esima normale principale associata* (relativa all'ambiente R_N) è *normale al σ_h osculatore*; e si conser-

vano i moduli dei vettori trasportati. Una serie di vettori $\xi(s)$ che varino lungo una curva γ di V_n secondo questa legge — che potrà dirsi: $(h, m-h+1)$ -equipollenza ⁽⁵⁴⁾ — è determinata dall'elemento E'_{m-h+1} d'ordine $m-h$ in un punto iniziale P di γ . Non presenta difficoltà lo scrivere anche per questo trasporto più generale equazioni del tipo (157) o (158), che risultano d'ordine $m-h+1$, e lineari nelle derivate di questo ordine massimo. Su questa e su altre possibili, ulteriori generalizzazioni non aggiungeremo altro nel presente lavoro.

Curvatura riemanniana (tangenziale) di specie m . I trasporti dei vettori e delle direzioni di cui ora (e al n. 4) si è parlato non sono ancora che *elementi* per una costruzione della geometria intrinseca di specie m di una varietà riemanniana. E anzi si comprende come sia veramente essenziale per questo la sola $(m, 1)$ -equipollenza, che ha d'altra parte la rappresentazione analitica più semplice.

Come nell'ordinaria geometria riemanniana (intrinseca di prima specie) si ricava, secondo LEVI-CIVITA, SCHOUTEN, PÉRÈS, quell'invariante fondamentale che è il tensore di curvatura riemanniana, o di RIEMANN-CHRISTOFFEL, avente per componenti i simboli di RIEMANN, così ora, più in generale, il trasporto ciclico di un vettore di σ_m secondo la legge della $(m, 1)$ -equipollenza dà luogo, in modo perfettamente analogo, a un tensore a due indici di classe 1 e due indici di classe m , che chiameremo *il tensore di curvatura riemanniana di specie m* . Precisamente si hanno (anche nel caso attuale), pel divario fra i valori iniziali e finali delle componenti (ad es., covarianti) di un vettore ξ di σ_m trasportato per equipollenza, relativa a V_n , di specie m lungo il contorno del parallelogrammo infinitesimo di vertici

$$P, P_1 = P + d_1 P, P_{12} = P_{21} = P_1 + d_1 P + d_2 P + \frac{1}{2} d_1 d_2 P, \\ P_2 = P + d_2 P, \text{ le note formule}$$

$$(159) \quad D\xi_\alpha = (\bar{d}_{2(m)} \bar{d}_{1(m)} - \bar{d}_{1(m)} \bar{d}_{2(m)}) \xi_\alpha = - R'_{\alpha}{}^{\beta}{}_{\gamma}{}^{\delta} d_1 u^\gamma d_2 u^\delta, \\ (\rho_\alpha, \rho_\beta \leq m)$$

⁽⁵⁴⁾ Si noti dunque: l' (h, k) -equipollenza è invariante per deformazioni di specie $h+k-1$. Cfr. BOMPIANI, 31, p. 388.

ove

$$(160) \quad R'_{m r, s; \alpha}{}^{\beta} = \frac{\partial}{\partial u^s} C_{m \alpha r}^{\beta} - \frac{\partial}{\partial u^r} C_{m \alpha s}^{\beta} + C_{m \alpha r}^{\gamma} C_{m \gamma s}^{\beta} - C_{m \alpha s}^{\gamma} C_{m \gamma r}^{\beta}.$$

Queste sono le componenti del *tensore di curvatura riemanniana di specie m*, o secondo il VITALI e la Sig.^{na} SACHLOTTO (che le hanno introdotte, con altra notazione, pel caso normale) i *simboli di RIEMANN generalizzati di 2^a specie e di classe m* (ved. **65**, p. 202 e seg.; **50**, **51**, **98**).

Volendo far uso anche di elementi non intrinseci di specie m alla varietà, e precisamente, del tensore di curvatura euleriana di specie m (n. 5), si può agevolmente ricavare dalle (159) una espressione interessante per le componenti totalmente covarianti $R'_{m r, s; \alpha, \beta}$ ottenuta per altra via (pel caso normale) dal VITALI (**34**, p. 394, caso $m = 1$; **65**, p. 202). Abbiamo

$$\begin{aligned} (\bar{d}_{2(m)} d_{1(m)} - \bar{d}_{1(m)} \bar{d}_{2(m)}) \xi_{\alpha} &= \bar{d}_{2(m)} (d_1 \xi \times P_{\alpha}) - \bar{d}_{1(m)} (d_2 \xi \times P_{\alpha}) = \\ &= d_1 \xi \times \bar{d}_{2(m)} P_{\alpha} - d_2 \xi \times \bar{d}_{1(m)} P_{\alpha} = \\ &= (\bar{d}_{1(m)} P_{\beta} \times \bar{d}_{2(m)} P_{\alpha} - \bar{d}_{2(m)} P_{\beta} \times \bar{d}_{1(m)} P_{\alpha}) \xi^{\beta}, \quad (\rho_{\alpha}, \rho_{\beta} \leq m), \end{aligned}$$

o, infine, per la (159),

$$\begin{aligned} (161) \quad R'_{m r, s; \alpha}{}^{\beta} d_1 u^r d_2 u^s \xi_{\beta} &= \\ &= (D_r P_{\alpha} \times_{(m)} D_s P_{\beta} - D_s P_{\alpha} \times_{(m)} D_r P_{\beta}) d_1 u^r d_2 u^s \xi^{\beta}, \end{aligned}$$

e quindi

$$\begin{aligned} (162) \quad R'_{m r, s; \alpha, \beta} &= D_r P_{\alpha} \times_{(m)} D_s P_{\beta} - D_s P_{\alpha} \times_{(m)} D_r P_{\beta} \\ &= \Omega_{\alpha r} \times_{(m)} \Omega_{\beta s} - \Omega_{\alpha s} \times_{(m)} \Omega_{\beta r}. \end{aligned}$$

Questa è l'espressione cui accennavo. Ritroveremo più innanzi (n. 15) le formule ora ottenute sotto altro aspetto, come *equazioni di GAUSS generalizzate*.

Dalle (160), (45), (101) agevolmente si hanno per $R'_{r, s; \alpha, \beta}$ queste altre espressioni, ben note pel caso $m=1$ (ved. 51, p. 217):

$$(163) \quad \left\{ \begin{aligned} R'_{r, s; \alpha, \beta} &= \frac{\partial C_{\alpha r, \beta}}{\partial u^s} - \frac{\partial C_{\alpha s, \beta}}{\partial u^r} - \\ &- a^{\gamma, \delta} (C_{\alpha r, \gamma} C_{\beta s, \delta} - C_{\alpha s, \gamma} C_{\beta r, \delta}), \quad \rho_\alpha, \rho_\beta, \rho_\gamma, \rho_\delta \leq m. \end{aligned} \right.$$

È interessante notare che le (163) dànno in particolare:

$$(164) \quad R'_{r, s; \lambda, \mu} = \frac{\partial a_{\lambda r, \mu}}{\partial u^s} - \frac{\partial a_{\lambda s, \mu}}{\partial u^r} + a_{\lambda s, \mu r} - a_{\lambda r, \mu s}.$$

per $\rho_\lambda, \rho_\mu \leq m-1$;

$$(165) \quad \left\{ \begin{aligned} R'_{r, s; \lambda t, \mu} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial a_{\lambda t, \mu s}}{\partial u^r} + \frac{\partial a_{\lambda s, \mu r}}{\partial u^t} + \frac{\partial a_{\lambda r, \mu t}}{\partial u^s} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial a_{\lambda s, \mu t}}{\partial u^r} - \frac{\partial a_{\lambda r, \mu s}}{\partial u^t} - \frac{\partial a_{\lambda t, \mu r}}{\partial u^s} \right) \\ &\quad \text{per } \rho_\lambda = \rho_\mu = m-1. \end{aligned} \right.$$

Dunque alle (138) a), b), c) del n. 11 possiamo dare questa forma invariantiva semplicissima:

$$(166) \quad \left\{ \begin{aligned} a) \quad D_r a_{\lambda, \mu} &= 0 & \rho_\lambda, \rho_\mu \leq m-1 \\ b) \quad R'_{r, s; \alpha, \lambda} &= 0 & \rho_\lambda \leq m-1, \quad \rho_\alpha = m-1 \\ c) \quad R'_{r, s; \alpha t, \pi} &= 0 & \rho_\alpha = \rho_\pi = m-1. \end{aligned} \right.$$

Su questo avremo occasione di tornare (n. 15).

Si presentano molti problemi interessanti, ma debbo per ora limitarmi ad enunciarne qualcuno: ad es. lo studio delle varietà in cui *si annulla il tensore di curvatura riemanniana di*

specie m ($m = 2, 3, \dots$); lo studio delle relazioni fra questo invariante di curvatura per deformazioni di specie m e certe espressioni pure invarianti introdotte dal BOMPIANI (15); la determinazione di un sistema completo di invarianti differenziali di una V_n per le deformazioni medesime.

13. — Cenno sulla geometria intrinseca normale di specie m . Il tensore di curvatura riemanniana normale di specie m . Abbiamo definito, al n. 4, il *trasporto per equipollenza, relativo a V_n , dei vettori normali ai suoi σ_m osculatori*, e ne abbiamo dato, al n. 5, la rappresentazione analitica (61), cioè

$$(167) \quad \bar{d}_{(m)} \xi_i = D_r \xi_i \cdot du^r = d\xi_i - A_{ijr} \xi_j du^r = 0.$$

È evidente che questo trasporto, o gli operatori differenziali D_r e $\bar{d}_{(m)}$ che ad esso corrispondono, determinano, per l'ente costituito dalla V_n e dagli spazi normali, nei suoi punti, ai rispettivi σ_m osculatori, una sorta di *geometria a connessione metrica* (euclidea) nel senso più generale, di *parametri A_{ijr}* . (Cfr. KÖNIG, CARTAN, SCHOUTEN: 17, 24, 27. Ved. anche 90, 91). Tale geometria si dirà *geometria intrinseca normale di specie m* per la V_n . (Cfr., pel caso $m = 1$, CARTAN, 23, p. 46 e seg.).

Una tale geometria, intesa in un senso un po' più generale, si può definire per una V_n anche indipendentemente da ogni ipotesi sull'esistenza della V_n in un ambiente euclideo R_N . Basterà associare (cfr. 90) al punto generico della V_n un E_p passante per essa, indi assegnare una metrica euclidea non specializzata, e del resto arbitraria, e arbitrariamente variabile da punto a punto della V_n , per gli E_p , facendone così degli spazi euclidei R_p ; infine, assegnare un sistema di quantità A_{ijr} , soddisfacenti alle condizioni (86) n. 6 e del resto arbitrarie; le quali rispetto a un sistema di p -uple unitarie e ortogonali di vettori $e^{(h)}(u^1, u^2, \dots, u^p)$, $i, j, h = 1, 2, \dots, p$, prese sugli R_p , come elementi di riferimento, potranno interpretarsi come *parametri di una connessione metrica* fra gli R_p associati a punti di V_n infinitamente vicini; cioè, di un trasporto per equipollenza, rappresentato da formule del tipo (167).

Ma anche qui (cfr. n. prec.) supporremo invece senz'altro, per semplicità, la V_n esistente in R_V euclideo.

Se diciamo, per analogia col caso della geometria intrinseca vera e propria (geometria tangenziale), *applicabilità normale di specie m* fra due varietà di V_n una trasformazione che muti i punti della prima nei punti della seconda, e insieme, i vettori normali al σ_n del punto generico della prima nei vettori normali al σ_n nel punto omologo della seconda, in modo da conservare le lunghezze e gli angoli (cioè, la metrica) negli spazi normali ai σ_n , e il trasporto per equipollenza di specie m , relativo a V_n , dei vettori normali ai σ_m , potremo anche dire che *la geometria intrinseca normale di specie m è lo studio delle proprietà invarianti per applicabilità normali di specie m* .

Sia le applicabilità normali di specie m che la corrispondente teoria invariante, anche nel caso $m=1$, non sono state, finora, oggetto di studio, se si escludono alcune osservazioni del CARTAN ⁽⁵⁵⁾ relative appunto al caso $m=1$, e riguardanti il tensore di curvatura riemanniana normale (intrinseca). Tale tensore è finora l'unico ente di questa geometria intrinseca normale che, se non altro perchè si presenta necessariamente anche in altre ricerche (sulle V_n in relazione con l'ambiente) sia stato preso in considerazione ⁽⁵⁶⁾. Analogamente anche nell'attuale caso più generale (m qualunque) ci limiteremo ad introdurre quello che chiameremo *il tensore di curvatura riemanniana normale di specie m* . Esso ha un ruolo e un'espressione analitica affatto analoghi a quelli del tensore $R'_{m, s; \alpha} \dots^{\beta}$ (che si dirà,

ove occorra evitare confusioni, tensore di curvatura riemanniana *tangenziale* di specie m). Precisamente: per il trasporto ciclico per equipollenza di specie m relativa a V_n di un vettore ξ normale a σ_n , di componenti (σ_n -ortogonali) ξ_i , lungo il parallelogrammo infinitesimo di vertici P, P_1, P_{12}, P_2 , (ved. n. prec.) si ha

$$(168) \quad D\xi_i = (\bar{d}_{2(m)}\bar{d}_{1(m)} - \bar{d}_{1(m)}\bar{d}_{2(m)})\xi_i = -R''_{m, s; i, j} \xi_j d_1 u^s d_2 u^s,$$

⁽⁵⁵⁾ 23, 1925, pp. 47-49.

⁽⁵⁶⁾ All'infuori del trasporto per equipollenza relativo a V_n dei vettori normali ai σ_m , qui definito per m qualunque (n. 4), ma pel caso $m=1$ già introdotto da me in un lavoro del 1928 (37).

ove

$$(169) \quad R_{ij, s; i, j}^{\prime\prime} = \frac{\partial}{\partial u^s} A_{ij} - \frac{\partial}{\partial u^r} A_{ij} + A_{ikr} A_{kjs} - A_{iks} A_{kji}.$$

Queste sono appunto le componenti del tensore di curvatura riemanniana normale di specie m , che naturalmente risulta invariante per applicabilità normali di specie m .

**CAP. 2° - Proprietà d'ordine m di una varietà V_m
in relazione con l'ambiente R_N .**

14. - Significato del tensore di curvatura euleriana di specie m ; sistemi quasi-coniugati, linee quasi-asintotiche; forma angolare di specie m . Veniamo infine a una rapida scorsa sullo studio delle proprietà di ordine m di una V_m che sono legate all'esistenza di questa in un ambiente euclideo R_N (d'un assegnato numero di dimensioni). Mentre delle geometrie *intrinseche*, tangenziale e normale (di specie m qualunque) stanno a base i trasporti per equipollenza di specie m dei vettori (di σ_m e normali ai σ_m), le relazioni con l'ambiente sono riassunte dal *tensore di curvatura euleriana di specie m* , mediante il quale, come abbiamo visto (n. 5), si completa, per un campo vettoriale qualunque di R_N definito su V_m , il differenziale $d\xi$ quando si conoscano quelli assoluti, di specie m , dei rispettivi componenti secondo σ_m e normale a σ_m .

A questo tensore abbiamo già avuto occasione d'accennare più volte. Abbiamo visto (n. 5, form. (77)) che i vettori $\Omega_{\alpha r}$, i quali ne danno una rappresentazione parzialmente scalare, possono così ottenersi:

$$(170) \quad \Omega_{\alpha r} = D_r P_{\alpha}, \quad (\rho_{\alpha} \leq m);$$

abbiamo notato che le $\Omega_{\alpha r}$ sono tutte nulle per $\rho_{\alpha} < m$, il che porta (65, p. 197) che, sostituendo all'indice composto α ($\rho_{\alpha} = m$) le sue cifre $r_1 r_2 \dots r_m$, le $\Omega_{r_1 r_2 \dots r_m r}$ si possono riguardare

come le componenti di un tensore ad $m+1$ indici di covarianza di classe 1. E abbiamo visto infine che, se ξ è un vettore di σ_n , è

$$(171) \quad \Omega_{\alpha r} \xi^\alpha du^r$$

il componente normale a σ_n del differenziale $d\xi$ (calcolato in R_N); il suo modulo è quella che abbiamo chiamato la *curvatura normale di specie m* della serie $\xi(s)$. In particolare, è

$$(172) \quad \Omega_{r_1 r_2 \dots r_m r} du^{r_1} du^{r_2} \dots du^{r_m} du^r$$

il componente normale a σ_n di $d^{m+1}P$. Se ξ è un vettore normale a σ_n , è

$$(173) \quad -\alpha^{\alpha\beta} \Omega_{\alpha r} \xi^\alpha du^r \cdot P_\beta$$

il componente tangenziale a σ_n del vettore di $d\xi$.

In sostanza il *tensore di curvatura euleriana (di specie m)* esprime il *divario fra i trasporti per equipollenza: ordinaria (in R_N) e di specie m (tangenziale e normale) relativa a V_n* . (Cfr. 18, pp. 1114, 1116-1117). L'annullarsi di $\Omega_{\alpha r}$ esprime che i due trasporti per equipollenza su V_n coincidono.

Mediante il tensore di curvatura euleriana possiamo ottenere una rappresentazione analitica dei sistemi di linee *quasi-coniugati* $\alpha_{n, n+1}$ ⁽⁵⁷⁾; così chiamando un doppio sistema di linee (Γ, M) di V_n tali che in ciascun punto di una linea Γ lo spazio $(m+1)$ -osculatore associato, in R_N , alla serie delle direzioni delle linee M che ne escono giaccia nello spazio m -osculatore

⁽⁵⁷⁾ Ho studiato in un precedente lavoro (25, 1925) i sistemi quasi-coniugati $\alpha_{1, n-1}$ su di una superficie, estendendo ad essi alcune proprietà date dal BOMPIANI per le linee quasi-asintotiche $\gamma_{1, n-1}$ (10, 1916). In generale sistemi *quasi-coniugati* $\alpha_{p, q}$ si potranno dire quei doppi sistemi di linee (eventuali) della V_n tali che vi sia una incidenza particolare fra l' S_q osculatore associato alla serie di direzioni delle linee di uno dei due sistemi che escono dai punti di ciascuna linea dell'altro e lo spazio p -osculatore alla varietà. Un'altra estensione della nozione di sistemi coniugati è stata data dal BOMPIANI (19).

in quel punto alla V_n (cioè: giaccia in σ_m la m -esima normale principale associata, in R_N , a quella serie). Tenendo presente la (115), indicato con ξ^r (o, in σ_m , $\xi^\alpha = \delta_r^\alpha \xi^r$, $\rho_\alpha \leq m$) il vettore unitario tangente alla linea Γ generica e con du^r un sistema di differenziali presi lungo la generica linea M , abbiamo subito per gli eventuali sistemi quasi-coniugati $\kappa_{m, m+1}$ di V_n in R_N la seguente rappresentazione analitica:

$$(174) \quad \Omega_{\alpha r} \bar{d}_{(m)}^{m-1} \xi^\alpha du^r = 0, \quad \rho_\alpha \leq m,$$

cioè

$$(174)^* \quad \Omega_{r_1 r_2 \dots r_m} \xi^{r_1} du^{r_2} \dots du^{r_m} du^r = 0.$$

Si vede di qui che, *nel solo caso in cui la dimensione del σ_{m+1} osculatore a V_n superi di $n-1$ quella del σ_m* , dato comunque il sistema di linee M esiste, ed è determinato *in modo univoco*, un corrispondente sistema Γ ; non però viceversa.

In particolare se diciamo, secondo BOMPIANI ⁽⁵⁸⁾, *linee quasi-asintotiche* $\gamma_{m, m+1}$ le (eventuali) linee della V_n che sono quasi-coniugate $\kappa_{m, m+1}$ a sè stesse, tali cioè che in ogni punto di ciascuna di esse l' S_{m+1} osculatore giaccia nel σ_m ivi osculatore alla varietà (ossia: vi giaccia la m -esima normale principale), avremo che queste linee saranno rappresentate dall'equazione vettoriale

$$(175) \quad \Omega_{\alpha r} \bar{d}_{(m)}^m u^\alpha du^r = 0, \quad \rho_\alpha \leq m,$$

cioè anche

$$(175) \quad \Omega_{r_1 r_2 \dots r_m} du^{r_1} du^{r_2} \dots du^{r_m} du^r = 0.$$

Per $m=1$ si ritrova un risultato notissimo; per $m=2$ si hanno sotto forma lievemente diversa i risultati notati dal VITALI ⁽⁵⁹⁾.

Un altro interessante problema delle relazioni fra varietà ed ambiente è quello dell'*angolo fra due σ_m osculatori* in punti infinitamente vicini della varietà ⁽⁶⁰⁾. Per calcolare questo angolo

⁽⁵⁸⁾ Ved. 4, 1912; ved. anche 5, 6, 8, 10, 14, 15, 16, 22, 31.

⁽⁵⁹⁾ 34, p. 428.

⁽⁶⁰⁾ Ved., per caso $m=1$, 91, n. 7, nota ⁽²⁵⁾.

ci conviene tener presente che esso è uguale a quello degli spazi rispettivamente normali ai due σ_n . È immediata l'osservazione che se $v(s)$ è una serie di r -vettori ($r=1, 2, 3, \dots$) di R_N applicati ai punti di una linea γ , $P=P(s)$, di V_n , la parte principale del quadrato dell'angolo d'inclinazione fra gli r -vettori uscenti dai due punti infinitamente vicini $P, P+dP$ di γ è il quadrato scalare di $dv(s)$:

$$(176) \quad d\theta^2 = dv \times dv.$$

Nel nostro caso si tratta dei p -vettori (unitari, normali ai σ_m);

$$(177) \quad v = p! \underset{m}{X} \frown \underset{m}{X} \frown \dots \frown \underset{m}{X}, \quad p = N - \mu,$$

ove $\frown$ è, secondo SCHOUTEN, il simbolo della *moltiplicazione alternata*. Dunque si ha

$$(178) \quad d\theta^2 = (p! \sum_1^p \underset{m}{X} \frown \underset{m}{X} \frown \dots \frown \underset{m}{X} \frown d\underset{m}{X} \frown \underset{m}{X} \frown \dots \frown \underset{m}{X})^2;$$

ora di qui si ricava subito, ricordando la formula pel prodotto scalare di due p -vettori,

$$d\theta^2 = \sum_1^p (d\underset{m}{X}^i)^2 - 2 \sum_{(ij)} (d\underset{m}{X}^i \times \underset{m}{X}^j)^2$$

$\sum_{(ij)}$ essendo estesa alle combinazioni semplici ij della classe 2 di $1, 2, \dots, p$. Ma per le (68), (62) si ha

$$(180) \quad d\underset{m}{X}^i = (-\omega_{\alpha r}^i a^{\alpha, \beta} \underset{m}{P}_\beta + A_{\alpha r}^i \underset{m}{X}^j) du^r, \quad \rho_\alpha, \rho_\beta \leq m.$$

Sostituendo si ottiene la formula semplicissima

$$(181) \quad d\theta^2 = a^{\alpha, \beta} \underset{m}{\Omega}_{\alpha r} \times \underset{m}{\Omega}_{\beta s} du^r du^s,$$

ossia

$$(182) \quad d\theta^2 = a^{\alpha, \beta} \underset{m}{\omega}_{\alpha r}^i \underset{m}{\omega}_{\beta s}^i du^r du^s.$$

La forma differenziale quadratica del 1° ordine data dalla (181) o (182) si potrà chiamare *forma angolare di specie m*. Essa nel caso molto particolare in cui sia $N=3$, $n=2$, $m=1$ si ri-

duce alla terza forma fondamentale di GAUSS di una superficie dello spazio ordinario (ds^2 dell'immagine sferica).

15. - Condizioni per la subordinazione di una geometria riemanniana intrinseca di specie m alla geometria di un ambiente euclideo di dimensione assegnata; equazioni di HLAVATY, di GAUSS, di CODAZZI, di KÜHNE generalizzate. Affrontiamo infine il problema fondamentale delle relazioni fra varietà ed ambiente: il problema della subordinazione di una assegnata geometria riemanniana intrinseca (tangenziale e normale) di specie m alla geometria di un ambiente euclideo (di assegnata dimensione). Anche qui la trattazione può svolgersi come pel caso $m = 1$: mi limiterò ad accennare le linee essenziali dell'estensione dal caso $m = 1$ al caso generale⁽⁶¹⁾.

Sia, come al n. 3 (fine), $\xi(P)$ un campo di vettori di R_V applicati ai punti P di V_n e comunque diretti; siano ξ' , ξ'' i componenti del vettore ξ generico secondo σ_m e normale a σ_m : onde si avrà per ξ la decomposizione espressa dalla form. (38) n. 3, e analoga decomposizione, la (68) n. 5, avremo per $d\xi$. La (68) può anche scriversi nel modo seguente:

$$(183) \quad \left\{ \begin{aligned} d\xi &= \bar{d}_{(m)} \xi'^\alpha \cdot P_\alpha + \Omega_{\alpha r} \xi'^\alpha du^r - \\ &- \Omega_{\beta r} \times \xi a^{\alpha, \beta} P_\alpha du^r + \bar{d}_{(m)} \xi_i'' \cdot X^i. \end{aligned} \right.$$

Introduciamo (cfr. n. 5) il riterimento cartesiano ortogonale x^A in $R_N(A, B, C, D, \dots = 1, 2, \dots, N)$; indichiamo ancora (cfr. (73)) con B_α^A le R_N -componenti dei vettori P_α e con $\Omega_{\alpha r}^{\dots A}$ quelle dei vettori

⁽⁶¹⁾ Mi riferisco, pel caso $m=1$, alla trattazione da me data in un lavoro recente (91), ove studio, più in generale, le varietà a connessioni *af-fine* subordinate ad altre varietà della stessa natura.

Gli sviluppi qui sopra esposti (n. 15) hanno qualche punto di contatto con lo studio, pure condotto con assai diverso metodo e da diverso punto di vista, del "Formenproblem", per le varietà di uno spazio euclideo, o riemanniano a curvatura costante, quale è esposto da W. MAYER in un recente trattato (100, pp. 201-232; bibliogr. a p. VI). Di questa pubblicazione sono venuto a conoscenza troppo tardi per potere svolgere qui l'interessante raffronto.

$\Omega_{\alpha r}$, cioè, del tensore di curvatura euleriana di specie m ; analogamente, con C_i^α indichiamo le R_N -componenti dei vettori $\overset{i}{X}$ ⁽⁶²⁾. Rammentiamo che

$$(184) \quad \Omega_{\alpha r} = D_r P_\alpha, \quad \text{cioè} \quad \Omega_{\alpha r}^{\dots A} = D_r C_\alpha^A;$$

poniamo analogamente

$$(185) \quad \Pi_{jr} = D_r \overset{j}{X} \quad \text{(63)} \quad \text{cioè} \quad \Pi_{jr}^{\dots A} = D_r C_j^A.$$

Di qui segue, tenute presenti le (62), (60)

$$(186) \quad \Pi_{ir} \times \overset{j}{X} = 0 \quad \text{cioè} \quad \Pi_{ir}^{\dots A} C_j^A = 0, \quad i, j = 1, 2, \dots, p;$$

ossia i vettori Π_{ir} giacciono nel σ_m (cfr. le (76) n. 5). Più precisamente: in conseguenza delle relazioni

$$(187) \quad P_r \times \overset{j}{X} = 0 \quad (B_r^A C_j^A = 0) \quad p_r \leq m; j = 1, 2, \dots, p$$

si ha

(62) Scriviamo C_i^A al luogo di $\overset{i}{C}^A$ od $\overset{i}{X}^A$ perchè vogliamo tener presente il *carattere tensoriale* di queste quantità anche nei riguardi dell'indice i (s'intende: per trasformazione ortogonale sui p vettori $\overset{i}{X}$). Maggiore precisione di notazioni potrebbe ottenersi facendo uso, secondo SCHOUTEN, (ved. 91, n. 2, nota (?)) dei vettori fondamentali (*Massvektoren*) relativi ai singoli sistemi di riferimento (in V_n , in σ_m , nell' R_p normale al σ_m) e della "Abdrosselung" degli indici. Ad es. si ha $C_i^A = e_{ji}'' \overset{j}{X}^A$, se con $e_{ji}'' (= \mathfrak{z}_{ij})$ indichiamo le componenti, nel sistema $\overset{j}{X}$, degli stessi vettori $\overset{j}{X}$ di riferimento.

(63) Qui $\overset{j}{X}$ è considerato formalmente, nei riguardi dell'indice j , come un sistema covariante; in questo senso è ad esso applicato l'operatore D_r .
Così nelle (202). Cfr. n. 5.

$$(188) \quad \Omega_{\gamma r} \times \overset{j}{X} + \Pi_{jr} \times P_{\gamma} = 0 \quad (\Omega_{\gamma r}^{\dots A} C_j^A + \Pi_{jr}^{\dots A} B_{\gamma}^A = 0),$$

onde

$$(189) \quad \Pi_{jr} = -a_m^{\alpha, \beta} \Omega_{\beta r} \times \overset{j}{X} \cdot P_{\alpha} \quad (\Pi_{jr}^{\dots A} = -a_m^{\alpha, \beta} B_{\alpha}^A \Omega_{\beta r}^{\dots B} C_j^B).$$

Ciò posto, dalle (183) (o anche direttamente dalle (38) n. 3) abbiamo:

$$(190) \quad \frac{\partial \xi^A}{\partial u^r} = D_{(m)} \xi'^{\alpha} \cdot B_{\alpha}^A + \Omega_{\alpha r}^{\dots A} \xi'^{\alpha} + \Pi_{ir}^{\dots A} \xi''_i + D_r \xi''_i \cdot C_i^A.$$

Ora: queste possono riguardarsi come *equazioni differenziali nelle* ξ^A (cfr. 91, n. 2, fine) considerandovi le B_{α}^A , C_i^A e le $\Omega_{ir}^{\dots A}$, $\Pi_{ir}^{\dots A}$ (date queste dalle (184), (185)) come *funzioni note* delle u^r ; è agevole ottenere le *condizioni d'integrabilità*. Deriviamo rispetto ad u^r , indi alterniamo rispetto agli indici r, s ; tenute presenti le (159), (168) abbiamo

$$(191) \quad \left\{ \begin{aligned} & \left(R'_{r, s; \alpha} B_{\beta}^A + D_{(m)} \Omega_{\alpha r}^{\dots A} - D_r \Omega_{\alpha s}^{\dots A} \right) \xi'^{\alpha} + \\ & + \left(R''_{r, s; i, j} C_j^A + D_{(m)} \Pi_{ir}^{\dots A} - D_r \Pi_{is}^{\dots A} \right) \xi''_i = 0 \quad (64). \end{aligned} \right.$$

Perchè le (190) siano completamente integrabili occorre e basta che queste equazioni (191) valgano per *qualunque* campo di vettori $\xi(P)$; cioè, che sia

$$(192) \quad \left\{ \begin{aligned} & \left(R'_{r, s; \alpha} B_{\beta}^A + D_{(m)} \Omega_{\alpha r}^{\dots A} - D_r \Omega_{\alpha s}^{\dots A} \right) a_m^{\alpha, \gamma} B_{\gamma}^B + \\ & + \left(R''_{r, s; i, j} C_j^A + D_{(m)} \Pi_{ir}^{\dots A} - D_r \Pi_{is}^{\dots A} \right) C_i^B = 0, \end{aligned} \right.$$

(64) Qui l'operatore D_r (ved. n. 7, form. (100)) deve intendersi applicato ad $\Omega_{\alpha s}^{\dots A}$ considerando α ed s come *due indici distinti*, delle classi m ed 1.

La stessa (o analoga) interpretazione è da darsi al simbolo D_r nelle (192), (193), (194) e nelle (204) (ove i è riguardato come un indice *ordinale*).

o in forma vettoriale

$$(193) \quad \left\{ \begin{array}{l} a^{\alpha, \beta} P_{\gamma} \left(R'_{\cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \beta} P_{\beta} + D_{\cdot} \Omega_{\alpha r} - D_r \Omega_{\alpha s} \right) + \\ + \dot{X} \left(R''_{r, s; i, j} \dot{X} + D_s \Pi_{ir} - D_r \Pi_{is} \right) = 0. \end{array} \right.$$

Queste sono le cercate condizioni d'integrabilità. Per $m=1$ esse si riducono alle equazioni date (in forma assai diversa, e in ipotesi più generali circa la varietà, più particolari circa i riferimenti) da V. HLAVATY⁽⁶⁵⁾. I primi membri delle (193) per ciascun sistema di valori di r, s sono *forme bilineari alter-nate di vettori di R_s* , cioè *somme di bivettori (bivettori gene-rali, secondo SCHOUTEN; sistemi di bivettori, secondo CARTAN)*.

Alle (192) o (193) si può arrivare anche per altra via, che meglio pone in luce il loro significato. Calcoliamo le condizioni d'integrabilità delle (184), considerate come equazioni differen-ziali nelle B_{α}^A . In conseguenza delle (159) esse si scrivono semplicemente

$$(194) \quad D_r \Omega_{\alpha s}^{\cdot \cdot \cdot A} - D_s \Omega_{\alpha r}^{\cdot \cdot \cdot A} = R'_{\cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \beta} P_{\beta} B_{\alpha}^A.$$

Analogamente le condizioni d'integrabilità delle (185), quali equazioni nelle C_i^A , sono

$$(195) \quad D_r \Pi_{is}^{\cdot \cdot \cdot A} - D_s \Pi_{ir}^{\cdot \cdot \cdot A} = R''_{r, s; i, j} C_j^A.$$

Ora: tenendo presente che

$$(196) \quad a^{\alpha, \beta} B_{\alpha}^A B_{\beta}^B + C_i^A C_i^B = \delta_{AB} \quad (=1 \text{ se } A=B; =0 \text{ se } A \neq B)$$

⁽⁶⁵⁾ Loc. cit. in 91, nota ⁽¹⁴⁾. Cfr. le form. (19) dello stesso lav. 91, n. 2.

dalle (194) e (195) moltiplicando per $a^{\alpha, \gamma} B_{\gamma}^B$ e per C_i^B , rispettivamente, e sommando, otteniamo appunto le (192). Viceversa, da queste moltiplicando per B_{β}^B , oppure per C_i^B , e sommando, ricaviamo le (194) e (195). Le (192) dunque riassumono le condizioni d'integrabilità delle (184), (185). Ma esse, e così pure le (194), (195), presentano questo inconveniente: di contenere le funzioni incognite B_{α}^A e C_i^A . Vediamo però come alle (192), o alle equivalenti (194), (195) si possano sostituire delle equazioni in cui non figurano più le B_{α}^A e C_i^A . Anzitutto ricordiamo (n. 5, form. (69), (67) e (77)) che, posto

$$(197) \quad \omega_{\alpha r}^i = \Omega_{\alpha r}^i \times X = \Omega_{\alpha r}^{\dots A} C_i^A$$

si ha

$$(198) \quad \Omega_{\alpha r}^{\dots A} = \omega_{\alpha r}^i C_i^A,$$

onde anche, per le (184), (185),

$$(199) \quad \omega_{\alpha r}^i = - \Pi_{ir}^i \times P_{\alpha} = - \Pi_{ir}^{\dots A} B_{\alpha}^A,$$

$$(200) \quad \Pi_{ir}^{\dots A} = - a^{\alpha, \beta} \omega_{\alpha r}^i B_{\beta}^A.$$

Possiamo dunque scrivere le (184), (185) nel modo seguente:

$$(201) \quad D_r P_{\alpha} = \omega_{\alpha r}^i X, \quad \text{cioè} \quad D_r B_{\alpha}^A = \omega_{\alpha r}^i C_i^A,$$

$$(202) \quad D_r X = - a^{\alpha, \beta} \omega_{\alpha r}^i P_{\beta}, \quad \text{cioè} \quad D_r C_i^A = - a^{\alpha, \beta} \omega_{\alpha r}^i B_{\beta}^A.$$

D'altra parte dalle (194) moltiplicando per B_{γ}^A , oppure per C_i^A , e sommando otteniamo, in forza delle (198) e delle (201), (202):

$$(203) \quad \omega_{\alpha s}^i \omega_{\beta r}^i - \omega_{\alpha r}^i \omega_{\beta s}^i = R'_{r, s; \beta, \alpha},$$

cioè

$$(203)^* \quad \Omega_{\alpha s} \times \Omega_{\beta r} - \Omega_{\alpha r} \times \Omega_{\beta s} = R'_{r, s; \beta, \alpha};$$

e

$$(204) \quad D_i \omega_{\beta r}^i - D_r \omega_{\beta s}^i = \omega_{\beta r}^j A_{i,j} - \omega_{\beta s}^j A_{i,j}.$$

Le (203) possono dirsi, per ovvie ragioni (cfr. **91**, n. 4) *equazioni di GATTS generalizzate*; le abbiamo già trovate per altra via al n. 12 (form. (162)). Le (204) sono generalizzazioni delle classiche *equazioni di CODAZZI*.

Dalle (195) moltiplicando per B_{γ}^{Δ} e sommando si ritrovano ancora le equazioni (204) di CODAZZI; moltiplicando invece per C_{ϵ}^{Δ} e sommando si hanno le *equazioni di KÜHNE generalizzate*:

$$(205) \quad a_{\alpha, \beta}^{\alpha, \beta} \left(\omega_{\alpha r}^i \omega_{\beta s}^k - \omega_{\alpha s}^i \omega_{\beta r}^k \right) = R''_{r, s; i, k}.$$

È agevole verificare che le (203), (204), (205) costituiscono insieme le condizioni d'integrabilità delle (201), (202): il che del resto può dedursi da quanto sopra si è esposto.

Quanto precede presuppone sempre che sia $\mu < N$; ma non occorre, in realtà, escludere il caso $\mu = N$, cioè $p = 0$, bastando allora nelle precedenti equazioni alle $A_{i,r}$, $\omega_{\alpha r}^i$ sostituire ovunque lo zero.

Supponiamo ora che vengano assegnati a priori: *il numero, N , di dimensioni dello spazio euclideo ambiente, R_N ; la forma Φ_m , cioè (quali funzioni delle u^r) le $a_{\alpha, \beta}$; e infine, detta μ la caratteristica di $\|a_{\alpha, \beta}\|$ (onde occorrerà supporre $N \geq \mu$), quando sia $N > \mu$, posto $p = N - \mu$ ed $i, j = 1, 2, \dots, p$, i parametri $A_{i,r}$ e il sistema di vettori ω_{τ}^i ($\rho_{\tau} \leq m + 1$; $\rho_{\alpha}, \rho_{\beta} \leq m$).* Siamo in grado di precisare delle condizioni necessarie e suffi-

cienti perchè, in relazione a sistemi di riferimento opportunamente scelti, quegli enti corrispondano ad una effettiva V_n di R_N ; e indicare come, in tale caso, la V_n possa costruirsi entro R_N .

Troviamo subito delle condizioni *necessarie*, che poi mostreremo essere anche *sufficienti*.

Anzitutto, come abbiamo già notato, la caratteristica μ di $\|a_{\alpha, \beta}\|$ dovrà essere non superiore ad N ; questo è geometricamente ovvio, mentre da un punto di vista analitico, $\mu \leq N$ è la condizione perchè, in R_N , le equazioni

$$(206) \quad P_\alpha \times P_\beta = a_{\alpha, \beta} \quad \text{cioè} \quad B_\alpha^A B_\beta^A = a_{\alpha, \beta}$$

siano *algebricamente compatibili* ⁽⁶⁶⁾. Posto, come al n. 1 (ved. form. (2)),

$$(207) \quad \nu = \binom{n+m}{m} - 1,$$

se risulta $\nu > N$ fra le $a_{\alpha, \beta}$ dovranno dunque sussistere $\frac{(\nu - N)(\nu - N + 1)}{2}$ relazioni indipendenti in termini finiti, che

si scrivono senza difficoltà. Indichiamo complessivamente con $L_{n, \nu}$ queste *condizioni di compatibilità per le $a_{\alpha, \beta}$* in termini finiti. (Cfr. n. 11, nota ⁽⁴⁴⁾). Esse risultano, naturalmente, comprese nel gruppo $L_{n, \mu}$ di $\frac{(\nu - \mu)(\nu - \mu + 1)}{2}$ equazioni esprimenti che la ca-

ratteristica di $\|a_{\alpha, \beta}\|$ è μ (o meglio, che essa non supera μ), quando si aggiunga l'ipotesi esplicita $N \geq \mu$. Oltre ad esse dovremo supporre che dalle $a_{\alpha, \beta}$ siano verificate le condizioni *differenziali* (138) n. 11, (o (166) n. 12), necessarie e sufficienti, come vedemmo, perchè a partire dalle $a_{\alpha, \beta}$ si possa univocamente costruire un corrispondente calcolo assoluto generalizzato (pel quale risulti $D a_{\alpha, \beta} = 0$).

Analogamente, nei riguardi delle $A_{\psi r}$, si dovrà supporre

⁽⁶⁶⁾ Cfr. LEVI, 2, p. 10.

che siano soddisfatte le (86) n. 6. E nei riguardi delle ω_{τ}^i ($\rho_{\tau} \leq m+1$) dovranno valere le condizioni seguenti (conseguenza delle (78) n. 5 e (197)):

$$(208) \quad \omega_{\tau}^i = 0, \quad \text{per } \rho_{\tau} \leq m.$$

Per di più, gli enti $a_{\alpha, \beta}$, A_{ijr}^i , $\omega_{\tau}^i = \omega_{\alpha r}^i$, con $\rho_{\alpha} \leq m$, dovranno essere tali da soddisfare alle equazioni (203), (204), (205) di GAUSS, di CODAZZI e di KÜHNE generalizzate. Nei riguardi delle equazioni di GAUSS possiamo notare che, da quanto si disse alla fine del n. 12, risulta che *esse comprendono in particolare* le (166) b) e c), o le equivalenti (138) b) e c); inversamente, tutte le relazioni fra le sole $a_{\alpha, \beta}$ ottenibili dalle equazioni di GAUSS generalizzate si possono ricavare quali conseguenze lineari delle (138). (Cfr. n. 11).

Concludendo: le relazioni $L_{n, N}$, (138) a), (86) e (208), (203), (204), (205) sono certo *condizioni necessarie* per l'esistenza di una corrispondente V_n di R_N .

Ma vediamo subito che esse sono pure *condizioni sufficienti*. Cioè: se esse sono soddisfatte, è possibile trovare un sistema di soluzioni $P(u^1, u^2, \dots, u^n)$, $P_{\alpha}(u^1, u^2, \dots, u^n)$, $X(u^1, u^2, \dots, u^n)$, cioè $x^A(u^1, u^2, \dots, u^n)$, $B_{\alpha}^A(u^1, u^2, \dots, u^n)$, $C_i^A(u^1, u^2, \dots, u^n)$ del sistema.

$$(209) \quad \frac{\partial^h P}{\partial u^{r_1} \dots \partial u^{r_h}} = P_{r_1 r_2 \dots r_h} \quad \left(\frac{\partial^h x^A}{\partial u^{r_1} \dots \partial u^{r_h}} = B_{r_1 r_2 \dots r_h}^A \right)$$

(ove $1 \leq h \leq m$, ed $r_1 r_2 \dots r_h$ è una qualunque combinazione con ripetizione della classe h di $12 \dots n$),

$$(201) \quad D_r P_{\alpha} = \omega_{\alpha r}^i X^i \quad \left(D_r B_{\alpha}^A = \omega_{\alpha r}^i C_i^A \right)$$

$$(202) \quad D_r X^i = -a_{\alpha, \beta}^{\alpha} \omega_{\alpha r}^i P_{\beta} \quad \left(D_r C_i^A = -a_{\alpha, \beta}^{\alpha} \omega_{\alpha r}^i B_{\beta}^A \right)$$

soddisfacenti alle

$$(210) \quad P_{\alpha} \times P_{\beta} = a_{\alpha, \beta} \quad (B_{\alpha}^A B_{\beta}^A = a_{\alpha, \beta})$$

$$(211) \quad P_{\alpha} \times \overset{i}{X} = 0 \quad (B_{\alpha}^A C_i^A = 0)$$

$$(212) \quad \overset{i}{X} \times \overset{j}{X} = \delta_{ij} \quad (C_i^A C_j^A = \delta_{ij}).$$

Infatti: l'ipotesi che sussistano le relazioni $L_{m, N}$ porta anzitutto che è $\mu \leq N$. (In caso contrario le (201) e (202), come le (211) e (212), non avrebbero significato). In secondo luogo: se, nelle ipotesi dette sopra, i vettori P_{α} soddisfano alle (201), tenute presenti le (75) e (79) ricaviamo che è

$$(213) \quad \frac{\partial P_{\lambda}}{\partial u^r} = P_{\lambda r} \quad \left(\frac{\partial B_{\lambda}^A}{\partial u^r} = B_{\lambda r}^A \right) \quad r_{\lambda} \leq m-1$$

cioè: tutte le (209), all'infuori del primo gruppo

$$(214) \quad \frac{\partial P}{\partial u^r} = P_r \quad \left(\frac{\partial x^A}{\partial u^r} = B_r^A \right)$$

rientrano fra le conseguenze *algebriche*, anzi *lineari*, delle (201). Le condizioni d'integrabilità delle (214) in forza delle (201) sono senz'altro soddisfatte.

Inoltre: *le conseguenze differenziali del sistema formato dalle (210), (211), (212) in forza delle (201) e (202) (e delle (138)) rientrano nel sistema stesso*: la verifica di questo è agevole. Dunque per un sistema integrale delle (201) e (202) le (210), (211), (212) saranno soddisfatte identicamente se lo sono in un punto iniziale $P_0, u^r = u_0^r$.

Essendo μ la caratteristica della matrice $\|a_{\alpha, \beta}\|$, delle (210) soltanto

$$(215) \quad \frac{\mu(2\nu - \mu + 1)}{2}$$

sono indipendenti (cfr. LEVI, 2, p. 10); le (211), (212), come

condizioni pei vettori P_α ed X^i , sono poi in numero di $\nu p + \frac{p(p+1)}{2}$ indipendenti, cosicchè complessivamente le (210), (211), (212) sono $N(\nu - \mu) + \frac{N(N+1)}{2}$ condizioni indipendenti per gli

$N + \nu - \mu$ vettori P_α, X^i di R_N . Il più generale sistema di vettori che soddisfi ad esse *nel punto iniziale* $u^r = u_0^r$ dipenderà da $\frac{N(N-1)}{2}$ parametri arbitrari. Resta poi, come è naturale, del tutto arbitrario il punto della V_n corrispondente a $u^r = u_0^r$, cioè, il sistema di valori iniziali delle x^A .

Tenendo presente infine che le condizioni d'integrabilità delle (201), (202) sono, come già s'è notato, le equazioni (203), (204), (205) di GAUSS di CODAZZI e di KÜHNE generalizzate; vediamo che risulta stabilito quanto avevamo enunciato. Più precisamente, possiamo concludere:

Dati l'intero N e, in funzione di n variabili $u^1, u^2, \dots, u^n$, un tensore simmetrico $\alpha_{\alpha, \beta}$ a due indici di classe m , cioè, una forma differenziale quadratica d'ordine m , $\Phi_m = \alpha_{\alpha, \beta} \delta^\alpha u^\alpha \delta^\beta u^\beta$ ($\rho_\alpha, \rho_\beta \leq m$), un sistema di funzioni scalari A_{ijr} e un sistema di vettori covarianti, a un indice di classe $m+1$, ω_τ^i ($i, j = 1, 2, \dots, p$; $p = N - \mu$; $\mu =$ caratteristica di $\|\alpha_{\alpha, \beta}\|$), condizione necessaria e sufficiente perchè esista una varietà V_n di R_N avente $\alpha_{\alpha, \beta}$ come tensore fondamentale di specie m , le A_{ijr} come parametri della connessione metrica fra gli R_p normali ai σ_m (n. 13), i vettori ω_τ^i come componenti del tensore di curvatura euleriana di specie m , è che:

1) le $\alpha_{\alpha, \beta}$ soddisfino alle condizioni $L_{n, N}$ in termini finiti e alle relazioni differenziali (138) a) n. 11;

2) le A_{ijr} soddisfino alle (86) n. 6;

3) le ω_τ^i soddisfino alle (208);

4) le $\alpha_{\alpha, \beta}$, $A_{\alpha\beta}$, $\omega_{\alpha}^i = \omega_{\alpha\beta}^i$ soddisfino alle equazioni (203), (204), (205) di GAUSS, di CODAZZI e di KÜHNE generalizzate.

Se tali condizioni sono soddisfatte, la V_n si costruisce in R_N determinando (insieme alle C_i^A) le B_{α}^A con l'integrazione delle (201) e (202), valendosi delle (210), (211), (212) quali condizioni iniziali, e poi le x^A per quadrature dalle (214); così la varietà risulta determinata a meno di movimenti dello spazio R_N .

Questo risultato e gli altri esposti nella II Parte del presente lavoro non costituiscono che un inizio di trattazione generale ed uniforme per le geometrie riemanniane di specie superiore; però sufficiente, spero, a mostrare come coi procedimenti di calcolo qui introdotti - pel caso normale in gran parte dovuti al VITALI - tale teoria generale venga a ridursi ad una assai naturale e non difficile estensione dell'ordinaria teoria relativa alle proprietà differenziali di 1° ordine, cioè, della classica geometria riemanniana.

BIBLIOGRAFIA ⁽⁶⁷⁾

- 1 - P. DEL PEZZO - *Sugli spazi tangenti ad una superficie o ad una varietà immersa in uno spazio di più dimensioni*. Rendiconto R. Accad. Napoli, anno XXV, 1886, pp. 176-180.
- 2 - E. E. LEVI - *Saggio sulla teoria delle superficie a due dimensioni immerse in un iperspazio*. Annali R. Scuola Normale Superiore, Pisa, 1905, vol. X.
- 3 - E. PASCAL - *La teoria delle forme differenziali di ordine e grado qualunque*. Memorie R. Accademia dei Lincei, ser. 5., vol. 8°, 1909, pp. 1-102.
- 4 - E. BOMPIANI - *Recenti progressi nella geometria proiettiva differenziale degli iperspazi*. Proceedings of the Fifth International Congress of Mathematicians, Cambridge, 1912, Vol. II.
- 5 - — — — *Sopra alcune estensioni dei teoremi di Meusnier e di Eulero*. Atti R. Accad. Torino, vol. 48, 1913, pp. 393-410.
- 6 - — — — *Alcune proprietà proiettivo-differenziali dei sistemi di rette negli iperspazi*. Rendiconti Circolo Matem. Palermo, vol. 37, 1914, pp. 805-831.
- 7 - — — — *Forma geometrica delle condizioni per la deformabilità delle ipersuperficie*. Rendiconti Lincei, ser. 5., vol. 23, 1914, 1° sem., pp. 126-131.
- 8 - — — — *Sullo spazio d'immersione di superficie possedenti dati sistemi di curve*. Rendiconti R. Istituto Lombardo, 1914, vol. 47, pp. 177-192.
- 9 - — — — *Problemi nuovi di geometria metrico-differenziale*. Rendiconti Lincei, ser. 5, vol. 24, 1915, 1° sem., pp. 1193-1199.
- 10 - — — — *Analisi metrica delle quasi-asintotiche sulle superficie degli iperspazi*. Ibid., ser. 5, vol. 25, 1916, 1° sem., pp. 493-497, 576-578.
- 11 - — — — *Basi analitiche per una teoria delle deformazioni delle superficie di specie superiore*. Ibid., pp. 627-634.
- 12 - — — — *Les hypersurfaces déformables dans un espace euclidien réel à $n(>3)$ dimensions*. Comptes Rendus de l'Acad., Paris, t. 164, 1917, pp. 508-510.

(67) Questo indice bibliografico comprende, oltre alle opere citate nel corso del presente lavoro, le recenti pubblicazioni sul calcolo assoluto generalizzato e la geometria differenziale nell'indirizzo del VITALI.

- 13 - E. BOMPIANI - *Affinità e superficie applicabili*. Rendiconti Lincei, ser. 5., vol. 26, 1917, 1° sem., pp. 590-596.
- 14 - — — - *Sur les courbes quasi-asymptotiques des surfaces dans un espace quelconque*. Comptes Rendus de l'Acad. Paris, t. 168, 1919, pp. 755-757.
- 15 - — — - *Invarianti e covarianti metrici nelle deformazioni di specie superiore delle superficie*. Rendiconti Lincei, ser. 5., vol. 28, 1919, 2° sem., pp. 254-258 (Nota I) e 317-321 (Nota II); vol. 29, 1920, 1° sem., pp. 11-16 (Nota III) e vol. 30, 1921, 1° sem., pp. 55-59 (Nota IV).
- 16 - — — - *Determinazione delle superficie integrali d'un sistema di equazioni a derivate parziali lineari ed omogenee*. Rendiconti R. Istit. Lombardo, vol. 52, 1919, pp. 610-636.
- 17 - R. KÖNIG - *Beiträge zu einer allgemeinen linearen Mannigfaltigkeitslehre*. Jahresber. Deutsch. Mathem. Vereinigung, B. 28, 1919, pp. 213-228.
- 18 - E. BOMPIANI - *Studi sugli spazi curvi. La seconda forma fondamentale di una V_m in V_n* . Atti R. Istituto Veneto, t. 80, 1920-21, pp. 1113-1145.
- 19 - — — - *Sistemi coniugati sulle superficie degli iperspazi*. Rendiconti Circolo Matem. Palermo, t. 46, 1922, pp. 91-104.
- 20 - J. A. SCHOUTEN e D. J. STRUIK - *Einführung in die neueren Methoden der Differentialgeometrie*. "Christiaan Huygens", P. Noordhoff, Groningen, t. I, 1921-22, pp. 333-353, e t. II, 1922-23, pp. 1-24, 155-171, 291-306.
- 21 - G. VITALI - *I fondamenti del calcolo assoluto generalizzato*. Giornale di Matematiche, vol. 61, 1923, pp. 157-202.
- 22 - V. HLAVATÝ - *Sur les courbes quasi-asymptotiques*. "Christiaan Huygens", t. III, 1923-24, pp. 209-245.
- 23 - É. CARTAN - *La géométrie des espaces de Riemann*. Paris, Gauthier-Villars, 1925.
- 24 - — — - *Les groupes d'holonomie des espaces généralisés*. Acta Mathematica, t. 48, 1925, pp. 1-42.
- 25 - E. BORTOLOTTI - *Su di una generalizzazione della teoria delle curve, e sui sistemi coniugati di una V_2 in V_n* . Rendiconti R. Istituto Lombardo, vol. 58, 1925, pp. 413-459.
- 26 - R. LAGRANGE - *Calcul différentiel absolu*. Paris, Gauthier-Villars, 1926.
- 27 - J. A. SCHOUTEN - *Erlanger Programm und Übertragungslehre. Neue Gesichtspunkte zur Grundlegung der Geometrie*. Rendiconti Circolo Matem. Palermo, t. 50, 1926; pp. 142-169.
- 28 - M. JANET - *Sur la possibilité de plonger un espace riemannien donné dans un espace euclidien*. Annales Soc. Polonaise de Mathém., t. 5, 1926, pp. 38-43.
- 29 - A. TERRACINI - *Esposizione di alcuni risultati di geometria proiettiva differenziale negli iperspazi*. Append. III al Trattato di Geom -

- tria Proiettiva Differenziale* di G. FUBINI ed E. CECI (Bologna, Zanichelli, 1926-27) pp. 729-769.
- 30 - É. CARTAN - *Sur la possibilité de plonger un espace riemannien donné dans un espace euclidien*. Annales Soc. Polonaise, t. 6, 1927, pp. 1-7.
- 31 - E. BOMPIANI - *Alcune idee generali per lo studio differenziale delle varietà*. Rendiconti Lincei, ser. 6. vol. 5^o, 1927, pp. 383-389.
- 32 - G. VITALI - *Sopra una derivazione covariante nel calcolo assoluto generalizzato*. Ibid., vol. 6^o, 1927, pp. 201-206 (Nota I) e 278-282 (Nota II).
- 33 - E. BORTOLOTTI - *Spazi subordinati: equazioni di Gauss e Codazzi*. Bollettino Unione Matem. Italiana, vol. 6^o, 1927, pp. 134-137.
- 34 - G. VITALI - *Geometria nello spazio hilbertiano*. Atti R. Istituto Veneto, t. 87, 1927-28, pp. 349-428.
- 35 - A. TONOLO - *Una espressione dei simboli di Riemann di prima specie per le varietà immerse negli spazi euclidei*. Bollettino Unione Matem. Italiana, vol. 7^o, 1928, pp. 34-36.
- 36 - G. VITALI - *Sulle derivazioni covarianti nel calcolo assoluto generalizzato*. Rendiconti Lincei, ser. 6., vol. 7^o, 1928, pp. 626-629.
- 37 - E. BORTOLOTTI - *Varietà minime infinitamente vicine in una V_n riemanniana*. Memorie R. Accad. Bologna, ser. VIII, t. 5^o, 1927-28, pp. 43-48.
- 38 - — — — *Scostamento geodetico e sue generalizzazioni*. Giornale di Matematiche, vol. 66, 1928, pp. 153-191.
- 39 - G. ALIPRANDI - *Sulle evolute delle curve*. Bollettino Unione Matem. Italiana, vol. 7^o, 1928, pp. 142-147.
- 40 - — — — *Il calcolo assoluto generalizzato in una variabile e le derivate del Vitali*. Atti R. Istit. Veneto; t. 87, 1927-28, pp. 1187-1216.
- 41 - A. TONOLO - *Studi di geometria metrica delle superficie dello spazio lineare a quattro dimensioni*. Rendiconti Lincei, ser. 6., vol. 8^o, 1928, pp. 138-142.
- 42 - G. VITALI - *Sulla curvatura delle varietà*. Bollettino Unione Matem., vol. 7^o, 1928, pp. 173-175.
- 43 - — — — *Rapporti inattesi fra alcuni rami della matematica*. Atti Congr. Internaz. dei Matematici, Bologna 1928, tomo 2^o, pp. 299-302.
- 44 - — — — *Sopra alcuni invarianti associati ad una varietà e sopra i sistemi principali di normali delle superficie*. Annales de la Société Polonaise de Mathém., 1928, t. 7^o, pp. 43-67.
- 45 - — — — *Sistemi principali di normali a una varietà giacenti nel suo σ_2* . Ibid., pp. 242-251.
- 46 - G. ALIPRANDI - *Sopra le normali principali (secondo il Vitali) di una superficie generica dello spazio hilbertiano*. Rendiconti Lincei, ser. 6., vol. 8^o, 1928, pp. 273-276.
- 47 - — — — *Determinazione della terna principale (del Vitali) di una superficie generica, considerata come terna autopolare del cono geodetico*. Ibid., pp. 356-359.

- 48 - M. PREVIATTI BORTOLOZZI - *Sopra l'equivalenza di due equazioni che si presentano nella determinazione della terna principale del Vitali per una superficie generica dello spazio hilbertiano*. Ibid. vol. 9^o, 1929, pp. 48-49.
- 49 - A. TONOLO - *Determinazione di un particolare sistema di normali delle superficie dello spazio S_4* . Atti R. Accad. Torino, vol. 64, 1929, pp. 69-88.
- 50 - G. VITALI - *Le identità di Bianchi nei simboli di Riemann nel calcolo assoluto generalizzato*. Rendiconti Lincei, ser. 6., vol. 9^o, 1929, pp. 190-192.
- 51 - I. SACILOTTO - *I simboli di Riemann nel calcolo assoluto generalizzato*. Ibid., pp. 213-217.
- 52 - G. VITALI - *Calcolo indiretto di alcuni determinanti*. Atti Istituto Veneto, t. 88, 1928-29, pp. 289-294.
- 53 - I. SACILOTTO - *Normali associate alle direzioni di una varietà generica a tre dimensioni giacente in uno spazio lineare a sei dimensioni*. Ibid., pp. 355-359.
- 54 - G. VITALI - *Forme differenziali a carattere proiettivo associate a certe varietà*. Ibid., pp. 361-368.
- 55 - G. ALIPRANDI - *Normali di particolari superficie col σ_2 a quattro dimensioni*. Bollettino Unione Matem. Italiana, vol. 8^o, 1929, pp. 25-29.
- 56 - G. VITALI - *Sui centri di curvatura delle geodetiche di una varietà*. Rendiconti Lincei, ser. 6., vol. 9^o, 1929, pp. 391-394.
- 57 - A. TONOLO - *Fondamenti di geometria metrica delle superficie dello spazio lineare a cinque dimensioni*. Rendiconti Circolo Matem. Palermo, t. 53, 1929, pp. 437-470.
- 58 - G. VITALI - *Sopra alcune quistioni algebriche che si presentano nel precedente lavoro del prof. Tonolo (57)*. Ibid., pp. 471-475.
- 59 - M. LICENI - *Sulla forma F_2 di Fubini-Vitali*. Atti Istit. Veneto, t. 88, 1928-29, pp. 903-908.
- 60 - — — — *Sulla forma F_2 del Fubini*. Rendiconti Lincei, ser. 6., vol. 9^o, 1929, pp. 144-146.
- 61 - A. TONOLO - *Classificazione delle superficie dello spazio hilbertiano il cui spazio 2-tangente è a quattro dimensioni*. Ibid., pp. 598-602 (Nota I), 713-718 (Nota II), 853-857 (Nota III).
- 62 - — — — *Una proprietà caratteristica delle superficie ipersferiche dello spazio S_4* . Bollettino Unione Matem. Italiana, vol. 8^o, 1929, pp. 132-137.
- 63 - — — — *Una proprietà delle varietà minime nello spazio hilbertiano*. Giornale di Matem., vol. 67, 1929, pp. 172-176.
- 64 - G. VITALI - *Sopra i problemi di massimo o di minimo riguardanti le varietà nello spazio hilbertiano*. Rendiconti Istit. Lombardo, ser. 2., vol. 62, 1929, pp. 127-137.
- 65 - — — — *Geometria nello spazio hilbertiano*. Bologna, Zanichelli 1929.

- 66 - E. BORTOLOTTI - *Leggi di trasporto nei campi di rettori applicati ai punti di una curva o di una V_m in V_n riemanniana*. Memorie Accad. Bologna, ser. 8., t. 7^o, 1929-30, pp. 11-20.
- 67 - A. TONOLO - *Relazioni geometriche fra due sistemi di normali di una superficie dello spazio hilbertiano*. Annales de la Société Polon. de Mathém., t. 8^o, 1929.
- 68 - G. VITALI - *Sopra alcune involuzioni delle tangenti ad una superficie*. Atti Istit. Veneto, t. 89, 1929-30, pp. 107-112.
- 69 - M. CALONGHI - *Sulle asintotiche delle superficie*. Ibid., pp. 199-201.
- 70 - G. ZWIRNER - *Una proprietà della varietà principale di una superficie con il π_2 a due dimensioni*. Ibid., pp. 195-198.
- 71 - G. VITALI - *Sulle equazioni secolari*. Atti della Società Italiana per il Progr. delle Scienze, 18^a, Riunione, 1929; vol. II, pp. 3-5.
- 72 - M. LICENI - *Sull'uso della rappresentazione funzionale nello studio della geometria*. Ibid., pp. 5-7.
- 73 - G. ALIPRANDI - *Sulle normali principali delle varietà*. Ibid., pp. 8-9.
- 74 - A. TONOLO - *Studi di geometria metrica delle superficie dello spazio lineare a quattro dimensioni*. Rendiconti Circolo Matem. Palermo, t. 54, 1930, pp. 150-176.
- 75 - G. VITALI - *Saggio di ricerche geometrico-differenziali*. Atti Istit. Veneto, t. 89, 1929-30, pp. 379-381.
- 76 - V. SAVOIA - *Spazi di carattere proiettivo-differenziale associati a certe varietà*. Ibid., pp. 383-389.
- 77 - A. TONOLO - *Sistemi principali di normali di una V_m immersa in una V_n* . Bollettino Unione Matem. Italiana, vol. 9^o, 1930, pp. 3-6.
- 78 - P. BURGATTI, T. BOGGIO, C. BURALI-FORTI - *Geometria differenziale*. Bologna, Zanichelli, 1930.
- 79 - G. ALIPRANDI - *Sopra alcune involuzioni delle tangenti ad una superficie*. Atti Accad. Torino, vol. 65, 1930, pp. 149-156.
- 80 - G. VITALI - *Nuovi contributi alla nozione di derivazione covariante; con appendici di G. ALIPRANDI, R. BALDONI, M. LICENI, I. SACILOTTO*. Rendiconti Semin. Matem. della R. Univ. di Padova, anno 1^o, 1930, pp. 46-72.
- 81 - — — — *Evoluta (?) di una qualsiasi varietà dello spazio hilbertiano*. Annali di Matematica, ser. 4., t. 8^o, 1930, pp. 161-172.
- 82 - L. CESTONARO - *Una proprietà delle superficie col Π_2 a tre dimensioni*. Bollettino Unione Matem. Italiana, vol. 9^o, 1930, pp. 74-79.
- 83 - G. ALIPRANDI - *Sugli estremi di corde normali a una linea e a una superficie*. Ibid., pp. 90-95.
- 84 - R. BALDONI - *Sistemi principali di normali ad una varietà nel suo Π_3* . Rendiconti Lincei, ser. 6., vol. 11, 1930, pp. 149-153 e 261-265.
- 85 - P. CATTANEO - *Sopra una classe di varietà cicliche*. Ibid., vol. 11, 1930, pp. 659-665 e vol. 12, 1930, pp. 23-26.

- 86 - G. VITALI - *Determinazione della superficie ad area minima nello spazio hilbertiano*. Rendiconti Semin. Matem. Padova, anno I, 1930, pp. 157-163.
 - 87 - — — — *Trentennio di pensiero matematico* Atti Soc. Ital. per il Progr. delle Scienze, 19 Riunione, 1930; vol. I, pp. 315-327.
 - 88 - E. BORTOLOTTI - *Sulle forme differenziali quadratiche specializzate*. Rendiconti Lincei, ser. 6., vol. 12^o, 1930, pp. 541-547.
 - 89 - — — — *Calcolo assoluto rispetto a una forma differenziale quadratica specializzata*. Ibid., vol. 13^o, 1931, pp. 12-25.
 - 90 - — — — *Una generalizzazione del calcolo assoluto rispetto a una forma differenziale quadratica specializzata*. Ibid., pp. 104-108.
 - 91 - — — — *Sulle varietà subordinate*. Rendiconti Istit. Lombardo, Vol. 64, 1931, pp. 441-463.
 - 92 - — — — *Calcolo assoluto generalizzato di Pascal-Vitali e intorno dei vari ordini di un punto su di una varietà riemanniana*. Atti Istit. Veneto. t. 90, 1930-31, pp. 461-478; ed Atti della Soc. Italiana per il Progr. delle Scienze, XIX^a Riunione, 1930, vol. II., pp. 15-16.
 - 93 - — — — *Vedute geometriche sul calcolo assoluto del Vitali, e applicazioni*. Rendiconti Semin. della Facoltà di Scienze della R. Università di Cagliari, anno I, 1931, pp. 10-12.
 - 94 - M. LICENI - *Sulle espressioni sintetiche della derivazione covariante*. Atti Soc. Progr. Scienze, XIX^a Riunione, 1930, vol. II, pp. 7-9.
 - 95 - R. BALDONI - *Sui sistemi d'infinitè rette*. Ibid., pp. 33-38.
 - 96 - V. SAVOIA - *Sulle ipersuperficie considerate come involucri d'iperpiani*. Ibid., pp. 38-44.
 - 97 - E. SIMONETTO - *Sopra alcune varietà dello spazio hilbertiano*. Bollettino Unione Matem. Italiana, vol. 10^o, 1931, pp. 14-16.
 - 98 - M. PASTORI - *Le identità di Veblen nel calcolo assoluto generalizzato del Vitali*. Ibid., pp. 202-205.
 - 99 - — — — *I sistemi assoluti di Pascal-Vitali e la derivazione parziale dei tensori*. Atti Pontif. Accademia Nuovi Lincei, anno 84^o, 1930-31.
 - 100 - A. DUSCHER, W. MAYER - *Lehrbuch der Differential-Geometrie, Band II. Riemannsche Geometrie* (von W. MAYER). B. G. Teubner, 1930.
-