REVUE DE STATISTIQUE APPLIQUÉE

M. MAURIN

Note sur l'article de J. C. Bastide paru dans la revue de statistique appliquée vol. XXXVI n° 3, 1988, pages 5-14

Revue de statistique appliquée, tome 37, nº 4 (1989), p. 83-87

<http://www.numdam.org/item?id=RSA_1989__37_4_83_0>

© Société française de statistique, 1989, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Revue de statistique appliquée » (http://www.sfds.asso.fr/publicat/rsa.htm) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Rev. Statistique Appliquée, 1989, **XXXVII** (4), 83-87

NOTE SUR L'ARTICLE DE J.C. BASTIDE paru dans LA REVUE DE STATISTIQUE APPLIQUÉE VOL. XXXVI N° 3, 1988, PAGES 5 - 14

M. MAURIN
INRETS-LEN

L'article de M. BASTIDE contient un exposé intéressant à propos d'une modélisation des perturbations statistiques qui affectent les mesures des niveaux de pression sonore (les niveaux de bruit mesurés avec un sonomètre et exprimés en décibels - pondérés A ou non), notamment avec les hypothèses (M) relatives au processus $V(t)$ de la puissance rayonnée. Dans cette note nous revenons uniquement sur l'hypothèse complémentaire liée au caractère gaussien du processus $L(t) = 10 \text{ Log } V(t)$(paragraphe 2.c page 10), qui bien qu'elle figure couramment en acoustique routière par exemple (Beranek, Migneron chap 1) mérite une discussion statistique.

A. Page 8 les hypothèses (M) qui décrivent le processus V(t) sont celles d'un processus à accroissements indépendants homogène dans le temps, avec une partie aléatoire centrée $U(t)$ définie par des conditions sur les moments d'ordre 1 et 2 qui pourrait être un processus gaussien de Wiener ou Wiener -Levy (Cox Miller Chap. 5, Girault chap. 3). En pratique les niveaux de bruit mesurés instantanés correspondent à une mesure sur un intervalle δtauquel correspond un accroissement δV ; dans le cadre d'un processus de Wiener-Levy pour $U(t)$, $\delta V/\delta t$est gaussien centré de variance $\sigma^2/\delta t$, (le σ^2des hypothèses (M)). Bien entendu le processus $V(t)$ et les incréments δV ne peuvent être rigoureusement gaussiens puisque $V(t)$ est positif, cependant si l'on désire introduire une hypothèse gaussienne dans la modélisation acoustique il serait plus conforme à l'esprit du modèle que celle-ci s'applique aux accroissements $\delta V/\delta t$ plutôt qu'au processus du niveau de pression $L(t) = 10 \text{ Log } \delta V/\delta t$. Il ne semble donc pas que cette hypothèse soit entièrement cohérente avec (M).

B. Quoiqu'il en soit il est facile de se passer de cette hypothèse quand on recherche des informations sur l'accroissement moyen $K = 1/TV[OT]$, sur $\text{Leq}_{[OT]} = 1/\alpha \text{ Log } K$et sur leurs estimateurs à partir des données recueillies Leq_i mesurées sur des périodes Δt_i ou des $L(t_i) = 10 \text{ Log } \delta V_i/\delta t$ quasi instantanés ($\alpha = 1/10 \text{ Log } 10 \simeq 0,23$).

Lorsque $\alpha L =$ Log V suit la loi normale $\mathcal{N}(\alpha E_L, \alpha^2\sigma_L^2)$alors (Johnson Kotz 1970 Chap 14)

$$\begin{aligned} E_v &= \exp\left(\alpha E_L + \alpha^2\sigma_L^2/2\right) \\ \sigma_V^2 &= E_V^2\left(\exp\left(\alpha^2\sigma_L^2\right) - 1\right) \end{aligned} \tag{1}$$

et aussi :

$$\begin{aligned} \alpha E_L &= \text{Log } E_V - 1/2 \text{ Log } \left(1 + \sigma_V^2/E_V^2\right) \\ \alpha^2\sigma_L^2 &= \text{Log } \left(1 + \sigma_V^2/E_V^2\right) \end{aligned} \tag{2}$$

Ce sont des relations exactes, mais d'une manière plus générale les règles approchées des calculs des moments de $Y = f(X)$ donnent (Johnson Kotz 1969 Chap. 1) :

$$\begin{aligned} E_y &\simeq f(E_x) + \sigma_x^2/2f''(E_x) \\ \sigma_y^2 &\simeq \sigma_x^2 f'(E_x)^2 \end{aligned} \tag{3}$$

qui sont d'autant plus précises que les variances $\sigma_y^2 et \sigma_x^2$sont faibles. Avec $V =$ exp (αL), ou $L = 1/\alpha$ Log Vcela donne les approximations

$$\begin{aligned} E_V &\simeq \exp\left(\alpha E_L\right)\left(1 + \alpha^2\sigma_L^2/2\right) \\ \sigma_V^2 &\simeq \alpha^2\sigma_L^2 \exp\left(2\alpha E_L\right) \end{aligned} \tag{4}$$

et :

$$\begin{aligned} E_L &\simeq 1/\alpha \text{ Log } E_V - 1/2\alpha\sigma_V^2/E_V^2 \\ \sigma_L^2 &\simeq 1/\alpha^2\sigma_V^2/E_V^2 \end{aligned} \tag{5}$$

qui sont équivalentes à (1) et (2) pour des variances faibles.

Par conséquent on retrouve l'estimateur $\widehat{\text{Leq}}_N = \overline{L} + \alpha/2S^2$sans autre hypothèse sur $L(t)$ que l'existence des deux premiers moments. En pratique $\overline{L}$ suit une loi proche de $\mathcal{N}\left(E_L, \sigma_L^2/n\right)$, S^2une loi proche de $\mathcal{N}\left(\sigma_L^2, n\left(\mu_{4L} - \sigma_L^4\right)/(n-1)^2\right)$ et $\text{cov}(\overline{L}, S^2) = \mu_{3L}/n$ (Fourgeaud Fuchs Chap. 8). Cet estimateur a donc pour variance approximative $\sigma_L^2/n + \alpha\mu_{3L}/n + n(\alpha/2)^2\left(\mu_{4L} - \sigma_L^4\right)/(n-1)^2$qui diffère de la variance indiquée par la quantité $\left(\alpha\mu_{3L} + (\alpha/2)^2(\mu_{4L} - 3\sigma_L^4)\right)/n + o(1/n)$.L'abandon de l'hypothèse de normalité pour $L(t)$ conduit uniquement à une variance de l'estimateur plus élevée en 1/n, avec des termes qui dépendent de l'asymétrie μ_{3L} et de l'aplatissement $\mu_{4L} - 3\sigma_L^4$.

Au besoin on peut prendre davantage de termes dans le développement (3)

$$E_y \simeq f(E_x) + \sum_{n\geq 2} \mu_{nx}/n! f^{(n)}(E_x)$$

avec μ_{nx} les moments centrées de la loi de X, soit ici

$$E_V \simeq \exp(\alpha E_L)(1 + \sum_{n\geq 2} \alpha^n \mu_{nL}/n!)$$

et puis (6) :

$$\text{Leq} \simeq E_L + 1/\alpha \text{ Log} \left(1 + \sum_{n\geq 2} \alpha^n \mu_{nL}/n!\right) = E_L + \alpha/2\sigma_L^2 + \alpha^2/6\ \mu_{3L} + \alpha^3/24\ (\mu_{4L} - 3\sigma_L^4) + \ldots \quad (6)$$

Il est donc aisé de construire, sans hypothèse particulière sur L, un estimateur à partir des statistiques $1/n \sum_i (L_i - \overline{L})^k$ dont on connaît les espérances, les variances et les covariances (Kendall Stuart Chap. 10).

C. En A nous avons signalé le peu d'opportunité acoustique de l'hypothèse gaussienne pour L, en B montré que cette hypothèse est inutile. Si malgré tout elle est conservée on sait que la loi de V converge vers une loi normale lorsque $\sigma_L$ou σ_V/E_Vtendent vers zéro (Johnson Kotz 1970). Par conséquent la modélisation gaussienne de L s'accompagne d'un comportement presque gaussien pour V, c'est-à-dire plus satisfaisant sur le plan acoustique, lorsque $\sigma_L$est faible.

En d'autres termes cela signifie que l'hypothèse gaussienne pour L estavant tout une commodité analytique (formules (1) et (2)) qui n'est pas fondée dans la modélisation acoustique (M) et dont on peut se passer. Moyennant quoi elle "pourrait" être justifiée précisément quand on peut encore plus facilement s'en passer puisque les approximations (4) et (5) ainsi qu'un comportement presque gaussien pour V s'améliorent simultanément avec des $\sigma_L$ou des $\sigma_V$faibles. C'est d'ailleurs ce qui se passe lorsque la durée commune d'intégration Δt des Leq_imesurés augmente puisque $\sigma_V$décroît en $1/\sqrt{\Delta t}$; peut-être est-ce là une des raisons de la présence répétée de cette hypothèse.

D. L'application en fin d'article illustre d'ailleurs le peu de cas qui est fait de cette hypothèse pour L puisque des intervalles de confiance (non symétriques) pour $E_L$sont établis à partir d'intervalles de confiance symétriques pour E_V.Ces derniers proviennent de statistiques sur les incréments de V et de leurs propriétés normales exactes ou approchées, tandis que l'on retourne à la précision des intervalles pour $E_L$par l'intermédiaire du coefficient $\gamma_V = \sigma_V/E_V$.

Il y a plusieurs relations pour exprimer γ_V; (4) et (5) donnent $\gamma_{V4} = \alpha\sigma_L \left(1 + \alpha^2\sigma_L^2/2\right)^{-1}$, $\gamma_{V5} = \alpha\sigma_L$et l'hypothèse gaussienne sur L réapparaît pour donner $\gamma_{Vg} = \left(\exp\left(\alpha^2\sigma_L^2\right) - 1\right)^{1/2}$. Puisque$\gamma_{Vg} \geq \gamma_{V4}$ et γ_{V5}cela entraîne une sur-évaluation de γ_V à partir de $\sigma_L$dans le cadre de l'hypothèse gaussienne, et accessoirement une sur-évaluation du nombre de mesures à faire pour un intervalle de confiance à précision donnée (tables de Rock).

Au besoin la poursuite de (3) et (4) (sans hypothèse particulière sur L) donne une relation plus précise avec μ_{3L}et μ_{4L}(annexe) :

$$\gamma_{V4'} = \alpha\sigma_L \left[1 + \frac{\alpha\sigma_L}{2}\frac{\mu_{3L}}{\sigma_L^3} + \frac{\alpha^2\sigma_L^2}{4}\left(7\frac{\mu_{4L} - 3\sigma_L^4}{6\sigma_L^4} + 1\right) - \frac{\alpha^2\sigma_L^2}{8}\left(\frac{\mu_{3L}}{\sigma_L^3}\right)^2\right] \tag{7}$$

qui se réduit à $\alpha\sigma_L\left[1 + \alpha^2\sigma_L^2/4\right] \leq \gamma_{Vg}$ pour μ_{3L} et $\mu_{4L} - 3\sigma_L^4$ nuls.

Références

Acoustique :

BERANEK L.L., Criteria for noise and vibration in communities, buildings and vehicles, in Noise and vibration control, chap. 18 1971, *Mc Graw Hill.*

MIGNERON J.G. Acoustique urbaine, 1980,*Masson, Presses de l'Université Laval-Quebec*

Statistique :

COX D.R., MILLER H.D., The theory of stochastics processes, 1965, *Chapman and Hall.*

FOURGEAUD C., FUCHS A., Statistique, 1967, *Dunod.*

GIRAULT M., Processus aléatoires, 1965, *Dunod*

JOHNSON N.L., KOTZ S., Discrete distributions, 1969, *J. Wiley*

JOHNSON N.L., KOTZ S., Continuous univariate distributions, 1, 1970, *J. Wiley*

KENDALL G.M., STUART A., The advanced theory of statistics, vol. 1, 1963, *Ch. Griffin.*

Annexe

Poursuite des développements (3) et (4)

1) On a :

$$E_y = f(E_x) + \sum_{n\geq 2} \mu_{nx}/n!\, f^{(n)}(E_x),$$

puis :

$$y - E_y = (x - E_x) f'(E_x) + \sum_{n\geq 2} \left[(x - E_x)^n - \mu_{nx}\right]/n!\, f^{(n)}(E_x)$$

d'où :

$$(y-E_y)^2 = (x-E_x)^2 f^2(E_x) + \left[(x-E_x)^4 + \mu_{2x}^2 - 2(x-E_x)^2 \mu_{2x}\right]^2 f''^2(E_x)/4$$
$$+ (x-E_x)^3 f'(E_x) f''(E_x) + (x-E_x)^4 f'(\ ) f'''(E_X)/3$$
$$- \mu_{2x}(x-E_x) f'(E_x) f''(E_x) - \mu_{3x}(x-E_x) f'(E_x) f'''(E_x)/3 + \ldots$$

(limitation aux termes provenant de $(x-E_x)^k, k \leq 4$), et puis

$$\sigma_y^2 \simeq \sigma_x^2 f'^2((E_x) + \mu_{3x} f' | E_x) f''(E_x) + \left(\mu_{4x} - \mu_{2x}^2\right) f''^2(E_x)/4$$
$$+ \mu_{4x} f'(E_x) f'''(E_x)/3 + \ldots$$

2) Avec $V = exp(\alpha L)$cela donne :

$$\sigma_v^2 = \exp(2\alpha E_L)\left[\alpha^2\sigma_L^2 + \alpha^3\mu_{3L} + \alpha^4\left(\mu_{4L} - \sigma_L^4\right)/4 + \alpha^4\mu_{4L}/3 + \ldots\right]$$
$$E_V = \exp(\alpha E_L)\left[1 + \alpha^2\sigma_L^2/2 + \alpha^3\mu_{3L}/6 + \alpha^4\mu_{4L}/24 + \ldots\right]$$
$$\gamma_v = \sigma_V/E_V = \alpha\sigma_L\left[1 + \alpha\mu_{3L}/\sigma_L^2 + \alpha^2\left(7\mu_{4L} - 3\sigma_L^4\right)/12\sigma_L^2 + \ldots\right]^{1/2}$$
$$\left[1 - \alpha^2\sigma_L^2/2 - \alpha^3\mu_{3L}/6 - \alpha^4\mu_{4L}/24 + \alpha^4\sigma_L^4/4 + \ldots\right]$$
$$\gamma_v = \alpha\sigma_L\left[1 + \alpha\mu_{3L}/2\sigma_L^2 + \alpha^2\left(7\mu_{4L} - 3\sigma_L^4\right)/24\sigma_L^2 - \alpha^2\mu_{3L}^2/8\sigma_L^4 + \ldots\right]$$
$$\left[1 - \alpha^2\sigma_L^2/2 + \ldots\right]$$

3) d'où la nouvelle approximation (7) :

$$\gamma_V = \alpha\sigma_L\left[1 + \alpha\mu_{3L}/2\sigma_L^2 + \alpha^2\left(7\mu_{4L} - 15\sigma_L^4\right)/24\sigma_L^2 - \alpha^2\mu_{3L}^2/8\sigma_L^4\right]$$

ou :

$$\gamma_V = \alpha\sigma_L\left[1 + \frac{\alpha\sigma_L}{2}\frac{\mu_{3L}}{\sigma_L^3} + \frac{\alpha^2\sigma_L^2}{4}\left(7\frac{\mu_{4L} - 3\sigma_L^4}{6\sigma_L^4} + 1\right) - \frac{\alpha^2\sigma_L^2}{8}\left(\frac{\mu_{3L}}{\sigma_L^3}\right)^2\right]$$