

REVUE DE STATISTIQUE APPLIQUÉE

A. VESSEREAU

Méthodes bayésiennes et méthodes classiques en contrôle de réception

Revue de statistique appliquée, tome 28, n° 4 (1980), p. 5-35

http://www.numdam.org/item?id=RSA_1980__28_4_5_0

© Société française de statistique, 1980, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « *Revue de statistique appliquée* » (<http://www.sfds.asso.fr/publicat/rsa.htm>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

METHODES BAYESIENNES ET METHODES CLASSIQUES EN CONTROLE DE RECEPTION

A. VESSEREAU

	Pages
Introduction.	6
1. Première partie. — Loi a priori et loi a postérieure du type Bêta	7
1.1. Loi a priori du type Bêta	7
1.1.1. Expression de la loi.	7
1.1.2. Valeurs caractéristiques et fractiles.	7
1.1.3. Valeurs particulières des paramètres	8
1.1.4. Relation entre la loi Bêta et la loi binomiale.	9
1.1.5. Exemples numériques	10
1.2. Loi a postérieure.	12
1.2.1. La loi a postérieure est une loi Bêta	12
1.2.2. Valeurs caractéristiques et fractiles.	12
1.2.3. Exemples numériques	14
1.3. De la loi a priori à la loi a postérieure	19
1.3.1. Un cas très particulier	19
1.3.2. Le cas général	19
2. Deuxième partie. — Application au contrôle de réception Bayésien	20
2.1. Choix de la loi a priori	20
2.1.1. Choix basé sur une appréciation subjective	20
2.1.2. Choix résultant d'une information objective	21
2.2. Interprétation du résultat d'un contrôle.	22
2.2.1. Choix de l'effectif d'échantillon	23
2.2.2. Interprétation de la loi a postérieure.	23
3. Troisième partie. — Contrôle classique et contrôle Bayésien.	24
3.1. Rappel de la solution classique.	25
3.2. Solution bayésienne "équivalente"	26
3.2.1. Relations d'équivalence	26
3.2.2. Exemples numériques	27
4. Remarques finales	28
Annexes	30
A.1. Relations générales entre loi binomiale, loi Bêta, loi de F, loi de Poisson, loi de χ^2	30
A.2. Estimation des paramètres d'une loi Bêta	32
A.3. Références bibliographiques	35

INTRODUCTION

Partisans des méthodes “Bayésiennes” et défenseurs des méthodes “classiques” ne paraissent pas disposés à rechercher un terrain d’entente. Leurs argumentations sont d’ordre méthodologique, philosophique, voire sémantique... Elles ont été récemment développées dans des articles publiés dans la Revue Internationale de statistique [1], [2], [3], [4], [5]. Assez curieusement les “modernes” (néo-bayésiens) reprennent, en l’actualisant, le point de vue des très anciens classiques, alors que les “classiques” de l’époque actuelle maintiennent la position de ceux que l’on considérerait comme modernes il y a quelques 40 ans.

La Revue de statistique appliquée a publié plusieurs notes sur ce sujet, notamment [6], [7], [8], [9]. L’auteur du présent article y a fait connaître son opinion à propos d’un problème très familier aux utilisateurs des méthodes statistiques [7]. Il aborde ici un autre problème, encore plus concret ; le contrôle de réception sur échantillon. En cette matière, les partisans des méthodes bayésiennes avancent qu’elles sont plus intuitives (plus aisément comprises des utilisateurs) et plus économiques.

Plus intuitives : cela peut se discuter. Plus économiques, certes : on est rarement sans information sur la qualité présumée d’une fabrication à contrôler, et pourquoi s’en priverait-on ? Il reste à se demander sur quoi se fonde l’information a priori, quelle est l’importance de l’économie réalisée, et aussi — c’est peut-être le point le plus délicat — quelle signification concrète on peut attribuer à l’information a posteriori résultant d’un constat sur échantillon.

On se limitera dans cette note au contrôle dit “par attribut”, où les pièces sont classées en défectueuses (événement favorable !) ou bonnes (événement défavorable...). On se donnera comme loi a priori une loi Bêta, en raison de sa grande souplesse, de son caractère réaliste, et aussi de la grande facilité qu’elle offre pour le passage à la loi a postérieure.

Notations adoptées

1. Lois utilisées

	Paramètre (s)	Variable
Loi Bêta, $B(p/r, s)$	r, s	p ($0 \leq p \leq 1$)
Loi Binomiale, $X(n, p)$	n (entier), p	x ($0, 1, 2, \dots, n$)
Loi de Poisson, $Y(m)$	m ($0 < m < \dots$)	y ($0, 1, 2, \dots, \infty$)
Loi de Fisher-Snédecors $F(\nu_1, \nu_2)$	ν_1, ν_2 (entiers)	F ($0 \leq F < \infty$)
Loi de χ^2 , $\chi^2(\nu)$	ν (entier)	χ^2 ($0 \leq \chi^2 < \infty$)

Selon les besoins les notations seront affectées :

d’un accent ($r', s', n' \dots$)
et (ou) d’un indice ($p_0, p_1, p'_1 \dots$).

2. Notations concernant les fractiles d’une loi de probabilité

L’ordre d’un fractile sera désigné par P ($0 \leq P \leq 1$) ; dans les lois F et χ^2 , la valeur de la variable correspondant à P sera notée F_p, χ_p^2 . Dans la loi Bêta, au fractile p correspond, selon la notation usuelle, $P = I_p$ (fonction Bêta incomplète).

Pour permettre un passage aisé des méthodes bayésiennes aux méthodes classiques (et vice-versa) il sera commode de poser $P_a = 1 - P$ ($F_p = F_{1-P_a}$; $F_{P_a} = F_{1-P}$). Dans la théorie classique du contrôle de réception l'indice a signifie "acceptation".

3. Notations concernant les valeurs caractéristiques

La moyenne (espérance mathématique) sera désignée par m , l'écart-type par σ , le mode par M_0 , la médiane par Me .

4. Notations concernant l'échantillon

L'effectif de l'échantillon sera désigné par n (ou n'), et le nombre de défectueux par k . Lorsque k représentera la plus grande valeur du nombre de défectueux permettant l'acceptation d'un lot, on posera $k = A$ (ou A').

1. PREMIERE PARTIE

LOI A PRIORI ET LOI A POSTERIORI DU TYPE BETA

1.1. Loi a priori du type Bêta

1.1.1. Expression de la loi

La variable aléatoire p ($0 \leq p \leq 1$) a pour densité de probabilité

$$f(p) = \frac{p^{r-1} (1-p)^{s-1}}{\int_0^1 p^{r-1} (1-p)^{s-1}} = \frac{1}{B(r, s)} p^{r-1} (1-p)^{s-1} = \frac{\Gamma(r+s)}{\Gamma(r) \Gamma(s)} p^{r-1} (1-p)^{s-1} \quad (r, s > 0)$$

Lorsque les paramètres (r, s) sont des nombres entiers le coefficient $\frac{1}{B(r, s)} = \frac{(r+s-1)!}{(r-1)! (s-1)!}$ - Ce cas particulier est important lorsqu'on cherche à établir un raccord entre contrôle bayésien de réception et contrôle classique (troisième partie).

1.1.2. Valeurs caractéristiques et fractiles

Espérance mathématique, mode et écart-type se calculent sans difficulté (leurs expressions sont classiques). En ce qui concerne les fractiles (on rappelle la convention $P_a = 1 - P$), les expressions ci-après résultent des relations générales données dans l'annexe A1.

$$\left. \begin{array}{ll} (1) \text{ Espérance mathématique} & m = \frac{r}{r+s} \\ (2) \text{ Mode} & M_0 = \frac{r-1}{r+s-2} \\ (3) \text{ Ecart-type} & \sigma = \frac{1}{r+s} \sqrt{\frac{rs}{r+s+1}} \end{array} \right\} r, s \text{ quelconques} > 0$$

$$\begin{aligned}
 (4) \quad & \left\{ \begin{array}{l} \text{Pour } P_a \text{ donné } \geq 0,50 \quad p = \frac{1}{1 + \frac{s}{r} F_{P_a}(\nu_1, \nu_2)} \\ \text{Pour } P_a \text{ donné } \leq 0,50 \quad p = \frac{1}{1 + \frac{s}{r} / F_{1-P_a}(\nu_1, \nu_2)} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \nu_1 = 2s \\ \nu_2 = 2r \\ \nu_1 = 2r \\ \nu_2 = 2s \end{array} \\
 (5) \text{ Médiane} & \quad M_e = \frac{1}{1 + \frac{s}{r} F_{0,50}(\nu_1, \nu_2)} \quad \left. \begin{array}{l} \nu_1 = 2s \\ \nu_2 = 2r \end{array} \right\} \\
 (6) \quad & \left\{ \begin{array}{l} \text{Pour } p \text{ donné } \leq M_e \quad F_{P_a}(\nu_1, \nu_2) = \frac{r}{s} \frac{1-p}{p} \\ \text{Pour } p \text{ donné } \geq M_e \quad F_{1-P_a}(\nu_1, \nu_2) = \frac{s}{r} \frac{p}{1-p} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \nu_1 = 2s \\ \nu_2 = 2r \\ \nu_1 = 2r \\ \nu_2 = 2s \end{array}
 \end{aligned}$$

Les formules (4) à (6) s'appliquent directement pour (r, s) multiple (s) de $1/2$, en utilisant les tables usuelles de F ; pour des valeurs quelconques de (r, s) , des interpolations dans ces tables sont nécessaires. Lorsque $r + s - 1$ est grand et p petit, ces formules peuvent s'écrire avec une bonne approximation

$$\begin{aligned}
 (7) \text{ Pour } P_a \text{ donné} & \quad p = \frac{\chi^2_{1-P_a}(\nu)}{2(r+s-1)} \\
 (8) P_a = 0,50 \text{ (médiane)} & \quad M_e = \frac{\chi^2_{0,50}(\nu)}{2(r+s-1)} \\
 (9) \text{ Pour } p \text{ donné} & \quad \chi^2_{1-P_a}(\nu) = 2(r+s-1)p
 \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \nu = 2r$$

Les formules (7) à (9) s'appliquent en utilisant les tables usuelles de χ^2 (pour non multiple de $1/2$, une interpolation est nécessaire). Dans tous les cas, la courbe représentant P_a en fonction de p sera appelée "*courbe d'acceptation*" de la loi *a priori*.

1.1.3. Valeurs particulières des paramètres

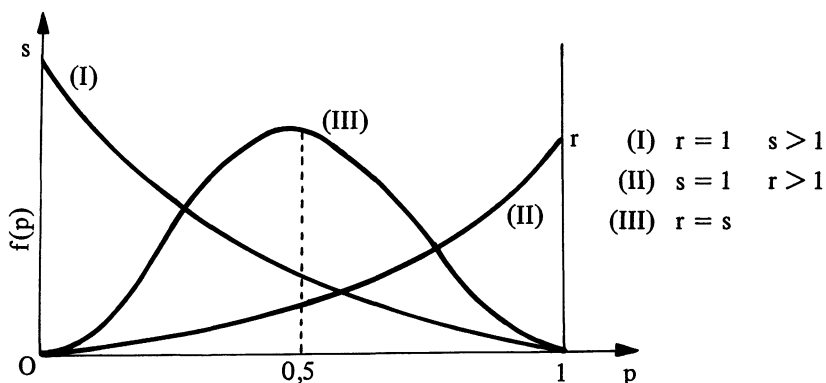
Si $r = s = 1$, on obtient la loi rectangulaire $f(p) dp = dp$

Si $r = 1, s > 1$, on a la loi $f(p) = s(1-p)^{s-1}$ uniformément décroissante de $f(0) = s$ à $f(1) = 0$

Si $s = 1, r > 1$ on a la loi $f(p) = rp^{r-1}$ uniformément croissante de $f(0) = 0$ à $f(1) = r$.

La loi n'est symétrique que si $r = s$. Alors

$$f(p) = \frac{1}{B(r, r)} p^{r-1}(1-p)^{r-1} \quad m = M_0 = M_e = 1/2 \quad \sigma = \frac{1}{2\sqrt{2r+1}}$$



Dans l'application aux contrôles de réception, on ne s'intéressera qu'à des lois fortement dissymétriques, où r est petit par rapport à s : moyenne, mode, médiane correspondront à de petites valeurs de p , et l'écart-type sera petit.

1.1.4. Relation entre la loi Bêta et la loi binomiale

L'expression de la loi binomiale de paramètres (n, p) est :

$$\Pr[X = x] = \frac{n!}{x! (n-x)!} p^x (1-p)^{n-x}; x = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Si dans la loi Bêta, de paramètres r, s entiers, et $r \geq 1$ on pose $r-1 = x$, $s-1 = n-x$, celle-ci s'écrit :

$$f(p) = \frac{(n+1)!}{x! (n-x)!} p^x (1-p)^{n-x}$$

Mais cette "ressemblance" est purement formelle – bien qu'utile pour établir une relation entre contrôle classique et contrôle bayésien (troisième partie). En effet :

- dans la loi binomiale n et p sont des paramètres, la variable est x ,
- dans la loi Bêta n et x sont des paramètres, la variable est p ,
- le coefficient diffère ($n!$ ou $(n+1)!$) – Il représente une quantité aléatoire dans la loi binomiale, une constante dans la loi Bêta.

On peut encore observer que :

- dans la loi Bêta, toutes les valeurs caractéristiques (espérance mathématique, mode, fractiles d'ordre quelconque) sont des valeurs possibles de la variable continue p .
- dans la loi binomiale, l'espérance mathématique ne correspond généralement à aucune valeur de la variable discrète X , la loi peut-être bimodale, les fractiles n'existent, et de manière conventionnelle, que pour certains ordres en nombre fini.

1.1.5. Exemples numériques

On donnera les deux exemples suivants :

$$\begin{array}{lll}
 r = 1 & s = 50 & f(p) = 50(1 - p)^{49} \\
 & & \left\{ \begin{array}{l} m = 1,96 \% \\ M_0 = 0,00 \% \\ M_e = 1,38 \% \\ \sigma = 1,94 \% \end{array} \right. \\
 \\
 r = 2 & s = 50 & f(p) = 2\,250 p(1 - p)^{49} \\
 & & \left\{ \begin{array}{l} m = 3,85 \% \\ M_0 = 2,00 \% \\ M_e = 3,28 \% \\ \sigma = 2,64 \% \end{array} \right.
 \end{array}$$

Les tableaux ci-après, calculés en utilisant les formules générales du paragraphe 1.1.3, permettent de tracer (Fig. I) les courbes de densité $f(p)$ et de P_a (courbe d'acceptation).

Tableau I-a

r = 1 s = 50		
$P_a \%$	p %	f(p)
100	0,00 ^(a)	50,0
99	0,02	49,5
95	0,10	47,6
90	0,21	45,1
75	0,57	37,8
—	—	—
70	0,71	35,3
50	1,38 ^(b)	25,3
38,5	1,96 ^(c)	19,0
30	2,38	15,3
25	2,74	12,8
10	4,50	5,24
5	5,82	2,85
1	8,80	0,55

Tableau I-b

r = 2 s = 50		
$P_a \%$	p %	f(p)
100	0,00	0,00
99	0,29	6,41
95	0,70	12,7
90	1,05	16,0
75	1,70	18,7
72	2,00 ^(a)	18,95
70	2,15	18,87
50	3,28 ^(b)	16,3
43	3,85 ^(c)	14,5
30	4,72	11,3
25	5,41	9,04
10	7,41	4,35
5	8,96	2,30
1	12,3	0,51

(a) = Mode (b) = Médiane (c) = Espérance mathématique.

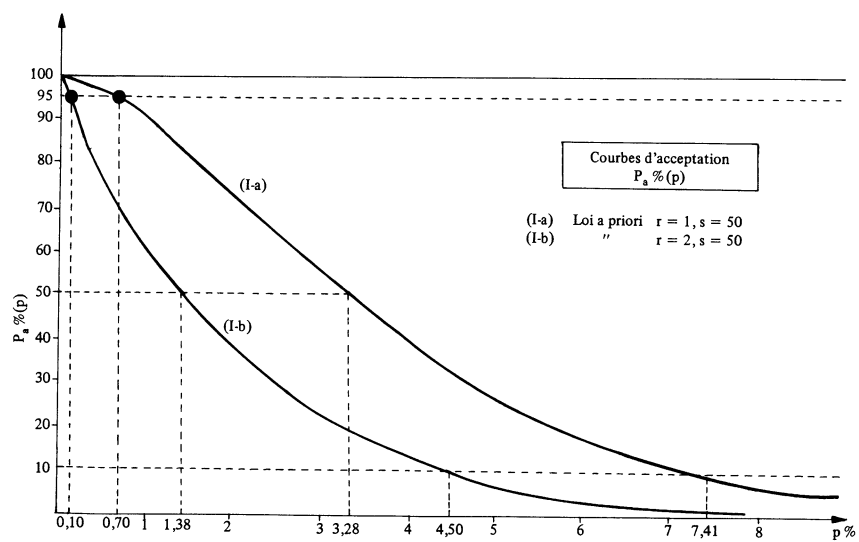
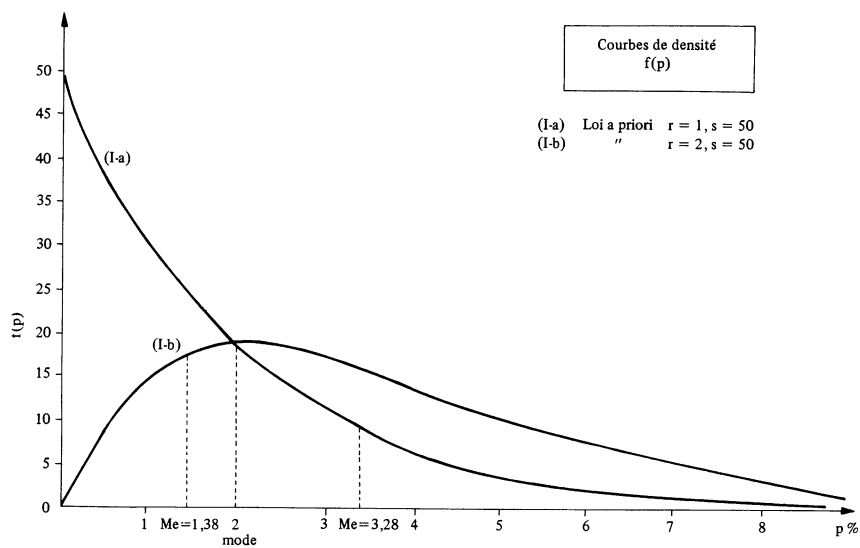


Figure I

1.2. Loi a posteriori

Dans un échantillon d'effectif n on a trouvé k unités présentant le caractère appelé conventionnellement "défectueux".

1.2.1. La loi a posteriori est une loi Bêta

La densité dans la loi a postérieure est

$$f'(p) = \frac{C_n^k p^k (1-p)^{n-k} f(p)}{\int_0^1 C_n^k p^k (1-p)^{n-k} f(p) dp}$$

avec

$$f(p) = \frac{p^{r-1} (1-p)^{s-1}}{\int_0^1 p^{r-1} (1-p)^{s-1} dp}$$

$$\begin{aligned} (10) \quad f'(p) &= \frac{p^{r+k-1} (1-p)^{s+n-k-1}}{B(r+k, s+n-k)} = \\ &= \text{Loi Bêta de paramètres } r' = r+k, s' = s+n-k \end{aligned}$$

La loi a posteriori de la loi a priori sont donc de même type : selon la dénomination donnée par Benjamin et Cornell, la loi Bêta appartient à la famille des "lois conjuguées".

1.2.2. Valeurs caractéristiques et fractiles

On les obtient en remplaçant dans les expressions données au § 1.1.2. r par $r+k$, s par $s+n-k$.

(11) Espérance mathématique

$$m = \frac{r+k}{r+s+n}$$

(12) Mode

$$M_0 = \frac{r+k-1}{r+s+n-2}$$

(13) Ecart-type

$$\sigma = \frac{1}{r+s+n} \sqrt{\frac{(r+k)(s+n-k)}{r+s+n+1}}$$

r, s quelconques > 0

$$(14) \left\{ \begin{array}{l} \text{Pour } P_a \text{ donné } \geq 0,50 \\ p = \frac{1}{1 + \frac{s+n-k}{r+k} F_{P_a}(\nu_1, \nu_2)} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \nu_1 = 2(s+n-k) \\ \nu_2 = 2(r+k) \end{array}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Pour } P_a \text{ donné } \leq 0,50 \\ p = \frac{1}{1 + \frac{s+n-k}{r+k} / F_{1-P_a}(\nu_1, \nu_2)} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \nu_1 = 2(r+k) \\ \nu_2 = 2(s+n-k) \end{array}$$

(15) Médiane

$$M_e = \frac{1}{1 + \frac{s+n-k}{r+k} F_{0,50}(\nu_1, \nu_2)} \left\{ \begin{array}{l} \nu_1 = 2(s+n-k) \\ \nu_2 = 2(r+k) \end{array} \right.$$

$$(16) \left\{ \begin{array}{l} \text{Pour } p \text{ donné } \leq M_e \\ F_{P_a}(\nu_1, \nu_2) = \frac{r+k}{s+n-k} \frac{1-p}{p} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \nu_1 = 2(s+n-k) \\ \nu_2 = 2(r+k) \end{array}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Pour } p \text{ donné } \geq M_e \\ F_{1-P_a}(\nu_1, \nu_2) = \frac{s+n-k}{r+k} \frac{p}{1-p} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \nu_1 = 2(r+k) \\ \nu_2 = 2(s+n-k) \end{array}$$

Les formules (14) à (16) s'appliquent en utilisant les tables usuelles de F (avec interpolations si (r, s) ne sont pas multiples de 1/2).

Lorsque $r + s + n - 1$ est grand et p petit, les formules (14) à (16) peuvent s'écrire, avec une bonne approximation :

$$(17) \text{ Pour } P_a \text{ donné} \quad p = \frac{\chi^2_{1-P_a}(\nu)}{2(r+s+n-1)}$$

$$(18) \text{ Pour } P_a \text{ donné} \quad M_e = \frac{\chi^2_{0,50}(\nu)}{2(r+s+n-1)}$$

$$(19) \text{ Pour } p \text{ donné} \quad \chi^2_{1-P_a}(\nu) = 2(r+s+n-1)p$$

$$\left. \begin{array}{l} (17) \\ (18) \\ (19) \end{array} \right\} \nu = 2(r+k)$$

Les formules (17) à (19) s'appliquent en utilisant les tables usuelles de χ^2 (avec interpolation si r n'est pas multiple de 1/2).

Dans tous les cas, la courbe représentant P_a en fonction de p sera appelée "courbe d'acceptation" de la loi a postérieure.

1.2.3. Exemples numériques

On part de la loi a priori $r = 1$, $s = 50$ (Tableau I_a et figure I_a ci-dessus) et l'on envisage les différents cas suivants :

$n = 30$; $k = 0, 1, 2$. — Tableau II et figure II ci-après — Les calculs ont été effectués avec les formules utilisant la loi de F.

Tableau II
 $n = 30$

$k = 0$			$k = 1$			$k = 2$		
$P_a \%$	$p \%$	$f'(p)$	$P_a \%$	$p \%$	$f'(p)$	$P_a \%$	$p \%$	$f'(p)$
100	0,00 ^(a)	80,0	100	0,00	0,00	100	0,00	0,00
99	0,01	79,2	99	0,19	10,1	99	0,55	4,87
95	0,05	76,1	95	0,44	19,2	95	1,03	11,8
90	0,13	72,2	90	0,67	24,4	90	1,38	16,1
75	0,36	60,2	75	1,20	28,8	75	2,16	21,4
70	0,45	56,0	71,5	1,27 ^(a)	28,9	70	2,39	21,8
—	—	—	70	1,37	28,7	66,1	2,53 ^(a)	21,9
50	0,86 ^(b)	40,4	50	2,09 ^(b)	24,8	50	3,33 ^(b)	20,1
41,9	1,23 ^(c)	30,1	42	2,47 ^(c)	21,6	43,5	3,70 ^(c)	18,5
30	1,49	24,4	30	3,03	16,9	30	4,46	14,6
25	1,72	20,3	25	3,33	14,6	25	4,84	12,7
10	2,84	8,21	10	4,78	6,45	10	6,52	5,82
5	3,68	4,14	5	5,80	3,38	5	7,66	3,13
1	5,59	0,85	1	8,00	0,74	1	10,1	0,69

$k = 0$, paramètres de la loi a postérieure $r' = 1$, $s' = 80$

$$f'(p) = 80 (1 - p)^{79}$$

$k = 1$, paramètres $r' = 2$, $s' = 79$

$$f'(p) = 6162 p(1 - p)^{78}$$

$k = 2$, paramètres $r' = 3$, $s' = 78$

$$f''(p) = 246.280 p^2 (1 - p)^{77}$$

$n = 75$; $k = 2, 3, 5$. — Tableau III et figure III ci-après. Les calculs ont été effectués avec les formules utilisant l'approximation de χ^2 .

$$k = 2 \quad r' = 3, \quad s' = 123 \quad f'(p) = 953.250 p^2 (1 - p)^{122}$$

$$k = 3 \quad r' = 4, \quad s' = 122 \quad f'(p) = 38.765.500 p^3 (1 - p)^{121}$$

$$k = 5 \quad r' = 6, \quad s' = 120 \quad f'(p) = 2.814.339 \times 10^4 p^5 (1 - p)^{119}$$

Tableau III
n = 75

k = 2			k = 3			k = 5		
P _a %	p %	f'(p)	P _a %	p %	f'(p)	P _a (p)	p %	f'(p)
100	0,00	0,00	100	0,00	0,00	100	0,00	0,00
99	0,35	7,60	99	0,66	5,00	99	1,43	3,01
95	0,66	18,4	95	1,09	13,3	95	2,09	9,09
90	0,88	25,1	90	1,40	19,3	90	2,52	13,7
75	1,38	33,3	75	2,03	27,1	75	3,38	20,7
70	1,53	34,0	70	2,21	28,0	70	3,61	21,7
66,4	1,61 ^(a)	34,1	61,6	2,42 ^(a)	28,3	61,1	4,03 ^(a)	22,4
50	2,14 ^(b)	31,2	50	2,94 ^(b)	26,6	50	4,52 ^(b)	21,6
41,7	2,44 ^(c)	27,9	44,2	3,17 ^(c)	25,1	40,8	5,00 ^(c)	19,6
30	2,89	22,5	30	3,81	18,5	30	5,60	16,3
25	3,14	19,2	25	4,09	16,9	25	5,94	16,1
10	4,24	8,68	10	5,36	7,60	10	7,40	6,64
5	5,04	4,41	5	6,20	4,00	5	8,40	3,44
1	6,72	0,89	1	8,04	0,79	1	10,5	0,66

n = 150 ; k = 3, 5, 7. – Tableau IV et figure IV ci-après. Les calculs ont été effectués avec les formules utilisant l'approximation de χ^2 .

$$k = 3 \quad r' = 4, \quad s' = 197 \quad f'(p) = 2.587.398 \times 10^2 p^3 (1 - p)^{196}$$

$$k = 5 \quad r' = 6, \quad s' = 195 \quad f'(p) = 49.445.175 \times 10^4 p^5 (1 - p)^{194}$$

$$k = 7 \quad r' = 8, \quad s' = 193 \quad f'(p) = 44.079 \times 10^{10} p^7 (1 - p)^{192}$$

Tableau IV
n = 150

k = 3			k = 5			k = 7		
P _a %	p %	f'(p)	P _a %	p %	f'(p)	P _a %	p %	f'(p)
100	0,00	0,00	100	0,00	0,00	100	0,00	0,00
99	0,41	8,00	99	0,89	4,87	99	1,45	3,60
95	0,68	21,3	95	1,31	14,8	95	1,99	11,5
90	0,87	30,7	90	1,58	22,2	90	2,33	17,8
75	1,27	43,3	75	2,11	33,0	75	2,98	27,6
70	1,38	44,6	70	2,25	34,5	70	3,15	29,1
63,9	1,51 ^(a)	45,1	61,4	2,51 ^(a)	35,5	60	3,5 ^(a)	30,3
50	1,83 ^(b)	42,5	50	2,83 ^(b)	34,2	50	3,83 ^(b)	29,5
43,9	1,99 ^(c)	39,7	45	2,99 ^(c)	32,7	46	3,98 ^(c)	28,6
30	2,38	31,1	30	3,50	25,9	30	4,60	22,7
25	2,56	26,9	25	3,71	22,7	25	4,84	20,0
10	3,35	12,2	10	4,63	10,7	10	5,88	9,48
5	3,88	6,50	5	5,25	5,64	5	6,57	5,02
1	5,02	1,35	1	6,55	1,17	1	8,00	1,03

(a) = Mode (b) = Médiane (c) = Espérance mathématique.

Les valeurs de n et k ont été choisies pour permettre un raccord avec les contrôles de réception classiques dont il existe des tables toutes calculées (MIL-STD 105 D). Voir chapitre III, § 3.2.2.

Les figures II, III, IV montrent clairement comment se modifie la loi a priori lorsque n étant fixé, on fait croître k . La courbe $f(p)$ devient de plus en plus étalée, la courbe $P_a(p)$ devient de moins en moins tendue.

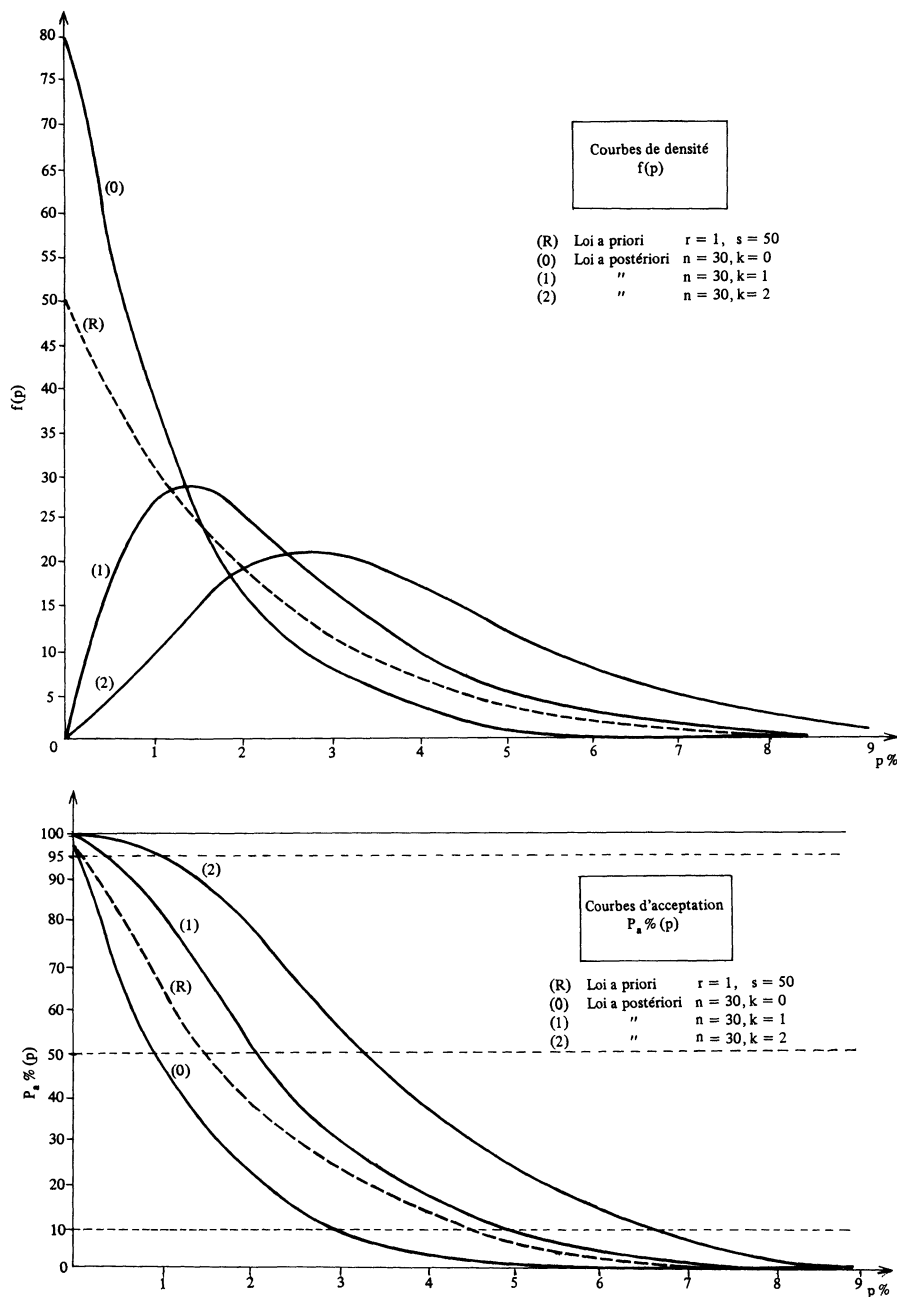


Figure II

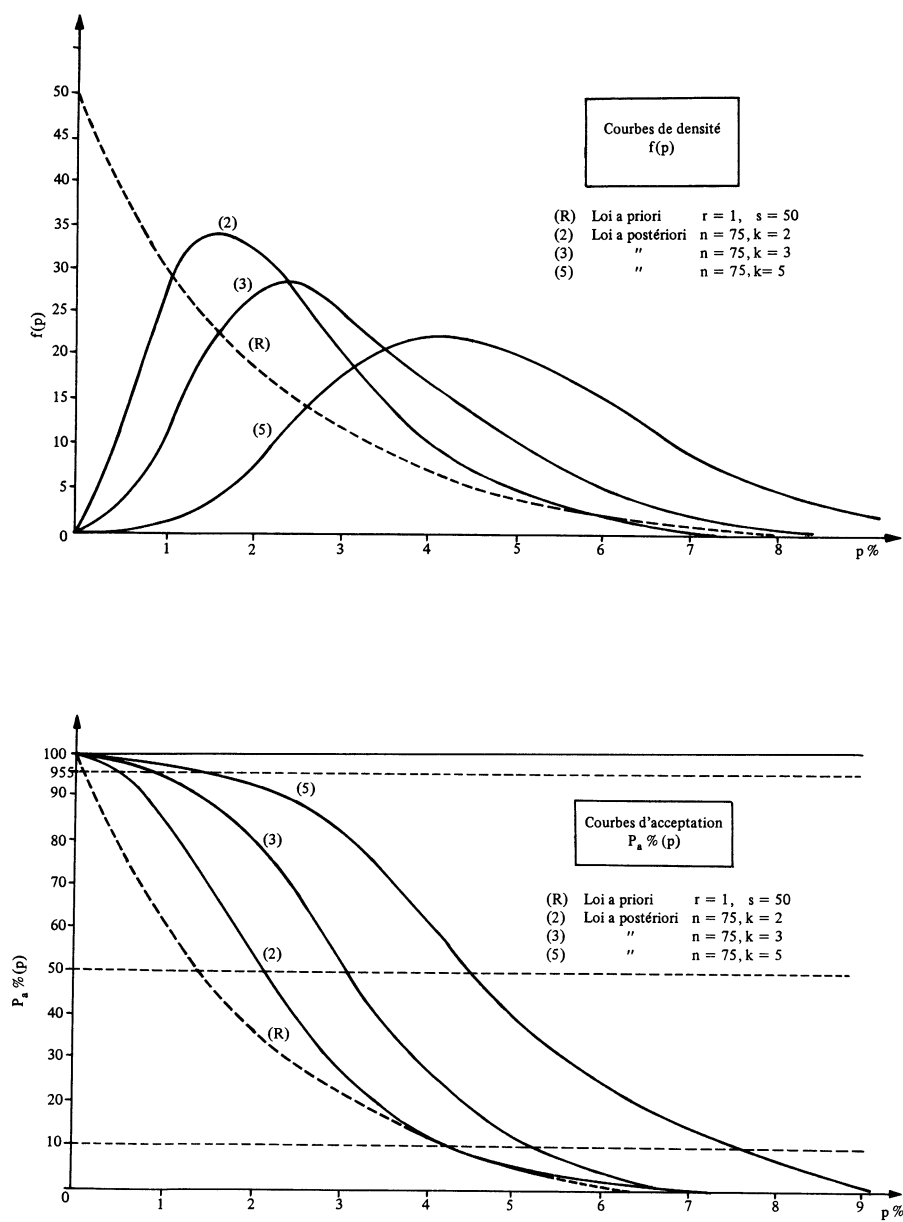


Figure III

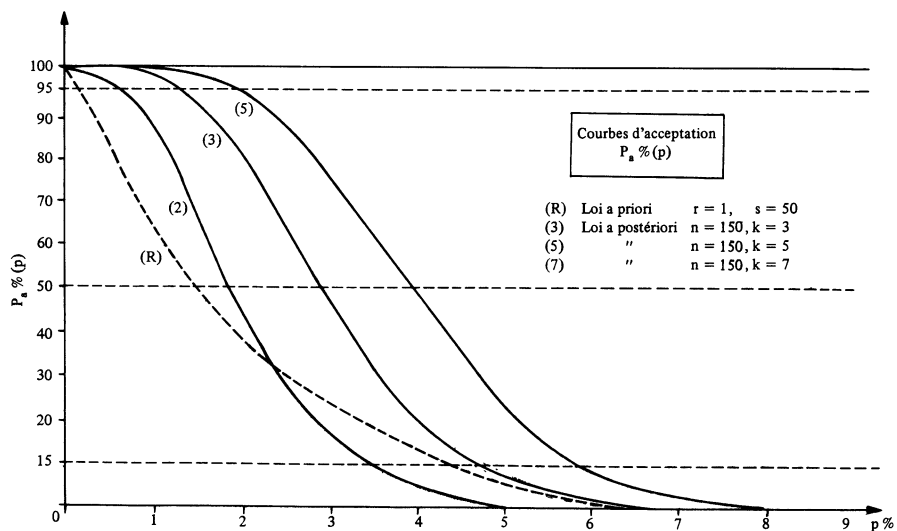
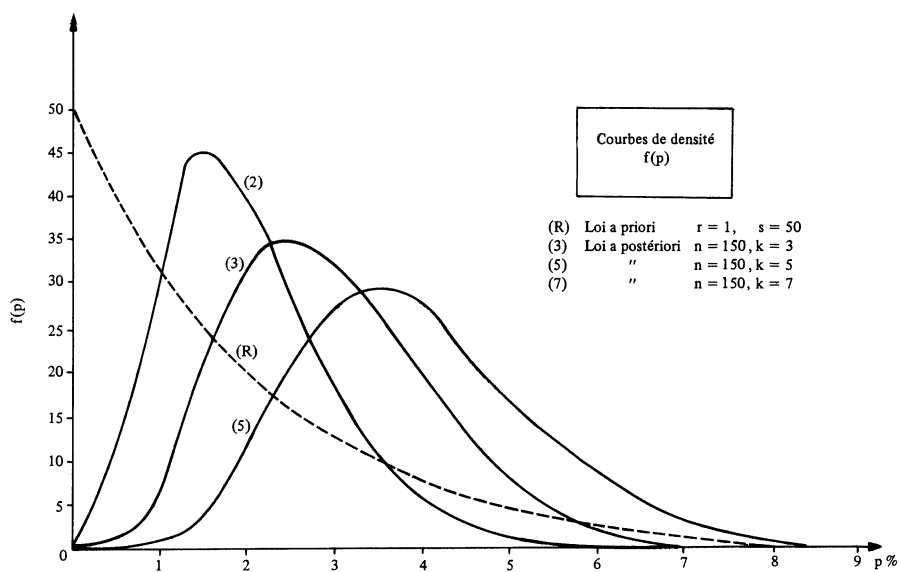


Figure IV

1.3. De la loi a priori à la loi a posteriori

1.3.1. Un cas très particulier.

On a vu (§ 1.1.3) que la loi a priori n'est symétrique (autour de $p = 1/2$) que dans le cas particulier où $r = s$. Bien qu'il s'agisse d'une situation sans intérêt pour l'application aux contrôles de réception, il n'est pas inutile d'y porter quelque attention.

Pour que la loi a posteriori soit également symétrique, il faut que son espérance mathématique et son mode coïncident, ce qui implique, d'après les expressions données en 1.2.2.

$$\frac{r + k}{r + s + n} = \frac{r + k - 1}{r + s + n - 2} \quad \text{avec } r = s$$

qui se réduit à
$$k = \frac{n}{2}$$

(On vérifie aisément que la médiane serait aussi égale à $1/2$). Même avec ce "résultat d'épreuve $k = n/2$ ", la loi a priori et la loi a posteriori, toutes les deux symétriques autour de $1/2$, seraient différentes, la loi a posteriori étant plus concentrée ($\sigma = \frac{1}{2\sqrt{2r + n + 1}}$) que la loi a priori ($\sigma = \frac{1}{2\sqrt{2r + 1}}$).

La loi très particulière que l'on s'était donnée a priori est donc toujours infirmée par l'observation faite sur l'échantillon.

Si l'on admet que la loi a priori représente l'incertitude que l'on a sur la "vraie valeur de p " — la valeur la plus probable a priori étant $1/2$ — l'incertitude ne se trouve levée que pour $n = \infty$, la loi convergeant vers son espérance mathématique.

1.3.2. Le cas général

C'est le cas où $r \neq s$ (et notamment r/s petit dans l'application aux contrôles de réception).

Condition nécessaire pour que loi a posteriori et loi a priori :

- aient même espérance mathématique : $\frac{r + k}{r + s + n} = \frac{r}{r + s}$, soit $k = \frac{r}{r + s} n$
- aient même mode : $\frac{r + k - 1}{r + s + n - 2} = \frac{r - 1}{r + s - 2}$, soit $k = \frac{r - 1}{r + s - 2} n$

Ces deux conditions sont incompatibles sauf si $r = s$, cas que nous avons exclu.

D'autre part la loi a postérieure est toujours plus concentrée que la loi a priori (σ plus petit). La propriété constatée dans le cas particulier $r = s$ est donc tout à fait générale : la loi a postérieure diffère toujours de la loi a priori.

Pour n très grand, p , de variable aléatoire, devient valeur certaine, la loi initiale, quelle qu'elle soit, convergeant vers son espérance mathématique. Les points de vue bayésien et classique convergent l'un vers l'autre... à l'infini.

DEUXIEME PARTIE

APPLICATION AU CONTROLE DE RECEPTION BAYESIEN

Un point essentiel devrait être précisé avant d'aborder la technique même d'un contrôle, que celui-ci soit "Bayésien" ou "Classique".

S'agit-il de contrôler (avec décision d'acceptation ou rejet) un lot particulier ? En technique classique il semble logique de protéger à la fois le fournisseur, en associant une probabilité faible de rejet (α) à une proportion donnée p_0 de défectueux, et le client en associant une probabilité faible d'acceptation (β) à une proportion donnée $p_1 > p_0$. Pour des valeurs de α et β fixées (les valeurs les plus usuelles étant $\alpha = 5\%$ et $\beta = 10\%$) le contrôle est d'autant plus efficace que la différence $p_1 - p_0$ est plus petite — mais son coût, évalué en effectif d'échantillon, est plus élevé. On rappelle que la *courbe d'efficacité* du contrôle est la courbe qui donne la probabilité d'acceptation P_a en fonction de la valeur du paramètre p : pour $p = p_0$, $P_a = 1 - \alpha$; pour $p = p_1$, $P_a = \beta$.

S'agit-il au contraire de contrôler une longue série de lots présentés par un même fournisseur ? C'est la situation à laquelle sont adaptés les plans MIL — STD 105 D (AFNOR, X06 — 022). Ceux-ci privilégient le fournisseur (réputé présenter les lots de bonne qualité), grâce aux choix d'un NQA⁽¹⁾ correspondant à une faible probabilité de rejet — le risque du client n'est pas pris directement en considération, sa protection résultant essentiellement du mécanisme des "Switching Rules" (passage en contrôle renforcé et éventuellement suspension des livraisons). Cependant ces mêmes plans peuvent être utilisés indirectement pour assurer une bonne protection du client, par le choix d'un L.T.P.D.⁽²⁾ correspondant à une faible probabilité d'acceptation (5 % ou 10 %) — le risque du fournisseur peut alors être lu sur la courbe d'efficacité du plan.

Cette distinction, banale en contrôle classique, ne devrait pas être perdue de vue en contrôle bayésien.

2.1. Choix de la loi a priori

Deux possibilités peuvent être envisagées.

2.1.1. Choix basé sur une appréciation subjective

Celle-ci est le fait du client, qui se base sur les renseignements dont il dispose sur les capacités du fournisseur. Par exemple, ayant fait choix d'une valeur pro-

(1) On rappelle que les plans MIL-STD sont indexés par des valeurs particulières de NQA : niveau de qualité acceptable — en anglais AQL : acceptable quality level — Les NQA de ces plans sont les % de défectueux suivants : 0,010 ; 0,015 ; 0,025 ; 0,040 ; 0,065 ; 0,10 ; 0,15 ; 0,25 ; 0,40 ; 0,65 ; 1,0 ; 1,5 ; 2,5 ; 4,0 ; 6,5 ; 10. (Série Renard de raison $\sqrt[10]{10} = 1,585$). Pour les % de défectueux NQA, la probabilité d'acceptation est de l'ordre de 95 % — En fait, suivant les plans, elle varie de 88 % à 99 %.

(2) L.T.P.D. = "Limit tolerance percent defective" est donné dans les tables MIL-STD pour les plans figurant dans ces tables.

bable de la proportion de défectueux dans la livraison à contrôler, il place, par la pensée, des mises de plus en plus faibles sur des valeurs de p s'écartant de plus en plus de cette proportion. Puisqu'il doit choisir une loi du type Bêta — on s'est imposé cette restriction dans la présente note — sa tâche sera facilitée s'il dispose d'un catalogue de courbes $f(p)$ correspondant à différentes valeurs des paramètres (r, s) . Un catalogue de courbes $P_a(p)$ permet de formuler plus aisément le pari de la façon suivante : il y a 90 chances sur 100 pour que p ne dépasse pas une valeur limite p_1 . Par exemple, un client "confiant" prendra pour p_1 la valeur 4,5 % : la loi Bêta a priori aura comme paramètres $r = 1, s = 50$ (voir Tableau Ia et figures Ia), mais pour un client "méfiant" prenant $p_1 = 7,4$ % les paramètres seront $r = 2, s = 50$ (Tableau Ib et figures Ib).

Cette façon d'opérer est tout à fait concevable, mais la loi a priori ayant un caractère subjectif, il est fort douteux, comme on vient de le voir, qu'un autre client choisisse la même loi — pour ne pas parler du fournisseur lui-même qui, s'il est de bonne foi, est le mieux placé pour connaître les possibilités de sa fabrication. Le client qui fait choix de la loi a priori se comporte en "juge souverain", ou en "expert" dont le verdict ne peut pas être contesté.

Si ce verdict est effectivement correct, lors d'une vérification à 100 % du lot, on devrait constater que p — qui de variable aléatoire se transforme en valeur certaine — est sinon égal, du moins voisin de la valeur sur laquelle a été placé le plus gros enjeu — ou de la valeur correspondant au mode de la loi a priori. En réalité cette vérification à 100 % n'est jamais faite, et la décision — acceptation ou rejet du lot résultera de la loi a posteriori déduite de l'échantillon, loi qui, comme on l'a montré en 1.3.2. diffère plus ou moins de la loi a priori : le client sera donc porté à croire (peut-être à tort) que le fournisseur a modifié sa fabrication. Si la loi s'est déplacée vers de faibles valeurs de p , il estimera que la fabrication s'est améliorée, s'en réjouira, et acceptera le lot. Dans le cas contraire — déplacement vers les valeurs élevées de p — il prononcera, suivant une règle qu'il se sera fixée, le rejet du lot.

Le choix "subjectif" de la loi a priori n'est selon nous concevable que pour un lot unique. Dans le cas d'une série de lots il faudrait admettre que l'on part toujours de la même loi a priori, ce qui ne paraît pas conforme à l'optique bayésienne où l'information résultant de tous les lots antérieurement présentés devrait être prise en considération.

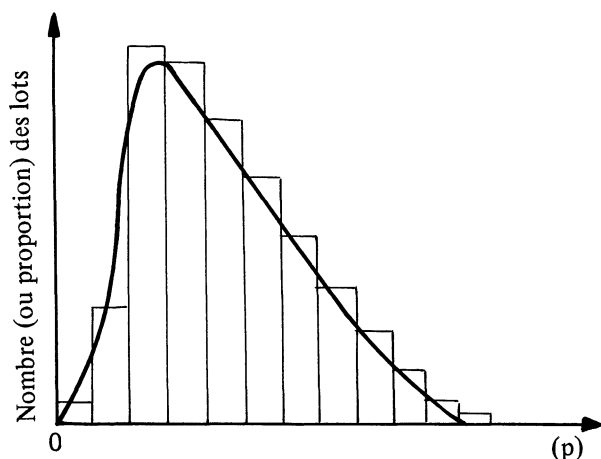
2.1.2. *Choix résultant d'une information objective*

A l'opposé du choix subjectif, la méthode que nous appelons "objective", paraît convenir au contrôle d'une série de lots.

On suppose connues les valeurs de p (paramètre) dans un assez grand nombre de lots déjà présentés en livraison. On les répartit en classes, on construit l'histogramme des fréquences, et on l'ajuste à une loi Bêta à partir de l'estimation des paramètres (r, s) — Voir annexe A3.

Cette méthode appelle plusieurs remarques. Elle suppose connue la valeur exacte de p dans les lots pris en considération. Il faut donc admettre :

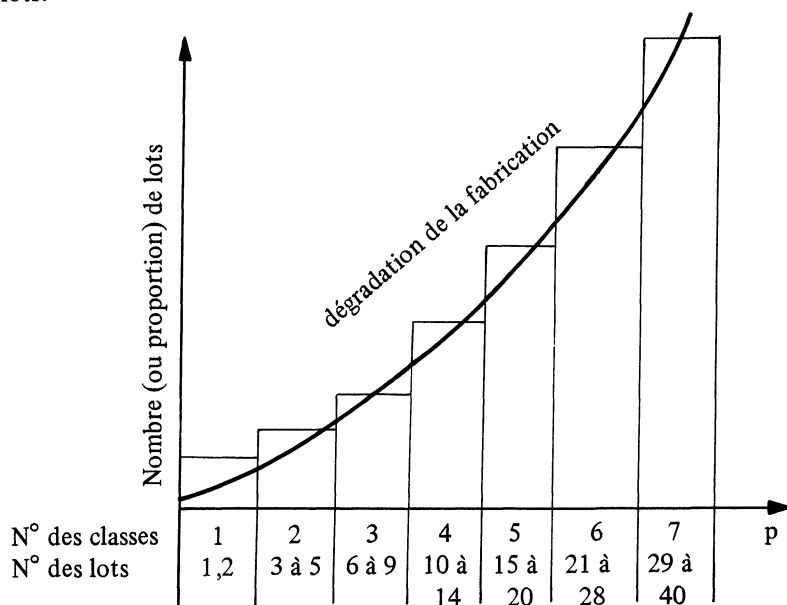
- ou bien que ces lots ont été reçus "sous condition", et que après emploi (p étant alors connu) ceux qui seront considérés comme inacceptables (mais cependant utilisés) seront déduits de la facture du fournisseur ou tout au moins feront l'objet d'une pénalisation dans le prix payé : il est peu probable que le fournisseur accepte cette convention,



— ou bien qu'un contrôle à 100 % a été fait lors de la présentation de chaque lot, ce qui permet de laisser à la disposition du fournisseur les lots inacceptables, tout en les prenant en compte dans l'histogramme : cette procédure, qui ne peut pas être envisagée si le contrôle est destructif, serait très coûteuse et annulerait l'économie apportée ensuite par un contrôle bayésien sur échantillon.

Si les lots ayant servi à construire l'histogramme ont été contrôlés sur échantillon suivant une règle "acceptation-rejet" (classique ou bayésienne peu importe), celui-ci sera biaisé : il représentera la distribution des lots acceptés, le biais dépendant de la règle d'acceptation (qui comporte un risque de jugement erroné) et non la distribution représentative de la fabrication.

Enfin, la statistique des valeurs de p peut correspondre à une évolution dans le temps de la qualité, qui n'apparaît pas sur l'histogramme. Un cas extrême est celui où les classes de p étant repérées par des numéros croissants, ceux-ci forment une suite croissante ou décroissante dans le numérotage chronologique des lots.



Le graphique ainsi construit représente alors l'amélioration ou la dégradation dans le temps de la fabrication. Une remarque analogue peut être faite sur les contrôles classiques si on les exécute sans précaution particulière sur les livraisons successives d'un fournisseur. On a déjà dit que dans les plans MIL-STD 105 D cette précaution consiste à appliquer les "Switching rules" (passage en contrôle renforcé ou réduit) — et, d'une façon plus générale à enregistrer les résultats des contrôles successifs sur un document du type "carte de contrôle".

La question de savoir s'il faut joindre le résultat du contrôle de chaque nouveau lot (loi a posteriori) à l'information a priori dite "objective" ne semble pas ici devoir être posée. La même loi a priori peut-être prise comme loi de référence pour le contrôle de chaque lot.

2.2. Interprétation du résultat d'un contrôle

Nous supposons écartées les difficultés soulevées au § 2.1. Sur un lot présenté au contrôle, on prélève un échantillon de n unités, dont on constate que k sont défectueuses.

2.2.1. Choix de l'effectif d'échantillon

La question de ce choix ne se pose pas en contrôle classique. D'une façon générale n et le "critère d'acceptation $k = A$ " sont déterminés par le choix des valeurs p_0 et p_1 ($p_1 > p_0$) associées à des valeurs données pour les risques du fournisseur (α) et du client (β). Si l'on utilise les plans MIL-STD 105 D, n et A résultent de règles conventionnelles acceptées par les deux parties, et qui sont liées à l'effectif des lots, au niveau de contrôle (plus ou moins sévère) et au choix d'un NQA ("niveau de qualité acceptable").

En contrôle bayésien, dont le but essentiel semble être de protéger le client, la valeur de n est, sauf convention particulière (voir troisième partie) arbitraire.

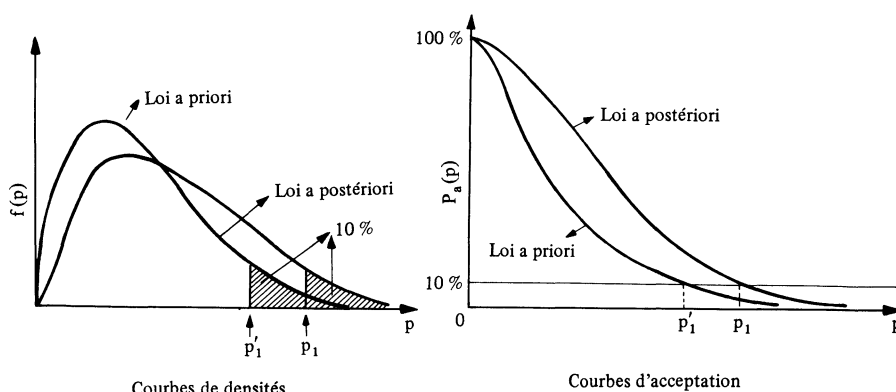
2.2.2. Interprétation de la loi a posteriori

A la suite de la prise d'échantillon, on se trouve confronté à une loi a posteriori du type Bêta, de paramètres $r' = r + k$, $s' = s + n - k$, qui diffère plus ou moins de la loi a priori choisie comme loi de référence. Cette loi a priori représentant une répartition acceptable des valeurs de p , si l'échantillon a pour effet de la déformer en la déplaçant vers les petites valeurs de p , on acceptera le lot. Pour fixer une condition de rejet, on fixe une valeur p_1 pour laquelle la valeur P_a dans la loi a posteriori est égale à une valeur faible également fixée à l'avance, par exemple $P_a = 10\%$ (dans la loi a priori à $P_a = 10\%$ correspond une valeur $p'_1 < p_1$). Au couple (n, p_1) correspond un couple de valeurs $(n, k = A)$; A est la valeur limite de k permettant l'acceptation du lot : si $k > A$, le lot est rejeté.

Cette interprétation de la loi a posteriori, logique en apparence, est cependant discutable. On se trouve en réalité confronté aux deux termes d'une alternative.

1^{er} Terme. On est parfaitement sûr de la validité de la loi a priori. Ce premier terme est à écarter, comme entaché d'un vice fondamental : On ne peut pas être parfaitement sûr de cette validité, puisque toute information nouvelle modifie la loi a priori.

2^{ème} Terme. Ce deuxième terme, qui est le seul qui soit réaliste, se subdivise lui-même en deux cas.



a) La loi a priori résulte d'une information du type "subjectif" (voir 2.1.1). Cette information étant par essence douteuse, interpréter la loi a postérieure comme il a été dit plus haut, paraît tout à fait admissible pour le contrôle d'un lot *unique*. Mais, lors du contrôle d'un nouveau lot, il est difficilement imaginable qu'on prenne toujours référence la même loi a priori.

b) La loi a priori résulte d'une information du type "objectif" (voir 2.1.2). Alors, on peut aussi bien considérer que cette information, par nature incomplète, est améliorée par l'information nouvelle apportée par l'échantillon, et que la fabrication est en réalité représentée par la loi a postérieure. L'interprétation de celle-ci en décision de rejet devrait alors conduire à rejeter non seulement le lot contrôlé, mais la totalité des lots pris en considération pour définir la loi a priori, et dont la plus grande partie, sinon la totalité, a été déjà acceptée. Cette décision drastique, et d'ailleurs inimaginable, de "tout rejeter" (présent et passé) pourrait être infirmée lors du contrôle d'un nouveau lot, ou de la constatation faite sur un autre échantillon du même lot (expertise contradictoire effectuée à la suite d'une réclamation bien légitime du fournisseur). Ce deuxième cas conduit, non pas au choix dans une alternative, mais à une impasse.

3. TROISIEME PARTIE

CONTROLE CLASSIQUE ET CONTROLE BAYESIEN

Nous essaierons ici de voir comment on peut établir un raccord entre la théorie classique et le point de vue bayésien. Nous ne nous intéresserons qu'à de petites valeurs de p (les seules à prendre en considération dans un contrôle de réception), et supposerons des effectifs d'échantillon pas trop petits. On peut alors utiliser des relations simples, justifiées par l'approximation, très valable dans ce cas, dite "de Poisson", elle-même directement liée aux propriétés de la loi de χ^2 (voir annexes A_1 et A_2).

3.1. Rappel de la solution classique

On se donne deux valeurs de p , p_0 et p_1 ($p_0 < p_1$) auxquelles on associe deux probabilités également choisies α (risque du fournisseur) et β (risque du client).

L'effectif n de l'échantillon et le "critère d'acceptation" A (valeur maximale de k permettant l'acceptation du lot, $R = A + 1$ étant le "critère de rejet") doivent satisfaire aux deux relations.

$$\chi^2_{\alpha}(\nu) = 2np_0 \quad \chi^2_{1-\beta}(\nu) = 2np_1 \quad \text{avec} \quad \nu = 2(A + 1) = 2R.$$

On en déduit ν par la relation :

$$\frac{\chi^2_{1-\beta}(\nu)}{\chi^2_{\alpha}(\nu)} = \frac{p_1}{p_0} \quad \text{d'où} \quad A = \frac{\nu}{2} - 1 \quad (20)$$

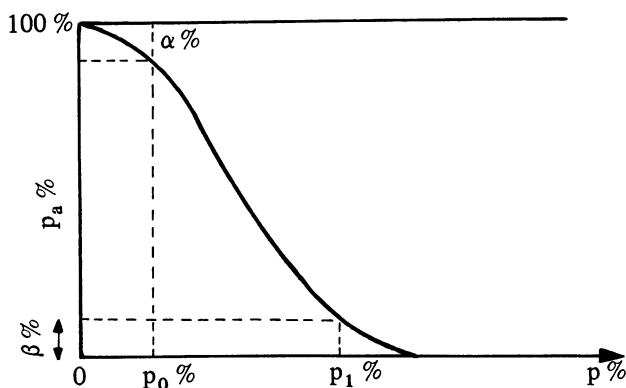
$$n = \frac{1}{2} \frac{\chi^2_{\alpha}(\nu)}{p_0} = \frac{1}{2} \frac{\chi^2_{1-\beta}(\nu)}{p_1} = \frac{1}{4} \left[\frac{\chi^2_{\alpha}(\nu)}{p_0} + \frac{\chi^2_{1-\beta}(\nu)}{p_1} \right] \quad (21)$$

A et n devant être des nombres entiers, on prend pour ν le nombre pair tel que $\frac{\chi^2_{1-\beta}(\nu)}{\chi^2_{\alpha}(\nu)}$ soit le plus voisin de $\frac{p_1}{p_0}$ (ou le plus grand nombre pair satisfaisant à $\frac{\chi^2_{1-\beta}(\nu)}{\chi^2_{\alpha}(\nu)} \leq \frac{p_1}{p_0}$) et pour n le nombre entier le plus voisin de $\frac{1}{4} \left[\frac{\chi^2_{\alpha}(\nu)}{p_0} + \frac{\chi^2_{1-\beta}(\nu)}{p_1} \right]$ (ou le plus petit nombre entier tel que $n \geq \frac{1}{4} \left[\frac{\chi^2_{\alpha}(\nu)}{p_0} + \frac{\chi^2_{1-\beta}(\nu)}{p_1} \right]$).

La *courbe d'efficacité* est la courbe qui donne, en fonction de p la probabilité P_a d'accepter les lots de "qualité p ". Elle est définie par l'équation :

$$P_a = 1 - P_r [\chi^2(\nu) \leq 2np] \quad \text{ou} \quad \chi^2_{1-P_a} = 2np; \nu = 2(A + 1) \quad (22)$$

Son interprétation est la suivante :



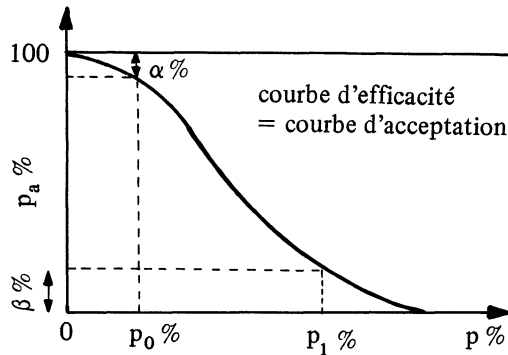
Tout lot caractérisé par une qualité $p < p_0$ a une probabilité inférieure à α d'être rejeté ; tout lot caractérisé par une qualité $p > p_1$ a une probabilité inférieure à β d'être accepté.

La courbe passe par les deux points $[p_0, P_a(p_0) = 1 - \alpha]$ $[p_1, P_a(p_1) = \beta]$.

3.2. Solution bayésienne "équivalente"

3.2.1. Relation d'équivalence

Prenant pour référence la solution classique qui vient d'être rappelée, et qui est résumée par le couple (n, A) , on appellera solution bayésienne équivalente celle qui, partant d'une loi a priori donnée $B(p/r, s)$, aboutit à une loi a postérieure $B(p/r', s')$ dont la courbe d'acceptation coïncide avec la courbe d'efficacité $P_a(p)$. Cette loi a postérieure correspond à un échantillon d'effectif n' et à un critère d'acceptation A' ayant la même signification que dans le contrôle classique : il s'agit donc d'établir les relations entre le couple (n, A) et le couple (n', A') .



La courbe d'acceptation dans la loi a postérieure de paramètres (r', s') est définie (voir § 1.1.2) par :

$$\chi^2_{1-P_a}(\nu = 2r') = 2(r' + s' - 1)p$$

qui s'écrit, en définissant n' et A' par les conditions $r' = r + A'$, $s' = s + n - A'$

$$\chi^2_{1-P_a}[\nu = 2(r + A')] = 2(r + s + n' - 1)p \quad (23)$$

Le rapprochement de cette formule et de la formule (22) du § 3.1 montre que courbe d'acceptation et courbe d'efficacité sont identiques si :

$$n' = n - (r + s - 1) \quad A' = A - (r - 1) \quad (24)$$

L'économie (exprimée en effectif d'échantillon) du contrôle bayésien défini par les conditions (n', A') par rapport au contrôle classique défini par les conditions (n, A) est :

$$n - n' = r + s - 1$$

Si s étant constant, on augmente r d'une unité, le contrôle classique équivalent s'obtient en augmentant A et n d'une unité.

Si r étant constant, on augmente s d'une unité, le contrôle classique équivalent s'obtient avec la même valeur de A et en augmentant n d'une unité.

Dans les deux cas l'économie du contrôle bayésien est augmentée d'une unité.

3.2.2. Exemples numériques

On partira de la loi a priori de paramètres $r = 1$, $s = 50$ étudiée au § 1.1.5 (Tableau et figure Ia). On a ici $r + s - 1 = 50$. La loi a posteriori a été établie au § 1.2.3 dans les cas suivants.

$n = 30$, $k = 0, 1, 2$ (Tableau et Figure II)

$n = 75$, $k = 2, 3, 5$ (Tableau et Figure III)

$n = 150$, $k = 3, 5, 7$ (Tableau et Figure IV)

Les plans classiques "équivalents" correspondent à des effectifs d'échantillon $n' = 80$, $n' = 125$, $n' = 200$ et des critères d'acceptation $A' = A$.

On pourra vérifier, dans les tables X des MIL-STD 105 D que ces plans coïncident avec les suivants :

{	Lettre code J, NQA = 0,15	($n' = 80, A' = 0$)
	NQA = 0,65	($n' = 80, A' = 1$)
	NQA = 1,0	($n' = 80, A' = 2$)
{	Lettre code K, NQA = 0,65	($n' = 125, A' = 2$)
	NQA = 1,0	($n' = 125, A' = 3$)
	NQA = 1,5	($n' = 125, A' = 5$)
{	Lettre code L, NQA = 0,65	($n' = 200, A' = 3$)
	NQA = 1,0	($n' = 200, A' = 5$)
	NQA = 1,5	($n' = 200, A' = 7$)

L'économie par rapport à ces plans classiques, — familiers aux utilisateurs des tables MIL-STD — est de 50 unités d'échantillonnage. La loi de correspondance s'étend pour les mêmes lettres-codes J, K, L des MIL-STD 105 D, aux plans de ce document pour lesquels existent des valeurs du critère d'acceptation. Elle est résumée dans le Tableau V ci-après, qui exige quelques moments d'attention de la part du lecteur.

Si l'on prend pour loi a priori la loi de paramètres $r = 2$, $s = 50$, la valeur de n' doit être diminuée d'une unité (179, 124, 199) — (modification pratiquement sans importance) et celle de A' également d'une unité (certaines de ces nouvelles valeurs de A' n'existent pas dans les tables MIL-STD ex : $A' = 4$, $A' = 6$).

Si l'on prend pour loi a priori la loi de paramètres $r = 1$, $s = 51$, le critère d'acceptation reste le même et la correspondance indiquée ci-dessus reste pratiquement valable.

Dans les deux cas l'économie dans l'effectif de l'échantillon est augmentée d'une unité (51 au lieu de 50).

Les courbes d'acceptation/efficacité ont été tracées sur la figure V lorsque $r = 1$, $s = 50$ (les critères d'acceptation, A et A' sont égaux). Elles sont repérées par l'effectif d'échantillon et le critère d'acceptation bayésien : par exemple $\left(\frac{150}{3}\right)$ se lit $n = 150$, $A = 3$. Pour éviter les difficultés de lecture qui résulteraient de l'enchevêtrement des courbes, celles-ci n'ont été tracées que pour $n = 75$ et 150 ($n' = 125$ et 200) et pour les valeurs de $A = A'$ existant dans les tables

TABLEAU V
Correspondance entre plans Bayesiens et plans MIL-STD 105 D

		Contrôle Bayésien r = 1, s = 50 effectif d'échantillon n			Effectif d'éch. ^{on} Lettre code NQA	} PLANS MIL-STD 105 D
		30	75	150		
		80 J NQA	125 K NQA	200 L NQA		
Critère d'acceptation A = A'	0	0,15	0,10	0,065	Les chiffres en italiques correspondent à des NQA en contrôle renforcé.	
	1	0,65	0,40	0,25		
	2	1,0	0,65	0,40		
	3	1,5	1,0	0,65		
	5	2,5	1,5	1,0		
	7	4,0	2,5	1,5		
	8	6,5	4,0	2,5		
	10	6,5	4	2,5		
	12	10	6,5	4		
	14	10	6,5	4		
	18	15	10	6,5		
	21	15	10	6,5		

MIL-STD. A titre d'exemple, la loi a priori $r = 1, s = 50$, dont la courbe d'acceptation passe par le point ($p = 4, 50\%$, $P_a = 10\%$) étant admise comme reflétant une qualité acceptable, si l'on tolère pour la même valeur de P_a , $p = 6,5\%$, on pourra adopter le contrôle bayésien ($n = 30, A = 2$) équivalent au contrôle classique ($n' = 80, A' = 2$) – voir tableau II ; si l'on ne tolère que $p = 5,5\%$, on pourra adopter le contrôle ($n = 75, A = 3$) équivalent au contrôle classique ($n' = 125, A' = 3$) voir tableau III ou courbe $\left(\frac{75}{3}\right)$ de la figure V. Naturellement d'autres combinaisons (n, A) peuvent être adoptées par application des formules générales des § 3.1 et 3.2.1.

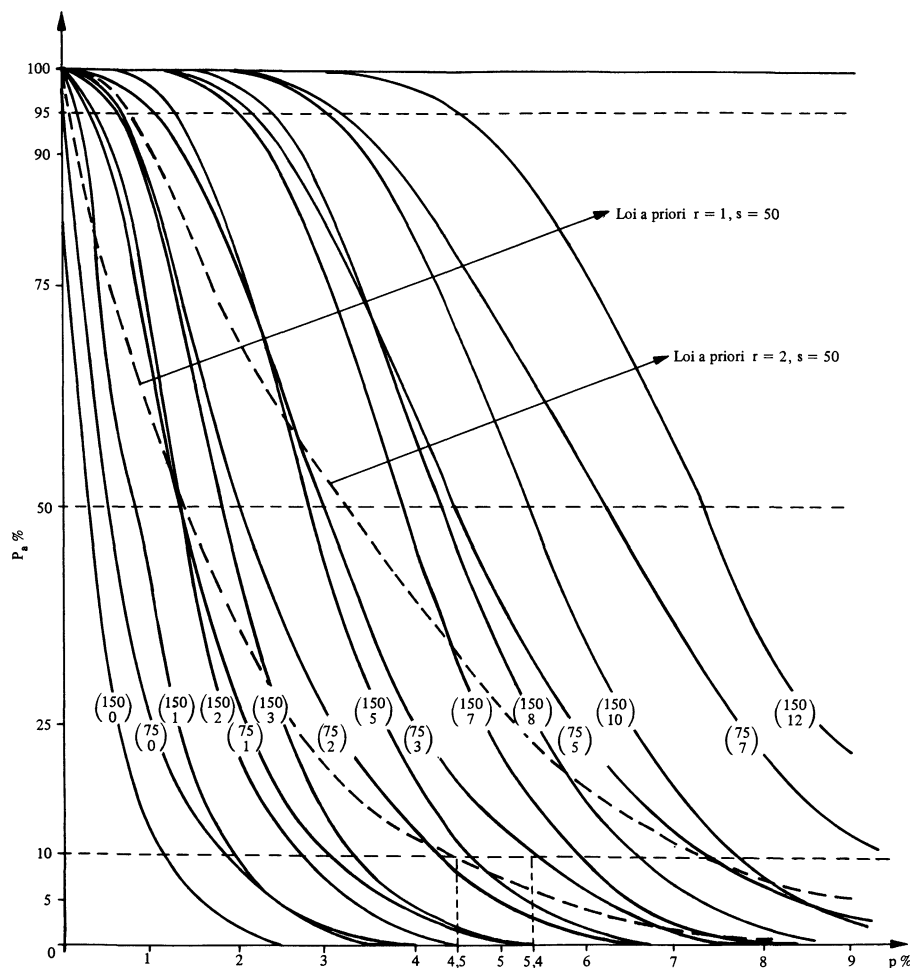
4. REMARQUES FINALES

Il s'agit de remarques et non de conclusion, cette note soulevant plus de problèmes qu'elle n'en résout.

Le contrôle bayésien lorsqu'on le compare au contrôle classique apparaît comme plus économique. Dans le cadre de cette étude, où l'on a admis que la loi a priori était du type Bêta, l'économie (en effectif d'échantillon) est égale

figure V

Courbes d'acceptation/efficacité de plans bayésiens et classiques équivalents



En traits ponctués sont tracées les courbes d'acceptation des lois a priori $(r = 1, s = 50)$ et $(r = 2, s = 50)$

à $r + s - 1$; elle dépend essentiellement du choix des paramètres (r, s) de la loi a priori. Pour reprendre les expressions de J. Ringler dans (9), si cette loi est "faible", aucune valeur particulière de p n'étant fortement privilégiée, l'économie est faible : à la limite si la loi a priori est la loi uniforme, où $r = s = 1$, l'économie est d'une unité. . . Une loi a priori "forte" qui privilégie un domaine étroit des valeurs de p , correspond à une valeur de s très supérieure à celle de r (s/r grand) ; elle apporte une économie importante. J. Ringler fait aussi remarquer (dans le cas des essais de fiabilité) que si l'on se fixe un objectif plus sévère que celui qui découle de la loi a priori, l'approche bayésienne devient "pénalisante" par rapport à l'approche classique.

Le but de cette note était en premier lieu d'attirer l'attention sur le fait que le contrôle bayésien repose sur des prémisses pour le moins discutables. Même si l'on se refuse à les discuter, on doit tout au moins reconnaître que, à l'opposé de l'approche classique où le résultat d'un contrôle est "vérifiable" — une probabilité exprimant une "fréquence" — l'approche bayésienne est par nature même "invérifiable", toute information supplémentaire modifiant les précédentes : une probabilité y exprime un "degré de confiance". Qu'asymptotiquement les deux approches se confondent n'est qu'une maigre consolation.

L'auteur a connu l'époque où les classiques rejetaient le point de vue des bayésiens — puis celle où les bayésiens, retrouvant une nouvelle jeunesse sous le nom de "néo-bayésiens", considèrent les classiques comme des attardés. Et si ces derniers retrouvaient à leur tour une nouvelle jeunesse sous le nom de "néo-classiques" ?

Ainsi va le temps. . .

Vendredi Saint 4 Avril 1980

ANNEXE A1

RELATIONS GENERALES ENTRE LOI BINOMIALE, LOI BETA, LOI DE F, LOI DE POISSON, LOI DE χ^2

Relation entre loi binomiale et loi Bêta

Entre la fonction cumulative de la loi binomiale $X(n, p)$ et la fonction Bêta incomplète on a la relation :

$$\Pr[X \leq k] = \sum_{x=0}^k C_n^x p^x (1-p)^{n-x} = 1 - I_p(k+1, n-k) = \\ = I_{1-p}(n-k, k+1)$$

En posant $k+1 = r$, $n-k = s$, d'où $k = r-1$, $n = r+s-1$ (r et s entiers) :

$$(a) P = I_p(r, s) = 1 - \Pr[X(r+s-1, p) \leq r-1] = \Pr[X(r+s-1, p) \geq r] = \\ = \sum_{x=r}^{r+s-1} C_{r+s-1}^x p^x (1-p)^{r+s-1-x}$$

Relation entre loi binomiale et loi de F

Entre la fonction cumulative de la loi binomiale $X(n, p)$ et la fonction de répartition de la loi de F, on a la relation :

$$\Pr[X \geq k+1] = \Pr \left[F(v_1, v_2) \leq \frac{r-k}{k+1} \frac{p}{1-p} \right] \quad \begin{cases} v_1 = 2(k+1) \\ v_2 = 2(n-k) \end{cases}$$

En posant comme précédemment $k + 1 = r$, $n - k = s$:

$$(b) P = I_p(r, s) = \Pr[X(r + s - 1, p) \geq r] = \Pr \left[F(v_1, v_2) \leq \frac{s}{r} \frac{p}{1-p} \right] \begin{cases} v_1 = 2r \\ v_2 = 2s \end{cases}$$

Relation entre loi Bêta et loi de F

La relation précédente :

$$(c) P = I_p(r, s) = \Pr \left[F(v_1, v_2) \leq \frac{s}{r} \frac{p}{1-p} \right] \begin{cases} v_1 = 2r \\ v_2 = 2s \end{cases}$$

est valable, non seulement pour r et s entiers, mais aussi pour r et s multiples de $1/2$.

*
* *

On suppose dans ce qui suit $r + s - 1$ grand et p petit.

Relation entre loi binomiale, loi de Poisson et loi de χ^2

Entre les fonctions cumulatives de la loi binomiale $X(n, p)$, de la loi de Poisson $Y(m = np)$, et de la loi de χ^2 on a les relations :

$$\Pr[X(n, p) \leq k] \# \Pr[Y(m = np) \leq k] = 1 - \Pr[\chi^2(\nu) \leq 2np] \quad \{\nu = 2(k + 1)\}$$

d'où, en posant comme précédemment $k + 1 = r$, $n - k = s$,

$$(d) \Pr[X(r + s - 1, p) \leq r - 1] \# 1 - \Pr[\chi^2(\nu = 2r) \leq 2(r + s - 1)p]$$

Relation entre la loi Bêta et la loi de χ^2

En rapprochant les relations (b) et (d), on a :

$$(e) P = I_p(r, s) \# \Pr[\chi^2(\nu = 2r) \leq 2(r + s - 1)p]$$

Relation entre loi de χ^2 , loi de F et loi Bêta

On a la relation générale :

$$\chi_p^2(\nu) = \nu F_p(\nu_1 = \nu, \nu_2 = \infty)$$

d'où l'on déduit :

$$P = I_p(r, s) = \Pr[\chi^2(\nu = 2r) \leq 2(r + s - 1)p]$$

$$(f) \quad = 2r \Pr[F(\nu_1 = 2r, \nu_2 = \infty) \leq 2(r + s - 1)p]$$

Les relations (e) et (f) sont valables non seulement pour r et s entiers, mais aussi pour r et s multiples de $1/2$.

ANNEXE A2

ESTIMATION DES PARAMETRES D'UNE LOI BETA

Les relations

$$\left\{ \begin{array}{l} m = \frac{r}{r+s} \\ \sigma^2 = \frac{rs}{(r+s+1)(r+s)^2} \end{array} \right.$$

permettent de calculer des estimations de r et s à partir des estimations $\hat{m}$ et $\hat{\sigma}^2$ obtenues sur une distribution empirique des valeurs de p .

La solution en $\hat{r}$ et $\hat{s}$ des deux égalités précédentes n'offre pas de difficulté. On trouve :

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{s} = \frac{\hat{m}(1-\hat{m})^2}{\hat{\sigma}^2} - (1-\hat{m}) \\ \hat{r} = \frac{\hat{m}}{1-\hat{m}} \hat{s} \end{array} \right. \quad (25)$$

Exemple. — Le tableau VI ci-après donne la répartition de 150 lots, classés suivant les valeurs de p % groupées en classes d'étendue 0,5 %.

Tableau VI

Classes de p %	Nombre de lots
0-0,5	6
0,5-1,0	13
1,0-1,5	16
1,5-2,0	40
2,0-2,5	24
2,5-3,0	14
3,0-3,5	8
3,5-4,0	6
4,0-4,5	6
4,5-5,0	5
5,0-5,5	4
5,5-6,0	3
6,0-6,5	2
6,5-7,0	1
7,0-7,5	2
	150

Il ne s'agit pas de données réelles — mais il ne s'agit pas non plus de données arrangées "pour les besoins de la cause", comme on le constatera d'un coup d'œil sur la figure VI.

Le calcul classique donne :

$$\hat{m} = 0,0243 \text{ (2,43 \%)}$$

$$\hat{\sigma} = 0,0149 \text{ (1,49 \%)}$$

L'application des formules (25) donne ensuite :

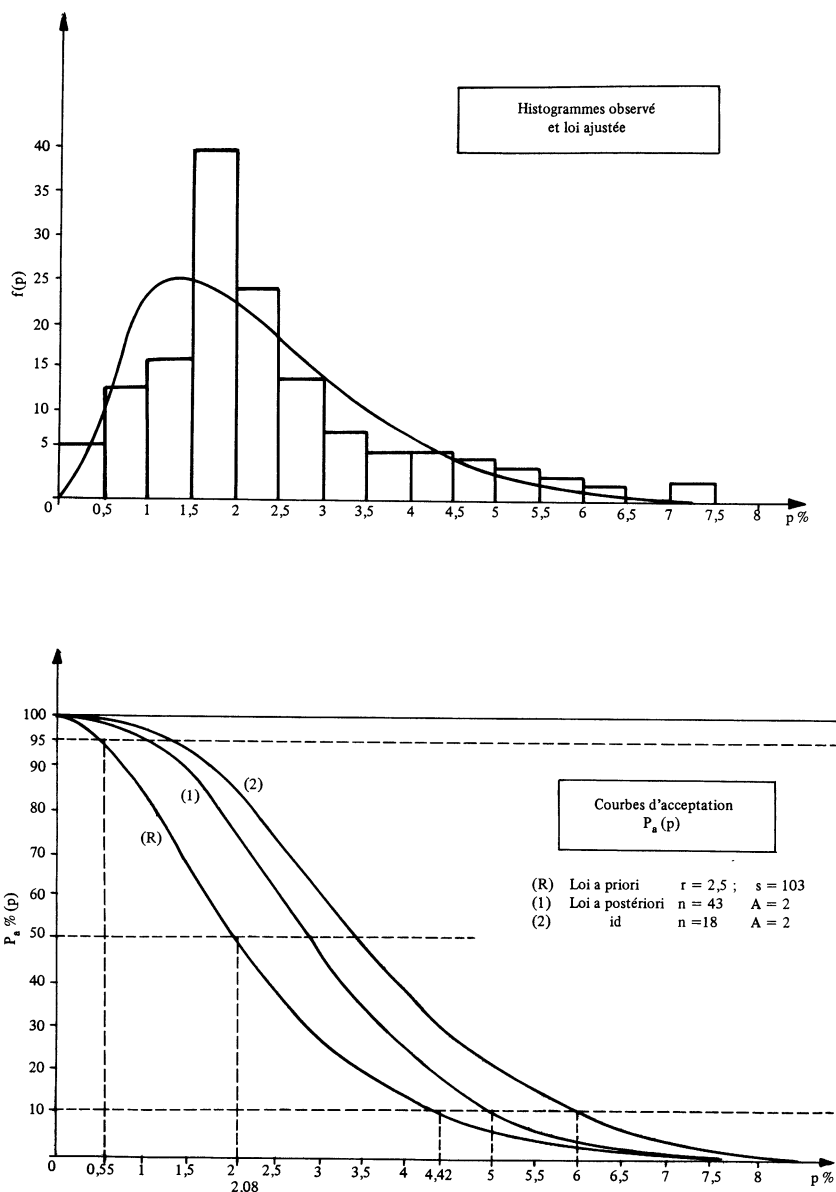
$$\hat{s} = 103,6 \text{ qu'on arrondit à } \hat{s} = 103$$

$$\hat{r} = 2,57 \text{ qu'on arrondit à } \hat{r} = 2,5$$

Bien que, selon la figure VI, l'ajustement à la loi B (2,5 ; 103) soit médiocre, on constate que les valeurs de m , σ (et aussi M_0 et M_e) calculées à partir des formules (1), (2), (3), (5) du § 1.1.2 sont proches des valeurs observées.

Figure VI

Ajustement d'observations à une loi Bêta et courbes d'acceptation



$$m_0 = \frac{r}{r+s} = \frac{2,5}{105,5} = 2,37 \% \quad \sigma = \frac{1}{r+s} \sqrt{\frac{rs}{r+s+1}} = \frac{1}{105,5} \sqrt{\frac{103 \times 2,5}{106,5}} = 1,47 \%$$

$$M_0 = \frac{r-1}{r+s-2} = \frac{1,5}{103,5} = 1,50 \% \quad M_e = \frac{1}{1 + \frac{s}{r} F_{0,50}(\nu_1, \nu_2)} \quad \left\{ \begin{array}{l} \nu_1 = 2s \\ \nu_2 = 2r \end{array} \right.$$

$$= \frac{1}{1 + \frac{103}{2,5} \times 1,15} = 2,05 \%$$

La "Courbe d'acceptation" de cette loi a priori est, selon la formule (9) du § 1.1.2, donnée par la relation :

$$\chi^2_{1-p_a}(\nu = 2r) = 2(r+s-1)p \quad \text{soit} \quad \chi^2_{1-p_a}(\nu = 5) = 209 p$$

On vérifiera qu'elle passe par les points $p_0 = 0,55 \%$, $P_a = 95 \%$

$$p'_1 = 4,42 \%, P_a = 10 \%$$

Elle a été tracée sur la figure VI.

Dans un contrôle où, pour $P_a = 10 \%$ on tolère une proportion donnée $p_1 > p'_1$ de défectueux, l'effectif de l'échantillon n , le critère d'acceptation A , et p_1 sont liés par la relation (19) du § 1.2.2.

$$\chi^2_{0,90}(\nu = 2(r+A)) = 2(r+s+n-1)p_1$$

$$\text{soit ici} \quad \chi^2_{0,90}(\nu = 2A+5) = 2(n+104,5)p_1$$

$$\text{ou encore} \quad \frac{\chi^2_{0,90}(\nu = 2A+5)}{2p_1} = 104,5 + n$$

La correspondance entre n et A est donnée ci-après pour $p_1 = 0,05$ (5 %) ; 0,055 (5,5 %) ; 0,06 (6 %) . . .

A	n		
	si $p_1 = 5 \%$	si $p_1 = 5,5 \%$	si $p_1 = 6 \%$
1	16	5	—
2	43	29	18
3	69	53	40
4	94	76	61
5	119	98	81
...	...	...	...

Pour $A = 2$ pris à titre d'exemple, les trois courbes d'acceptation a posteriori passent par les points ci-après.

	n = 43 A = 2	n = 29 A = 2	n = 18 A = 2
P _a %	p %	p %	p %
95	1,1	1,3	1,4
90	1,4	1,6	1,7
70	2,2	2,4	2,6
50	2,8	3,1	3,4
30	3,6	4,0	4,4
10	5,0	5,5	6,0
5	5,7	6,3	6,9
1	7,4	8,1	8,9

Les courbes d'acceptation a posteriori ont été tracées sur la figure VI pour les deux conditions $n = 43$ $A = 2$
 $n = 18$ $A = 2$

On peut encore remarquer que pour une même protection du client (valeur de p_1) l'augmentation simultanée des valeurs de n et A , augmente (au détriment de l'économie) la protection du fournisseur : mais le contrôle bayésien paraît s'en désintéresser.

ANNEXE A3

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] De FINETTI. — Bayesianism : Its unifying role for both the foundations and applications of statistics. *R.I.S.*, vol. 42, N° 2, Août 1974.
- [2] BERKSON J. — My encounter with new-bayesianism, *R.I.S.*, vol. 45, N° 1, Avril 1977.
- [3] HAMAKER H.C. — Bayesianism, a threat to the statistical profession, *R.I.S.*, vol. 45, N° 2, Août 1977.
- [4] HAMAKER H.C. — Subjective probabilities and exchangeability from an objective point of view, *R.I.S.*, vol. 45, N° 3, Décembre 1977.
- [5] Contributions to the discussion of the Bayesian approach, *R.I.S.*, vol. 46, N° 1, Avril 1978.
- [6] HANSEL et GROUCHKO. — Prévision séquentielle par la méthode de Bayes. *R.S.A.*, vol. 13, N° 3, 1965.
- [7] VESSEREAU A. — Sur l'intervalle de confiance d'une proportion, logique "classique" et logique "bayésienne", *R.S.A.*, vol. 26, N° 2, 1978.
- [8] MORLAT G. — Sur la comparaison entre des intervalles de confiance classiques et bayésiens. *R.S.A.*, vol. 26, N° 2, 1978.
- [9] RINGLER J. — Réduction des coûts d'essais de fiabilité par la pratique des techniques bayésiennes. *R.S.A.*, vol. 27, N° 2, 1979.

R.I.S. — Revue Internationale de Statistique.
R.S.A. — Revue de Statistique Appliquée.