REVUE DE STATISTIQUE APPLIQUÉE

J. J. DAUDIN
E. POMMIÈS
P. VARRALL
J. BECQUET

Modélisation stochastique de la maintenance d'une ligne de métro

Revue de statistique appliquée, tome 35, n° 4 (1987), p. 37-53
<http://www.numdam.org/item?id=RSA_1987__35_4_37_0>

© Société française de statistique, 1987, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Revue de statistique appliquée » (http://www.sfds.asso.fr/publicat/rsa.htm) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Rev. Statistique Appliquée, 1987, **XXXV** (4), 37-54

MODÉLISATION STOCHASTIQUE DE LA MAINTENANCE D'UNE LIGNE DE MÉTRO

J.J. DAUDIN, E. POMMIÈS

Institut National Agronomique Paris-Grignon,
Département de Mathématique et Informatique,
16, rue Claude Bernard, 75005 Paris.

P. VARRALL

Direction du réseau ferré, Service du matériel roulant,
Régie Autonome des Transports Parisien,
89, rue de Lagny, 75020 Paris.

J. BECQUET

RÉSUMÉ

Une modélisation stochastique a été utilisée pour simuler le comportement du système de maintenance des trains d'une ligne de métro, dans le but d'étudier les intéractions entre la logistique de maintenance, l'organisation des ateliers de réparation et le fonctionnement du service d'exploitation. La distribution des durées inter-événement est étudiée lorsque le nombre de pannes par unité de temps est de type négatif binomial. L'intérêt de ce type de simulation face à des modélisations de type processus de naissance et mort est analysé.

Mots clés : *Binomiale négative, Fiabilité, Loi de Pearson type VI, Simulation stochastique.*

SUMMARY

A stochastic modelisation is used to simulate the maintenance system behavior of the trains of an underground railway ligne in order to study the interactions between the maintenance logistic, the organization of the repair shop and the passenger conveyance department. The c.d.f. of the time between two successive failures under a negative binomial law for counts of breackdown is given. The interest of this kind of simulation model in front of markovian processus modelization is studied.

Key words : *Negative binomial, Fiability, Pearson type VI, Stochastic simulation.*

1. Présentation

a. Objectifs de l'étude

La conception de nouveaux matériels roulants nécessite la détermination des objectifs de disponibilité, fiabilité et maintenabilité de façon à assurer la meilleure qualité de service possible pour un coût global minimum, tout en respectant la sécurité. Il est donc nécessaire de rechercher le compromis favorable entre les différents paramètres pour optimiser la répartition des charges entre le coût

d'acquisition et le coût d'exploitation du matériel roulant, dans le but d'obtenir la disponibilité requise.

D'autre part, la connaissance des interactions entre les différents paramètres agissant sur le système de transport doit permettre de rationaliser les décisions, de façon à minimiser les coûts d'exploitation pour un matériel roulant déjà en service.

La direction du réseau ferré dispose d'un indicateur de l'efficacité du système de transport, appelé qualité de service. Il permet d'évaluer une disponibilité opérationnelle du système de transport par rapport aux voyageurs. Il prend en compte les incidents d'exploitation (les retards, les circulations sans voyageurs, les missions non assurées...) par l'intermédiaire de la formule suivante :

$$QS = \exp(-a^* trp/Te - b^* t/T)$$

où a et b sont des coefficients de pondération.

trp est la somme pondérée des minutes de retard en fonction de la nature des incidents comptabilisés.

Te est la durée du service normal

t est le temps d'exploitation perdu

T est le temps d'exploitation prévu.

On calcule plusieurs sortes de qualité de service :

QS4 : limité aux effets dont la cause est imputable au matériel roulant et qui nous intéresse plus particulièrement ici.

QS3 : limité aux incidents dont la cause est imputable à la RATP à l'exception des grèves, alors que QS2 inclut également ces dernières.

QS1 : sans limitation de cause. C'est la qualité de service ressentie par le voyageur.

L'étude présentée a pour but d'établir les relations qui existent entre la qualité de service QS4 et les 5 ensembles de paramètres suivants :

— le parc disponible,
— la fiabilité du matériel roulant,
— la maintenabilité du matériel roulant,
— la logistique de maintenance,
— les conditions d'exploitation.

b. Description sommaire du fonctionnement réel d'une ligne de métro et de sa maintenance

Une ligne de métro transporte de 20 000 à 30 000 voyageurs par heure dans chaque sens aux heures d'affluence avec des trains qui se suivent à une minute et demie d'intervalle. Par contre en heure creuse la fréquence est beaucoup moins élevée. Cette particularité est fondamentale pour tout le système, car aucun train défaillant ne peut être transféré des garages pendant les heures d'affluence; d'autre part la maintenance est organisée pour faire en sorte que le système fonctionne correctement pendant cette période, les heures creuses ne posant pas de problème fondamental.

La maintenance regroupe l'ensemble des actions, contribuant à maintenir ou à rétablir le matériel roulant dans un état lui permettant d'assurer le service exigé. La maintenance préventive permet de diminuer les défaillances durant le service. La maintenance corrective est l'ensemble des actions de dépannage effectuées suite à une défaillance. Dans cette étude nous sommes surtout intéressés par cette dernière.

Sur chaque ligne, une aire de première intervention rapide, appelé poste de visite (situé à Invalides pour la ligne 13) permet de réaliser la plupart des interventions correctives alors que l'atelier d'entretien (situé à Carrefour Pleyel pour la ligne 13) permet d'assurer les interventions correctives importantes ainsi que toutes les interventions préventives.

c. Données disponibles et données récoltées spécialement pour l'étude

Pour constituer le modèle et pour estimer les paramètres des lois de probabilité, il est impératif de disposer d'informations fiables et en suffisamment grand nombre.

Tout événement provoquant une perturbation des missions prévues déclenche à différents niveaux de la RATP une saisie d'informations. Cette saisie est manuelle, locale et partielle car son but est de répondre à court terme aux besoins des différents services concernés. Seulement une partie des informations recueillies est centralisée et stockée sur un support informatisé. Il a donc été nécessaire de réaliser un important travail de synthèse et de contrôle des données disponibles. Le manque d'harmonisation entre différents services (un même train n'est pas codifié de la même façon d'un service à l'autre) a rendu cette tâche particulièrement délicate.

Certaines informations indispensables à la constitution du modèle n'étant pas recueillies par la RATP, des observations «in situ » ont été nécessaires. La durée d'observation choisie a permis d'accumuler des données sur un millier de défaillances environ et sur la suite des événements engendrés par ces dernières.

Nous avons pu ainsi obtenir la distribution empirique de nombreuses durées inter-événement telles que :

— la durée entre le signalement de l'avarie et le retrait du train de l'exploitation;
— la durée d'attente à Invalides avant l'intervention au poste de visite;
— la durée de l'intervention au poste de visite;
— la durée de transfert des trains du poste de visite à l'atelier;
— la durée d'attente avant l'entrée dans l'atelier;
— la durée des interventions à l'atelier;
— le délai séparant la fin d'une réparation de la remise en service du train.

Enfin les données concernant le nombre de défaillances par semaine pour un type d'incident et pour un type d'avarie données sont issues des sources RATP sur une durée de 2 ans (1983 et 1984).

2. Choix du type de modélisation

Plusieurs modèles peuvent être envisagés pour décrire le fonctionnement d'une ligne de métro; les modèles purement déterministes doivent être exclus à cause de la nature aléatoire de nombreux événements comme les défaillances, la durée des réparations; cependant il faut prendre en compte certaines règles de fonctionnement non aléatoires comme les horaires des ateliers ou le nombre de trains circulant à une heure donnée de la journée.

Dans le cadre d'une modélisation stochastique, on peut admettre la nature markovienne (c'est-à-dire sans mémoire) des événements, à condition de décrire complètement l'état du système à chaque instant considéré. On utilisera alors un modèle markovien à temps continu sous la forme d'un processus de naissance ou mort (voir [1]) où à temps discret (chaine de Markov).

LIGERON et DELAGE [5] ont utilisé un modèle de ce type pour modéliser la disponibilité d'un système de transport.

Définissant les N états que peut prendre le système de transport $E_1, E_2, \ldots, E_N$, ils décrivent les transitions entre ces états à l'aide de la matrice de transition A de terme général a_{ij}, où a_{ij} est la probabilité de passage de l'état E_j à l'état E_i. Ces probabilités de passage ne dépendent pas du temps ce qui est une hypothèse très forte qui permet un traitement analytique du modèle : on obtient alors un système de N équations différentielles à coefficients constants :

$$dP(t)/dt = AP(t) \qquad (1)$$

où P(t) est un vecteur colonne dont le terme général $p_i(t)$ représente la probabilité que le système soit dans l'état E_i au temps t.

Une intégration numérique de ce système d'équations différentielles fournit le vecteur P(t) au cours du temps. La disponibilité D(t), la fiabilité R(t) et la maintenabilité M(t) peuvent être également déduites de l'équation (1).

La résolution analytique repose sur l'hypothèse d'homogénéité. En fait cette dernière hypothèse est peu réaliste dans le cas d'une ligne de métro où le fonctionnement du système est profondément différent selon l'heure de la journée à cause des fortes variations du nombre de passagers dues aux phénomènes des heures de pointe. Le comportement du système de maintenance est lui aussi différent selon l'heure de la journée : il est par exemple impossible de procéder à des transferts de trains défaillants pendant les heures de pointe; d'autre part les horaires de l'atelier de réparation ont également leur importance. Enfin il y a également une non homogénéité des occurrences des défaillances d'une semaine à l'autre. Ce point est détaillé au § 4.

Un modèle markovien non homogène semble donc mieux adapté à la réalité. Cependant, si certains processus non homogènes peuvent être décrits de façon analytique et résolus par intégration d'équations différentielles, comme par exemple les processus de POLYA (voir [1]), la plupart d'entre eux sont trop complexes pour permettre une résolution mathématique.

En résumé, dans le cadre de l'étude de la ligne de métro considérée ici, toute modélisation raisonnable doit tenir compte des caractéristiques suivantes :

i) Présence de règles déterministes de transition entre événements.

ii) Présence de règles de transition aléatoires dont certaines sont fortement non homogènes dans le temps. De plus la variation des règles au cours du temps est discontinue.

On est donc conduit à utiliser un modèle markovien non homogène dont on décrit le fonctionnement par simulation.

3. Description du modèle de simulation

3.1. Structure du modèle

Il est caractérisé à un instant donné par un ensemble d'états dans lesquels se trouvent ses constituants.

1) Etats des trains (11 états possibles pour chacun des 60 trains).

2) Etats des services de réparation (fermé, libre ou occupé).

3) Etat global du système : fermé, ouvert, tranche horaire dans laquelle se trouve le système (heure de pointe ou heure creuse).

Un événement est un changement d'état. Il est caractérisé par :

— ses états de transition

— sa date

— des renseignements complémentaires tels que le type d'avarie et sa gravité. Les avaries sont réparties en 13 types selon l'organe touché (portes, moteur, bogie, etc.). Sa gravité est classée selon 4 catégories :

(1) un simple signalement sans conséquence sur l'exploitation,

(2) une défaillance plus grave, appelée det, qui n'empêche cependant pas le train de poursuivre son service jusqu'au terminus où il est mis hors exploitation,

(3) le stationnement (sta) : le train stationne puis repart avec des voyageurs; il est mis hors exploitation plus tard,

(4) le haut le pied (hlp) : les voyageurs descendent du train et celui-ci est mis immédiatement hors exploitation.

Dans les 2 derniers cas, un retard subi par les voyageurs est comptabilisé, qui est égal à la durée de l'incident.

La figure 1 illustre les états des trains et les liens entre eux.

Une horloge gère les événements. Il s'agit d'une horloge asynchrone qui permet de passer d'un événement à son suivant. Les sauts dans le temps sont de durée inégale, d'où le terme d'asynchrone. L'horloge est constituée d'un dateur, tableau ordonné, géré dynamiquement, des événements futurs. Elle possède 3 mécanismes essentiels :

i) Recherche dans le dateur du prochain événement dans le futur, de son type, sa date et des renseignements complémentaires le concernant.

ii) Activation d'un événement. Le temps est incrémenté. Les changements d'états liés à cet événement sont effectués. Les dates des événements futurs engendrés sont calculées.

iii) Insertion d'un événement dans le dateur.

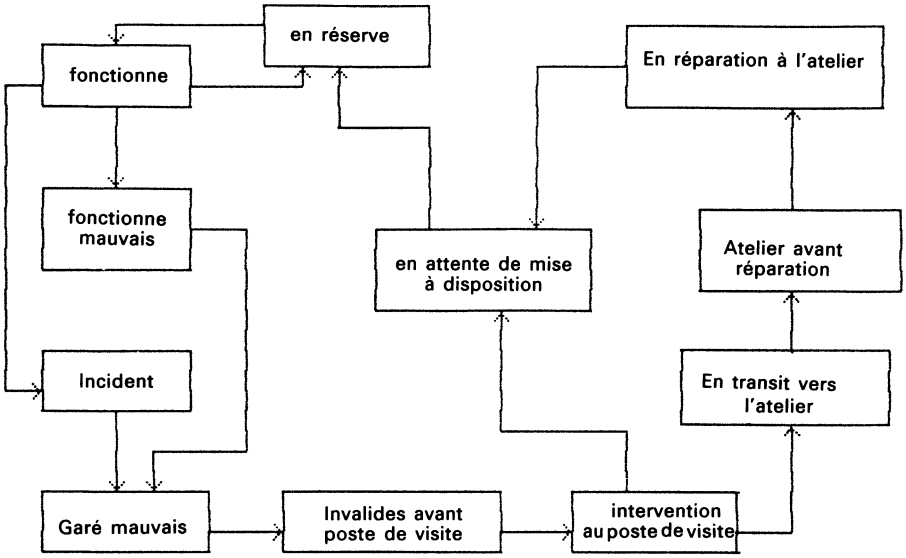

FIGURE 1

Schéma du modèle de simulation.

Le principe du fonctionnement de ce type de simulation stochastique asynchrone est exposé en détail dans l'ouvrage de BRATLEY, FOX et SCHRAGE [2].

3.2. Description des états

a. Etats des trains

1) *Fonctionnement normal* : le train fonctionne avec des voyageurs.

2) *Avarie* : le train fonctionne avec des voyageurs, mais une avarie (simple signalement ou det) a été signalée. Dans cet état le train fonctionne jusqu'à son garage et sa mise hors exploitation.

3) *Réserve* : un train dans cet état est en état de marche, mais ne transporte pas de voyageurs.

4) *Incident.* Il s'agit des 2 cas d'avarie pénalisant le voyageur (sta et hlp).

5) *Garé hors service.* Il s'agit de l'état où se trouvent les trains mis hors exploitation après une avarie.

6) *Attente à Invalides.* Il s'agit de l'état où se trouvent les trains hors service, transférés à Invalides et disponibles pour la visite du contremaître visiteur (cv).

7) *Réparation à Invalides* par le contremaître visiteur.

8) *Attente du départ vers l'atelier*, après la visite du contremaître visiteur.

9) *Attente à l'atelier.* Le train est en attente de réparation à l'atelier.

10) *Réparation à l'atelier.*

11) *Attente de mise à disposition* : après réparation, à Invalides ou à Carrefour Pleyel, le train est mis en attente de service.

b. Description des services de réparation

Le poste de visite d'Invalides est destiné à la réparation des défaillances mineures, rapides à effectuer. Il fonctionne de 6 h à 22 h sans interruption. Ce poste de travail ne peut traiter qu'un seul train à la fois. Il peut être dans l'un des trois états suivants : fermé, libre, occupé.

L'atelier de Carrefour Pleyel, destiné aux réparations importantes et à l'entretien préventif, fonctionne selon les horaires suivants :

Du lundi au mercredi : 7 h 30 à 11 h 45 puis 12 h 45 à 16 h 30.
Du jeudi au vendredi : 7 h 30 à 11 h 45 puis 12 h 45 à 15 h 30.

Trois trains peuvent être traités simultanément à l'atelier en maintenance corrective. L'atelier peut donc être dans l'un des 5 états suivants : fermé, libre, un, deux, trois trains en réparation.

c. Etats globaux du système

Le service d'exploitation fonctionne de façon très différente selon les heures de la journée, ce qui a des répercussions profondes sur le déplacement des trains défaillants et donc sur tout le fonctionnement de la maintenance. Il est donc fondamental de tenir compte de la situation horaire. La journée a été découpée en 9 tranches d'environ 2 heures chacune, et dont 2 d'entre elles forment les heures de pointe (7h20-9h20 et 17h20-19h20). L'effectif moyen de trains circulant durant une tranche donnée est constant et déterminé à l'aide des horaires internes de la RATP. Il est donné pour illustration dans le tableau I. Le système peut donc être dans l'un des neuf états correspondants plus un état supplémentaire, de 0 h 30 à 5 h 20, durant lequel aucun train, sauf les convois de travaux, ne peut circuler, que ce soit en exploitation où hors exploitation.

TABLEAU I

Définition des tranches horaires et nombre moyen de trains en circulation durant la tranche

5 h 20 à 7 h 20	7 h 20 à 9 h 20	9 h 20 à 11 h 20	11 h 20 à 13 h 20	13 h 20 à 15 h 20	15 h 20 à 17 h 20	17 h 20 à 19 h 20	19 h 20 à 21 h 20	21 h 20 à 1 h 15
19	46	30	22	23	32	48	27	15

3.3. *Règles définissant les changements d'état*

Les changements d'état peuvent se faire de façon déterministe ou stochastique. Dans certains cas la règle dépend de l'heure à laquelle intervient l'événement. Les règles d'arrivées des défaillances ainsi que les principales règles de fonctionnement des réparations sont les suivantes :

a. Règles d'occurrence des défaillances

Pour une semaine donnée, pour un type d'avarie donnée et pour une catégorie de gravité donnée, la loi du nombre de pannes est une loi de Poisson ou une loi binomiale négative. La loi de Poisson modélise les défaillances peu fréquentes et dont l'occurrence est plutôt régulière (variance égale à la moyenne) alors que la loi binomiale négative est mieux adapté aux défaillances, dites « contagieuses », survenant par paquets (variance plus forte que la moyenne). Les paramètres de ces lois ont été estimés par la méthode des moments à l'aide du relevé des nombres de défaillances par semaine au cours de deux années successives. Le tableau II donne un exemple des paramètres estimés pour un type d'avarie.

TABLEAU II

Exemple de lois de distribution (et leurs paramètres) des pannes

Gravité Type d'avarie	Haut-le-pied	Stationnement	Divers Equipt Traction	Simple signalement
avarie de type 1	Poisson (0.067)	Poisson (0.31)	Binomiale négative (P = 0.565 et N = 4.745)	Binomiale négative (P = 1.76 et N = 1.82)

La répartition des défaillances selon les 5 jours ouvrables de la semaine est faite de manière équiprobable.

La répartition des défaillances dans les différentes tranches de la journée est faite proportionnellement au nombre de trains en circulation durant la tranche horaire.

Enfin, la minute d'occurrence de la défaillance est choisie selon une loi de distribution uniforme dans la tranche horaire fixée au préalable.

Le retard dû à un haut le pied ou à un stationnement est modélisé par une loi log-normale dont les paramètres ont été estimés de la même façon.

b. Règles de maintenance

Ce sont les plus complexes à établir dans la mesure où elles dépendent de l'heure. Nous avons eu recours aux données récoltées au cours de l'enquête pour les déterminer.

TABLEAU III

Règles de garage et de mise hors exploitation

	Heures creuses	Heures de pointe
Haut-le-pied	Le délai de garage suit une loi uniforme (0,40 mn) La mise hors exploitation est immédiate	
Stationnement	Le délai de garage suit une loi uniforme (0,40 mm)	
DET	Délai de garage uniforme (0,40 mn)	Garage à la fin de l'heure de pointe + uniforme (− 10, + 10 mn)
avarie minime	Délai de garage uniforme (0,40 mn)	Garage à la fin de l'heure de pointe sauf si le parc en état de marche est < seuil. Dans ce cas le garage est reporté entre 20 h et 24 h.

TABLEAU IV

Description des règles de transfert entre le garage et Invalides.
Z est une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre l = 0.018
(l'unité de temps est la minute)

	Garage avant 18 h	Garage après 18 h
Garage en heure de pointe	L'arrivée à Invalides est programmée à partir de 9 h 20 dans un délai Z	Dans 40 % des cas l'arrivée à Invalides est prévue dans un délai Z à compter de 19 h 20 Dans 60 % des cas elle est prévue le lendemain après 9 h 20
Garage en heure creuse	L'arrivée à Invalides est prévue dans un délai Z sauf si cela provoque l'arrivée en heure de pointe; dans ce cas elle est reportée	Dans 40 % des cas l'arrivée à Invalides est prévue dans un délai Z à compter de l'heure de garage Dans 60 % des cas elle est prévue le lendemain après 9 h 20

A titre d'exemple, les tableaux III et IV décrivent d'une part les règles de garage et de mise hors exploitation et d'autre part celles du transfert à Invalides des trains défaillants. Ces dernières règles ne s'appliquent que s'il y a suffisamment de places disponibles à Invalides pour les trains défaillants. Si ce n'est pas le cas une file d'attente est constituée et gérée selon l'évolution du nombre de places libérées par les trains réparés. Les places de garages pour les trains défaillants à Invalides varient selon l'heure de la journée entre 8 le soir et 11 dans le milieu de la journée. Enfin aucun transfert n'est possible durant les heures de pointe.

La durée de l'intervention du contremaître visiteur est modélisée par une variable aléatoire de loi log-normale dont les paramètres ont été estimés à l'aide des données récoltées lors de l'enquête. La durée de réparation à l'atelier est également modélisée par une loi log-normale dépendant du type d'avarie.

Le délai de mise à disposition du service d'exploitation d'un train réparé est modélisé par une loi exponentielle.

Le délai, X, entre la fin de la visite du contremaître visiteur et l'arrivée à l'atelier pour les trains pour lesquels c'est nécessaire, est modélisé de la façon suivante, selon l'heure de la fin de la visite, notée Y :

Si $Y < 15$ h, X suit une loi uniforme [10,40 mn].

Si $Y > 15$ h, X suit une loi uniforme [10,40 mn] à partir du lendemain matin à 6 heures.

Cette règle ne s'applique que s'il y a suffisamment de places de garage à l'atelier. Si ce n'est pas le cas, on attend le moment où une place est disponible.

4. Loi de probabilité des durées séparant des défaillances ayant une distribution binomiale négative

4.1. Hypothèses et notations

L'utilisation de la loi binomiale négative, dont on a observé qu'elle s'ajuste bien à certains types de pannes, peut se justifier de la façon suivante :

Soit Y_i le nombre de défaillances pour un type de panne donné au cours de la semaine i. Y_i suit une loi de poisson de paramètre l_i.

Chaque semaine, l_i est la réalisation d'une variable aléatoire, l, de loi Gamma de paramètres N et 1/P.

Le composé d'une loi de Poisson et d'une loi Gamma est une loi binomiale négative (voir [4]), dont les paramètres sont N et P. Par suite la loi du nombre de défaillance par semaine est une loi binomiale négative de paramètres N et P.

Cette présentation de la loi binomiale négative, qui n'est pas la seule possible, permet de modéliser des situations où des influences extérieures, (chaleur, gel, humidité, affluence, faible fréquentation etc.) modifient le paramètre de la loi de Poisson d'une semaine à l'autre.

L'utilisation de cette distribution de probabilité s'est révélée indispensable, car la loi de Poisson ne permet pas une modélisation satisfaisante d'un grand nombre de types de panne, pour lesquelles la variance dépasse le double de la moyenne et dont la distribution n'est manifestement pas poissonnienne.

Un avantage bien connu des processus de type poissonniens est que la loi de distribution des durées inter-événements qui lui sont associées est la loi exponentielle. Par contre, il est plus malaisé de connaître cette distribution dans le cas de la loi négative binomiale. C'est cet aspect que nous développons dans le § suivant, en utilisant les hypothèses précisées ci-dessus.

4.2. Distribution des durées inter-événement

On appelle T la variable aléatoire durée d'attente d'une panne à partir du temps 0. On note F(t) et f(t) respectivement la fonction de répartition et la fonction densité. L'unité de temps est l'unité de comptage des défaillances (la semaine dans notre cas). On note I_n l'intervalle [n − 1, n].

a. Etude sur l'intervalle I_1

$$\Pr(T > t/l = l_1) = \Pr(X(t) = 0/l = l_1)$$

$$\Pr(T > t/l = l_1) = \exp(-l_1 t)$$

D'où l'on déduit :

$$F(t/l = l_1) = 1 - \exp(-l_1 t)$$

$$f(t/l = l_1) = l_1 \exp(-l_1 t)$$

Si l'on utilise le fait que l suit une distribution Gamma de densité :

$$h(x) = x^{N-1} \exp(-x/P)\, P^{-N}/H(N)$$

avec $H(N) = \int_0^\infty e^{-x}\, x^{N-1}\, dx$

on obtient

$$f(t) = NP(1 + Pt)^{-(N+1)} \quad \text{pour} \quad t \in I_1$$

Ce qui est la densité de Pearson type VI (voir [3])

et la fonction de répartition associée est :

$$F(t) = 1 - (1 + Pt)^{-N} \quad \text{pour} \quad t \in I_1$$

b. Etude sur l'intervalle I_2

$$\Pr(T > t/l_1, l_2) = \exp(-l_1) \exp(-l_2(t - l))$$

Le même raisonnement que précédemment, utilisant le fait que l_1 et l_2 suivent des lois Gamma indépendantes de mêmes paramètres permet d'obtenir les résultats suivants :

$$f(t) = (P + l)^{-N}\, NP(P(t - l) + l)^{-(N+1)} \quad \text{pour} \quad t \in I_2$$

$$F(t) = 1 - (P + l)^{-N}\, (P(t - l) + l)^{-N} \quad \text{pour} \quad t \in I_2$$

Soit en notant $K = (P + 1)^{-N}$, $g(t) = NP(1 + Pt)^{-(N+1)}$ et $G(t) = (1 + Pt)^{-N}$, $f(t) = K\, g(t - 1)$ et $F(t) = 1 - K\, G(t - 1)$.

c. Etude sur I_n

On étend ces résultats à un intervalle quelconque I_n par récurrence et on obtient :

$$f(t) = K^{n-1}\, g(t - n + l) \text{ et } F(t) = 1 - K^{n-1}\, G(t - n + l) \text{ pour } t \in I_n$$

Il faut noter que la fonction densité présente des points de discontinuité pour les valeurs entières de t puisque

$$f(n^-) = K^{n-1} g(1) \quad \text{est différent de} \quad f(n^+) = K^n g(0)$$

L'espérance et la variance de T découlent de l'expression de la densité de probabilité f(t) après quelques manipulations :

$$E(T) = 1/((N-1)P)\,[(1 - K(1+P))/(1-K)]$$

$$V(T) = 2[(N-1)(N-2)P^2]^{-1}\,[(1 - K(P+1)^2)/(1-K)] - E(T)^2 - 2K/((N-1)(1-K)^2)$$

Ces deux expressions sont à comparer à leurs homologues pour la loi exponentielle :

$$E(T) = 1/NP$$

$$V(T) = (1/NP)^2$$

et pour la loi de Pearson type VI :

$$E(T) = 1/((N-1)P)$$

$$V(T) = N/[(N-1)^2(N-2)P^2]$$

Cette dernière peut être obtenue comme cas particulier de la loi générale développée ci-dessus, en choisissant une unité de temps que l'on fait tendre vers l'infini, car alors K tend vers 0. Enfin quand P tend vers 0 et N tend vers l'infini, avec NP constant, on obtient la loi exponentielle comme cas particulier du cas général. Cette situation correspond à une loi Gamma de variance nulle, c'est-à-dire à un paramètre 1 fixe quelle que soit la semaine.

Par contre, d'un point de vue pratique, il peut y avoir des différences de distribution importantes entre la loi générale et la loi exponentielle, surtout quand N est petit, c'est-à-dire proche ou même inférieur à 1. Les figures 2 et 3 donnent les deux fonctions de répartitions pour 2 couples de valeurs de N et P, le paramètre 1 de la loi exponentielle étant pris égal à NP. L'unité de temps est la semaine de fonctionnement pour l'ensemble des trains de la ligne.

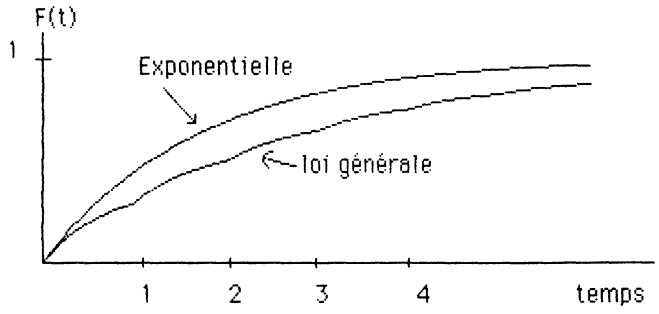

FIGURE 2

Fonctions de répartition de la durée inter-événement dans le cas poissonnien et dans celui de type négatif binomial N = 0.355 et P = 1.7.

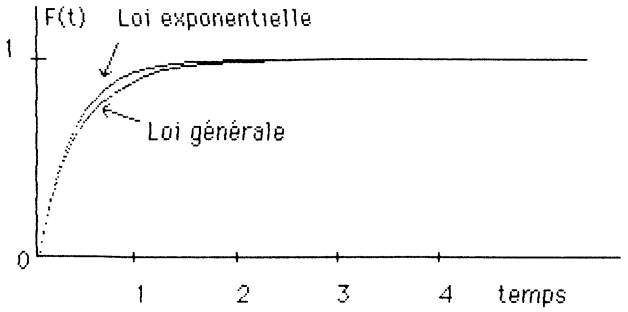

FIGURE 3

Fonction de répartition de la loi exponentielle et de la loi générale pour N = 4.7 et P = 0.56.

TABLEAU V

Moyenne et écart-type des lois exponentielle et générale pour différentes valeurs de N et de P

Type d'avarie	N	P	Loi exponentielle		Loi générale	
			E(T)	$(V(T))^{1/2}$	E(T)	$(V(T))^{1/2}$
1	17.2	0.98	0.059	0.059	0.062	0.067
2	7.48	1.0	0.134	0.134	0.153	0.173
3	4.7	0.56	0.38	0.38	0.444	0.474
4	4.5	0.18	1.23	1.23	1.33	1.34
5	0.355	1.08	2.61	2.61	3.79	3.85

Le tableau V donne les moyennes et variances de ces 2 distributions pour plusieurs valeurs de N et de P. La moyenne plus élevée de la loi générale signifie que des nombres de défaillances moyens égaux correspondent à des durées moyennes inter-événement plus élevées pour une binomiale négative que pour la loi de Poisson. Autrement dit, des durées inter-défaillances équivalentes donneront un nombre moyen de défaillances par unité de temps plus élevé dans le cadre d'un processus de type négatif binomial que dans celui d'un processus de Poisson.

5. Résultats essentiels et validation du modèle

5.1. Le programme de simulation

Un programme comportant environ 2 000 instructions, a été réalisé en FORTRAN, selon le modèle décrit succintement au § 3. La simulation des variables aléatoires a été faite à partir de nombres pseudo-aléatoires obtenus par

une méthode de congruence linéaire. Un certain nombre de paramètres doivent être donnés par l'utilisateur avant l'exécution du programme, tels que le parc de trains disponible sur la ligne, les horaires de travail des postes de réparation, les paramètres de règles de transfert des trains défaillants ainsi que le nombre de semaines de simulation. Ces paramètres peuvent être schématiquement séparés en deux groupes. Le premier contient les paramètres permettant de caler le modèle sur la réalité, le deuxième contient les paramètres fixés par l'utilisateur selon des scénarii constitués de façon indépendante selon les projets des responsables du fonctionnement de la ligne.

5.2. Présentation des résultats pour une simulation

Les résultats d'une simulation sont présentés dans les tableaux VI et VII. Il s'agit de moyennes et de variances calculées sur les 2 ans de simulation. La durée, assez importante, a été choisie en raison de la variabilité de certains résultats. Un nombre de 104 semaines, soit 520 jours ouvrables, permet d'obtenir des intervalles de confiance suffisamment petits pour rendre pertinentes les comparaisons entre plusieurs simulations. Une conclusion première, qui n'était pas évidente à priori, et que l'on peut faire à partir du tableau VII, est que les trains défaillants passent plus de temps en transfert ou en attente qu'en réparation réelle, ce qui souligne l'importance de la logistique des transferts dans la réduction du temps d'indisponibilité des trains défaillants.

TABLEAU VI

Résultat d'une simulation sur 2 ans concernant la qualité de service

	Moyenne journalière	Etat-type
Nombre de tours perdus	2.4	5.4
Retard cumulé (en minutes)	3.2	4.9
Qualité de service	96.9	3.9

TABLEAU VII

Durée moyenne d'indisponibilité en minutes

Durée d'indisponibilité totale	396
Durée séparant le garage de l'arrivée au poste de visite	172
Durée d'attente au poste de visite	68
Durée de réparation au poste de visite	48
Durée de transfert entre le poste de visite et l'atelier (*)	144
Durée d'attente à l'atelier (*)	137
Durée de réparation à l'atelier (*)	452

(*) seulement 15 % des défaillances nécessitent le passage à l'atelier

5.3. *Calage du modèle et validation*

Une première étape consiste à fixer certains des paramètres mal connus de façon à ce que le modèle s'ajuste le mieux possible à la réalité. Les variables qui ont servi au calage sont certaines durées de transfert des trains défaillants ainsi que le nombre de trains indisponibles à une heure donnée de la journée, le temps d'exploitation perdu (Cf. § 1) mesuré en nombre de tours non effectués (appelés nombre de tours perdus) et la qualité de service. Par exemple on compare la distribution du délai séparant la mise hors exploitation de l'arrivée à Invalides pour l'échantillon obtenu lors de l'enquête d'une part, et celui issu de la simulation d'autre part.

5.4. *Utilisation des simulations*

La simulation a été faite dans l'objectif d'améliorer la qualité de service tout en diminuant le parc de trains, de façon à réduire les coûts d'exploitation. Plusieurs scénarii ont été établis :

Le premier représente la situation actuelle.

Le deuxième est une modification du premier qui est prévue pour faire face à l'augmentation du nombre de voyageurs sur la ligne. La simulation montre qu'un accroissement du parc se traduirait par une dégradation de la qualité de service, ceci quel que soit le nombre de trains supplémentaires affectés à la ligne car si cette augmentation est nécessaire pour augmenter la fréquence de rotation des trains, elle se traduit pas ailleurs par un encombrement des stationnements avant réparation, ayant pour origine la configuration des installations.

Le troisième scénario consiste à aller dans le sens des objectifs définis plus haut à l'aide de deux améliorations du service de maintenance : d'une part assurer

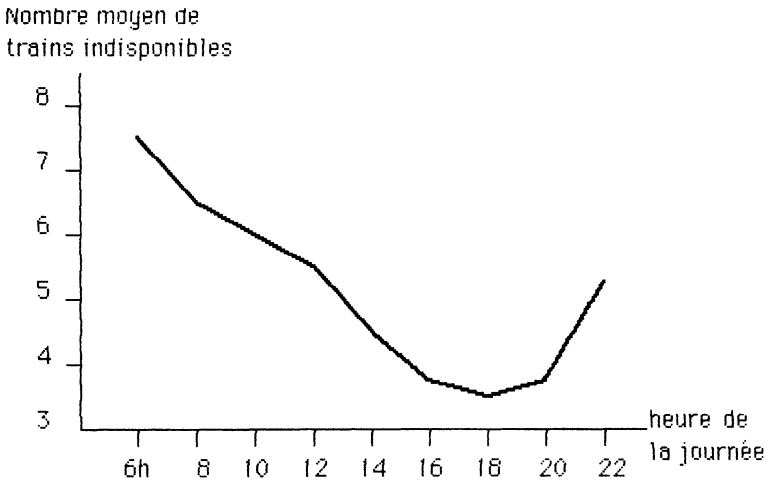

FIGURE 4

Evolution du nombre moyen de trains indisponibles au cours de la journée.

le transfert des trains défaillants au poste de visite le jour même de la panne, et d'autre part faire fonctionner ce poste jusqu'à 24 h. Ces deux modifications ont été suggérées par les premiers résultats du modèle qui montrent que le nombre de trains indisponibles peut être particulièrement élevé à 6 h ce qui rend délicat le passage de l'heure de pointe du matin. (Cf. Fig. 4). D'après la simulation, ces modifications permettraient de diminuer le parc de 3 trains (sur 60) sans faire baisser la qualité de service. Ces mêmes modifications rendraient possible l'augmentation des rotations prévues dans le scénario 2 sans augmentation du parc.

Le dernier scénario est celui de la ligne « idéale » (poste de visite et atelier au même lieu, proche du terminus, pas de limitation concernant les places de garage disponibles. Si ce scénario n'a pas d'intérêt pour la ligne considérée, il est par contre riche en enseignements pour la construction de nouvelles lignes.

D'autres études ont été faites concernant l'impact de l'amélioration de la fiabilité sur la qualité de service pour certaines pannes sensibles, ainsi que sur l'effet d'une réduction des temps de réparation.

6. Conclusions sur la méthodologie employée

L'intérêt des modèles de simulation stochastique pour traiter des problèmes de ce type peut être résumé en quelques points :

1) La non homogénéité dans le temps des processus considérés crée un obstacle de taille à la résolution analytique de modèles mathématiques tenant compte de cette réalité. D'autre part il semble irréaliste de faire l'hypothèse d'homogénéité dans ce type de situation et d'utiliser des processus de naissance ou mort, par exemple qui nécessitent cette hypothèse. La constitution d'un modèle stochastique réaliste et son traitement par des méthodes de Monte-Carlo semble être la seule solution possible dans ce cas.

Il faut souligner que dans notre cas les améliorations essentielles suggérées par la simulation concernent précisément l'organisation de la maintenance dans la journée, et qu'elles n'auraient donc pas pu être mises en évidence par un modèle homogène dans le temps.

2) Le mélange de lois de distributions exponentielles, log-normales, uniformes, de lois de Pearson type VI et de règles fixes est également peu favorable au traitement analytique. Là encore la simulation est souvent la seule solution possible.

3) Le paramétrage du modèle peut être adapté aux objectifs de l'étude. Par exemple, si l'on s'intéresse à l'impact de changements d'horaires de travail sur la qualité de service, il est facile de le faire dans le cadre d'un modèle de simulation où ces horaires sont explicitement introduits en tant que paramètres modifiables. L'utilisation de modèles que l'on désire traiter analytiquement ne permet pas toujours la même souplesse et nécessite souvent l'utilisation de paramètres intermédiaires : on peut par exemple, être amené à prendre en compte une augmentation des horaires de travail par une diminution du paramètre « temps moyen d'attente avant réparation ». Cependant, la relation entre l'aug-

mentation des horaires et la diminution du temps d'attente n'est pas parfaitement quantifiée, ce qui rend délicate l'interprétation des résultats.

4) L'évolution des matériels informatiques rend faisable des simulations assez complexes auxquelles on aurait renoncé il y a seulement quelques années pour des raisons de durée et de coût des calculs. Le programme de simulation décrit au § 3 effectue 2 ans de simulations en 10 minutes sur un Mini ordinateur pas spécialement rapide (Mini 6).

5) La transmission des résultats aux utilisateurs du modèle est largement facilitée par le fait que ce dernier est décrit en des termes assez proches de la connaissance empirique et qu'il fonctionne « comme la réalité ». Ce n'est pas toujours le cas pour les modèles stochastiques traités de façon analytique pour lesquels la schématisation et le formalisme constituent des obstacles à la compréhension et à l'utilisation complète du modèle par les décideurs économiques.

On reproche aux méthodes de simulation leur lourdeur en investissement informatique, la longueur et la complexité des programmes. On confond parfois deux étapes dans la construction de la simulation :

— la première étape consiste à comprendre le système et à élaborer un modèle descriptif; cette étape, si elle demande souvent beaucoup de temps, est fondamentale par la meilleure connaissance qu'elle apporte en général sur le système étudié;

— la deuxième étape est la rédaction et la mise au point du programme. Elle est relativement rapide quand la première étape a été correctement réalisée.

Cependant, il y a une taille optimum des problèmes traités, au-delà de laquelle les avantages cités ci-dessus et notamment le point 5 ne sont plus vrais. En effet la complexité du modèle et du programme associé le rend opaque à l'utilisateur, et quelquefois au concepteur lui-même, des erreurs non décelées peuvent se multiplier. Quand le modèle devient aussi compliqué que la réalité et quelquefois davantage encore, la modélisation perd de son intérêt en tant qu'outil de synthèse et de compréhension. De plus sa valeur prédictive devient douteuse. L'utilisation d'hypothèses simplificatrices s'avère alors nécessaire, à la fois dans le but d'une meilleure compréhension du système étudié et d'une prédiction de son comportement dans certaines situations.

Bibliographie

[1] BAILEY N.T.J. (1964). — The elements of stochastics processes. Wiley.

[2] BRATLEY P., FOX B.L., SCHRAGE L.E. (1983). — A guide to simulation. Springer-Verlag.

[3] JOHNSON N.L., KOTZ S. (1970). — Distribution in Statistics : Continuous Univariate Distributions. Wiley.

[4] JOHNSON N.L., KOTZ S. (1969). — Distribution in Statistics : Discrete Distributions. Wiley.

[5] LIGERON J.C., DELAGE A. (1980). — Modélisation de la disponibilité d'un système de transport par chaînes de Markov. *R.S.A., XXVIII, 3,* pp. 45-68.