REVUE DE STATISTIQUE APPLIQUÉE

D. HERNAD
M. MOUILLART
D. STRAUSS-KAHN

Forme typique du spectre et dépendance temporelle en économie

Revue de statistique appliquée, tome 27, n° 4 (1979), p. 49-76
<http://www.numdam.org/item?id=RSA_1979__27_4_49_0>

© Société française de statistique, 1979, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Revue de statistique appliquée » (http://www.sfds.asso.fr/publicat/rsa.htm) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

FORME TYPIQUE DU SPECTRE ET DÉPENDANCE TEMPORELLE EN ÉCONOMIE

D. HERNAD*, M. MOUILLART* et D. STRAUSS-KAHN**

On représente parfois l'économie par une "boîte noire" à processus linéaires (ou quasi-linéaires) (1). Ces processus sont linéaires dans la mesure où chaque output pourra s'exprimer comme une somme linéaire des inputs présents et passés (de plus chaque output une fois éloigné de la boîte s'assimile à un input).

En période de "crise", l'économie tendra à s'écarter de ce schéma trop simple. Mais même en situation "normale", il faut sans doute enrichir la représentation en laissant les fonctions de transformation de la boîte noire varier lentement avec le temps, ce qui introduit les délicats problèmes liés à la non-stationnarité des processus.

Ces quelques remarques ont d'importantes conséquences sur les possibilités de prévision économique. Postuler l'invariance de la boîte noire dans le temps, revient à considérer que les lois qui opèrent aujourd'hui sont homothétiques de celles qui agissaient dans le passé. En réalité, la boîte noire est loin d'être aussi accommodante :

1. elle est modifiée par le temps.
2. elle ne fournit pas un simple flux continu d'output, certaines séries résultant d'observations quotidiennes, d'autres de mesures hebdomadaires, etc. . .
3. de nombreuses données ne sont pas disponibles, d'autres sont noyées dans des variables agrégées,
4. des perturbations graves et importantes apparaissent ici et là : grèves, cataclysmes naturels, guerres, etc. . .

Aussi est-il restrictif de postuler la stationnarité des variables économiques. Si l'on accepte l'idée d'un changement lent des processus économiques avec le temps, les données résultant d'un échantillonage régulier de l'output peuvent à la rigueur découler d'un mécanisme générateur "stationnaire à court terme", mais correpondant très probablement à un processus "non-stationnaire à moyen et long terme" (2). Ceci peut expliquer que dans la plupart des séries économiques, les mouvements de basse fréquence portent une puissance plus importante que les hautes fréquences.

(1) Ce sera souvent le cas lorsque la représentation s'appuyera sur la construction d'un modèle macroéconomique.

(2) Pour une étude des hypothèses de non-stationnarité, cf. [11].

* Université de Paris X

** C.R.E.P., Université de Paris X et de Nancy II

Mots-Clés : **méthode R/S, dépendance temporelle, séries temporelles, processus à mémoire, prévision économique, variables économiques.**

Cependant, sous réserve de quelques vérifications empiriques, il est possible d'admettre une "quasi-stationnarité" des phénomènes envisagés. Une périodisation préalable des séries étudiées pourra, par exemple, assurer une certaine homogénéisation des phénomènes (3).

La conservation du "principe de la boîte noire" en tant que représentation presque invariante de l'économie permet alors de considérer la proposition suivante :

Toute série économique serait obtenue à partir d'une transformation linéaire – un filtrage linéaire – de mouvements aléatoires des inputs (comportements individuels par exemple). Il existerait alors une dépendance d'intensité plus ou moins grande entre les observations successives de cette série ; cette dépendance se traduisant par l'existence d'une mémoire plus ou moins importante [6].

C'est l'existence de cette mémoire qui peut expliquer que dans la plupart des séries économiques les mouvements de basse fréquence portent une puissance plus importante que les hautes fréquences. On se trouve alors en présence d'un spectre analogue à celui qu'ont mis en évidence ADELMAN [1] et GRANGER [3] (figure 1).

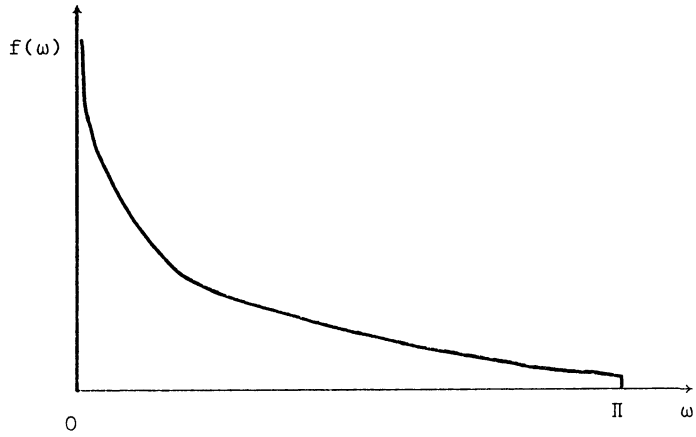


FIGURE 1.- UN SPECTRE A FORME TYPIQUE

Le spectre de ces séries présente une décroissance rapide depuis les basses fréquences, avec des pics plus ou moins prononcés aux fréquences saisonnières (4) (selon l'importance de la puissance spectrale supportée par la fréquence zéro).

En fait, cette forte puissance aux basses fréquences peut avoir deux origines au moins :

– la forme typique peut tout d'abord se rencontrer lors de l'étude du spectre d'un processus de la forme :

$$x_t = h(t) + \varepsilon_t \qquad (1)$$

(3) LAGRANGE et MOUILLART [7].

(4) Il convient de bien différencier mouvements périodiques et cycles. Les premiers se caractérisent par un spectre d'amplitude (obtenu par démodulation) constant ou monotone. Le spectre d'amplitude des seconds ne présentent pas de caractéristiques de monotonie. Et de plus, la considération de leurs spectres permet de mettre en évidence la présence d'harmoniques.

où la fonction h(.) est une fonction périodique, déterminable au sens d'une décomposition spectrale (cf. annexe 1), et où ε_t est un terme aléatoire de la classe des lois stables au sens de P. LEVY [8]. Pour des valeurs suffisamment grandes de la période de h(.), le spectre mettra en évidence une forte puissance aux basses fréquences ;

– mais la forme typique peut aussi se rencontrer pour un processus de la forme :

$$x_t = h(t) + g(\varepsilon_t) \qquad (2)$$

où g(.) est une fonction aléatoire définie à partir d'une composition linéaire d'aléas et qui serait à l'origine d'un effet de SLUTZKY, sur lequel nous allons revenir.

Du point de vue de la prévision, une différence fondamentale existe entre les processus (1) et (2). Dans le cas du premier processus, la prévision est possible : c'est-à-dire qu'il est possible de construire un modèle dont la seule variable explicative serait le temps. Pour ce faire, on effectuera une analyse spectrale de la série x_t. Après avoir déterminé le ou les mouvements correspondants, on recomposera la série par estimation statistique des coefficients correspondants (au moyen de l'analyse harmonique, par exemple). L'erreur de prévision de ce modèle sera alors, et sauf erreur de spécification, imputable à l'aléa ε_t et à lui seul.

Avec le second processus, en revanche, même si h(.) est déterminable par l'analyse spectrale, la prévision sera impossible car g(.) est indéterminable (mouvement cyclique apériodique) ou d'autant moins bonne que la part de g(.) dans la variance totale sera importante, c'est-à-dire lorsque sa puissance spectrale définie sur un échantillon sera très grande relativement à celle de h(.). En effet, (2) est composé par juxtaposition des mouvements h(.) et g(.). Si nous adoptons la méthodologie applicable à /1/, nous commettons une erreur de prévision imputable non seulement à la confusion entre ε et $g(\varepsilon)$, mais aussi à celle entre h(.) et g(.) :

– l'erreur due à la confusion entre ε et $g(\varepsilon)$ est traitée partiellement en économétrie par l'utilisation du test de DURBIN-WATSON qui se propose de rechercher l'existence d'une autocorrélation du premier ordre, c'est-à-dire la présence d'un processus markovien d'ordre un ;

– la seconde erreur, que l'on se propose d'étudier ici, peut être attribuée à une similitude spectrale entre un mouvement de longue période (au sens de (1)) et un "effet SLUTZKY" affectant les basses fréquences du spectre ;

– il reste l'effet de la part de variance imputable à g(.). Plus cette part sera importante, plus la confusion entre h(.) et g(.) sera susceptible d'introduire des biais lors de la prévision, et moins la simple observation du spectre de la série (2) sera en elle-même suffisante pour construire un modèle de prévision.

Le but de cet article sera de montrer qu'au delà de la simple explication de la forme typique du spectre, la méthode R/S (cf. [6] et annexe 2) nous permet d'établir une distinction entre les processus (1) et (2), et ainsi d'aider à la spécification de modèles économétriques prévisionnels. Nous nous proposons donc de distinguer entre vraies périodes et fausses périodes/vrais cycles en étudiant la structure des aléas. Dans le premier cas, (1), les aléas sont non corrélés. Dans le second, (2), la fonction aléatoire g(.) correspond à un processus à mémoire courte (processus markovien stationnaire du type moyenne mobile), à dépendance infinie positive (bruits fractionnaires gaussiens, promenade aléatoire non stationnaire) ou à dépendance négative (processus du type moyenne mobile alternée).

Avant d'étudier plus précisément cette distinction, peut-être n'est-il pas inutile de rappeler rapidement les propriétés spectrales des filtres linéaires et, comment l'effet SLUTZKY peut être à l'origine de fortes puissances aux basses fréquences.

I – FILTRAGE DES SERIES TEMPORELLES ET FORME TYPIQUE DES SPECTRES

I.1. Du gain d'un filtre linéaire . . .

Soit une série temporelle quelconque, X_t ([5]), et Y_t sa transformée par un opérateur linéaire de type moyenne mobile par exemple :

$$Y_t = \sum_{k=-m}^{m} a_k X_{t+k} \tag{3}$$

Les deux membres de cette égalité ont comme représentation de CRAMER :

$$Y_t = \int_{-\pi}^{\pi} e^{it\omega} Z_y(\omega)\, d\omega \tag{4}$$

et

$$\sum_{k=-m}^{m} a_k X_{t+k} = \sum_{k=-m}^{m} a_k \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\omega(t+k)} Z_x(\omega)\, d\omega \tag{5}$$

ce qui entraîne, en identifiant par bande de fréquence les expressions (4) et (5), l'égalité suivante :

$$Z_y(\omega) = \sum_{k=-m}^{m} a_k e^{i\omega k} Z_x(\omega)$$

Ainsi, en notant $A(\omega) = \sum_{k=-m}^{m} a_k e^{i\omega k}$ la transformée de FOURIER des coefficients a_k, les spectres des séries X et Y sont reliés de la manière suivante :

$$f_y(\omega) = |\, A(\omega) . \overline{A(\omega)} \,| . f_x(\omega)$$

où $A(\omega)$ s'appelle la fonction de transfert du filtre et $S(\omega) = |\, A(\omega) . \overline{A(\omega)} \,|$, son gain.

Nous voyons donc que toute transformation – tout filtrage – d'une série temporelle, aura pour conséquence de modifier la structure interne de cette série, et donc d'introduire des mouvements parasitaires susceptibles d'en fausser l'analyse si on n'y prend pas garde.

Afin d'illustrer cette remarque, nous allons considérer deux exemples de distorsions que l'on rencontre fréquemment dans la littérature économique.

I.1.1. Prenons tout d'abord le cas d'une série X_t de cours boursiers. Et supposons que les cours quotidiens du titre envisagé vérifient l'hypothèse d'une stricte promenade aléatoire (cf. par exemple [5]) :

$$X_t = X_{t-1} + \varepsilon_t \quad , \quad \varepsilon_t \sim \mathcal{N}(o\ ,\ \sigma)$$

---

(5) Bien entendu, la série X_t possède les caractéristiques de stationnarité requises.

Si pour des raisons de commodité (collecte des données) ou pour des raisons plus ou moins théoriques, nous nous contentons d'analyser les variations hebdomadaires des cours, le biais introduit se traduira par la présence de cycles artificiels.

En effet, la série analysée est maintenant :

$$X_t - X_{t-5}$$

Le filtre correspondant a pour fonction de transfert :

$$A(\omega) = 1 - e^{-5i\omega}$$

et pour gain :

$$S(\omega) = 2(1 - \cos 5\,\omega)$$

L'étude du gain de ce filtre nous montre que son application à la série X_t a entrainé l'introduction de trois mouvements (cycles) parasitaires de période égale, respectivement, à 10, 3.33 et 2 semaines (cf. figure 2 et tableau 1).

TABLEAU 1

ω	$S(\omega)$
0	0.
$\pi/8$	2.765
$\pi/4$	3.414
$3\pi/8$	.152
$\pi/2$	2.
$5\pi/8$	3.848
$3\pi/4$	.586
$7\pi/8$	1.235
π	4.

L'étude de la série des variations hebdomadaires pourra donc conduire au rejet de l'hypothèse d'une stricte promenade aléatoire, à la différence de la série des variations quotidiennes. De plus, l'utilisation d'une telle série biaisera l'estimation éventuelle des coefficients d'un modèle explicatif de la variation des cours.

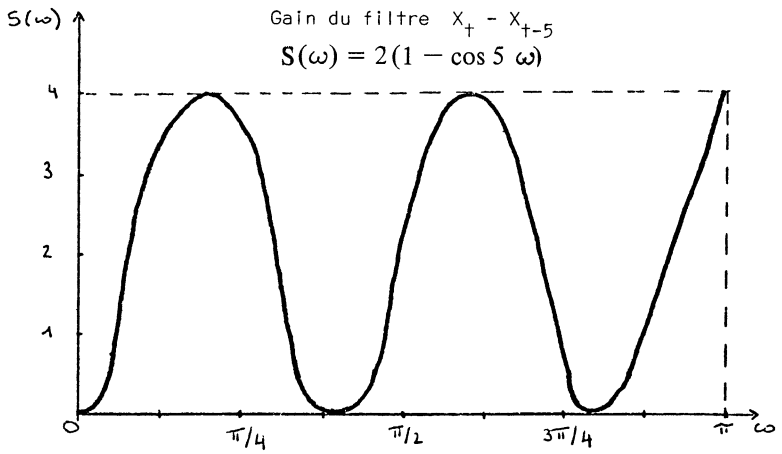


Figure 2

I.1.2. Le deuxième exemple, qui illustrera certains développements ultérieurs, concerne l'utilisation du filtre "différences premières". Ce filtre, en dehors de toute considération relative à la nature de la série initiale X_t, est couramment utilisé en économie afin d'éliminer une éventuelle non stationnarité en moyenne (tendance temporelle linéaire).

En fait, comme nous allons maintenant essayer de le montrer, une telle opération n'est justifiable que dans le cas d'une série X_t uniquement composée d'un aléa et d'une tendance linéaire simple. Son utilisation sur toute autre série introduira des effets pervers préjudiciables à la bonne compréhension du phénomène étudié.

Considérons à cet effet une série X_t définie par une moyenne mobile simple d'aléas normaux :

$$X_t = \frac{1}{2m+1} \sum_{i=-m}^{m} \varepsilon_{t+i} \quad , \quad \varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0,1)$$

où $2m+1$ représente la longueur de la moyenne mobile égale à 31 dans notre exemple.

Le spectre de X_t présente, comme on peut s'y attendre, le symptôme de la forme typique ([6]). Si, afin d'éliminer cette forte puissance à la fréquence zéro, nous appliquons un filtre différences premières à la série X_t, on s'aperçoit que les propriétés de long terme sont complètement gommées et celles de très court terme plus accentuées. Mais nous pouvons aussi constater en analysant la figure 3 que le spectre de la série $X_t - X_{t-1}$ exhibe un pic à la fréquence 0.275. Cette bande de fréquence explique 15.9% de la variance totale. Or il ne s'agit en aucun cas d'un mouvement périodique comme pourrait nous le confirmer une démodulation autour de la fréquence correspondante.

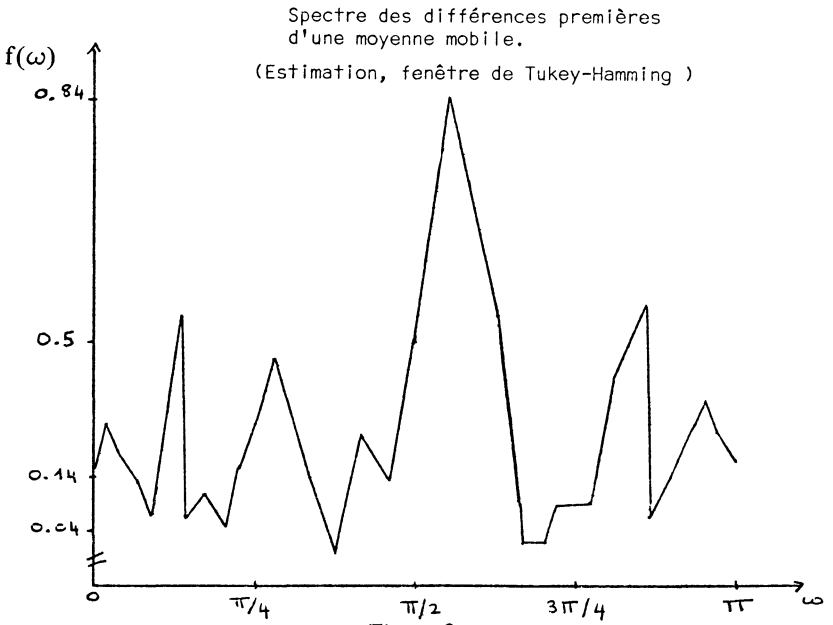


Figure 3

(6) Cf. tableau 2.

L'usage incontrôlé du filtre différences premières a modifié la nature du processus analysé. Un mouvement cyclique parasitaire a été introduit ; son existence faussera la compréhension du phénomène sous-jacent.

I.2. . . . A la forme typique

Considérons un filtre linéaire du type moyenne mobile simple c'est-à-dire tel que $a_k = 1/(2m+1)$ pour tout k. Ce filtre a pour gain :

$$S(\omega) = \frac{1}{(2m+1)^2} \cdot \left[2 \cos m\omega + \frac{\cos (m-1)\omega - \cos m\omega}{1 - \cos \omega} \right]^2$$

pour $\omega \neq 0$

$= 1$ pour $\omega = 0$.

Il a la particularité d'avoir un premier zéro en $\omega = 2\pi/(2m+1)$, le rapport du pic principal (pour $\omega = 0$), au premier pic latéral dépendant de la longueur de la moyenne mobile.

Ainsi la forme typique que traduit l'expression de $S(\omega)$ sera d'autant plus accentuée que la longueur de la moyenne mobile sera grande ([7]). Cette conclusion qui se généralise à tout filtrage linéaire permet de comprendre en quoi l'existence d'une forme typique peut être associée à l'existence d'un mémoire (tableau 2) ;

Tableau 2
Gain du filtre moyenne mobile simple

$S(\omega)$ \ ω	0	$\frac{\pi}{128}$	$\frac{\pi}{64}$	$\frac{\pi}{32}$	$\frac{\pi}{16}$	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{3\pi}{16}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
m = 10	1	.978	.915	.693	.184	.04	.008	ε	ε	ε	ε
m = 20	1	.918	.705	.202	.037	.015	.001	ε	ε	ε	ε
m = 100	1	.064	.039	.002	.001	ε	ε	ε	ε	ε	ε

ε traduit une valeur négligeable.

Ainsi, il apparait que l'existence d'une forme typique du spectre en économie peut être imputable à la présence d'un effet de mémoire/dépendance caractérisant la structure des fonctions aléatoires qui composent la série.

Cet effet de mémoire peut soit provenir de l'effet du filtrage que l'on a fait subir à la série initiale afin d'en isoler une ou plusieurs composantes (désaisonnalisation, lissage, . . .) ; ou tout simplement s'expliquer par la nature même de la série initiale, c'est-à-dire, en revenant au concept de boîte noire, par la nature et les caractéristiques du processus générateur des valeurs de la variable observée ([8]).

(7) ou, comme nous le verrons, que l'intensité de la dépendance sera forte.

(8) C'est le cas d'une part des séries simulées obtenues comme output d'un modèle macroéconométrique ; le rôle de la boîte noire sera jouée, ici, par la forme structurelle du modèle (cf., par exemple, DELEAU et MALGRANGE [2]). Ce sera aussi le cas des séries de prix spéculatifs des matières premières, des séries de cours boursiers, des séries de nombres-indices et de la plupart des séries économiques temporelles agrégées (c'est-à-dire composées à partir de séries microéconomiques), l'effet de composition tenant lieu de boîte noire.

L'effet de mémoire qui, rappelons-le, s'étudie au moyen de la technique R/S, est en soi suffisant pour justifier la présence d'une forme typique du spectre, comme nous le montrerons au § III.

Mais, avant de ce faire, nous allons rappeler les enseignements de SLUTSKY [12] qui, le premier, a mentionné l'existence d'une relation entre forme typique et dépendance temporelle. Il a en effet montré que l'utilisation des filtres introduit des éléments parasitaires dans l'analyse, des fausses périodicités, dont les caractéristiques de période et d'amplitude dépendent de la longueur du filtre considéré et qui sont liées à l'existence de pics latéraux.

II – DE LA FORME TYPIQUE DU SPECTRE A LA DEPENDANCE TEMPORELLE : L'EFFET SLUTZKY

Considérons une série aléatoire et sa transformée par une moyenne mobile. Nous savons que cette transformée peut être approximée par une somme de sinusoïdes : elle révèle une structure présentant des ondulations simultanées de périodes différentes.

Ce résultat est bien connu : lorsqu'on applique à une série aléatoire n fois un filtre de moyenne mobile, puis m fois un filtre différences premières, on engendre une nouvelle série qui tend à devenir strictement périodique lorsque les valeurs de n et m sont suffisamment grandes[9]. Le résultat s'explique[10] par le fait que plus on répète l'opération, et plus le coefficient de corrélation entre observations successives a tendance à augmenter. Aussi, les "zig-zags" autour des sinusoïdes approximant la série résultante, sont-ils de moins en moins importants.

Cette version de l'effet SLUTZKY [12] est une "version forte" qui suppose, en particulier, que l'on ait filtré la série d'origine un grand nombre de fois. Aussi, reportons-nous à l'article même de SLUTZKY afin de préciser les liens logiques qui unissent cycles et forme typique.

L'évolution de nombreux phénomènes économiques présente de façon très nette des cycles : "de même que les vagues qui se suivent les unes les autres sur la mer ne se répètent pas à l'identique, la période et l'amplitude des cycles économiques se modifient sans cesse avec le temps".

SLUTZKY s'est donc penché sur le problème de leurs origines : comment la structure d'une suite de nombres au hasard peut-elle être modifiée par l'introduction et l'application d'un opérateur linéaire ou, plus précisément, comment l'absence de structure si caractéristique de ce type de série peut-elle se transformer en vagues possédant une certaine régularité grâce à l'utilisation d'un filtre.

SLUTZKY cherche donc à répondre aux deux questions suivantes :

– Comment s'explique le caractère ondulatoire des phénomènes économiques ?

– D'où provient la régularité approximative des vagues ?

---

(9) Les caractéristiques de période et d'amplitude de la série output dépendent alors, d'une part de n et m, et d'autre part des coefficients des moyennes mobiles.

(10) Cf. "le théorème de la loi sinusoïdale limite" énoncé par SLUTZKY ([12], p. 131).

Il se sert des résultats du tirage des numéros d'emprunts gouvernementaux à lots qui constituent des suites de nombre au hasard (x_i). Il est amené à construire sept séries. Plutôt que de les présenter de façon exhaustive, il semble souhaitable de nous limiter à une seule de ses simulations : le "Modèle II".

Il le bâtit en effectuant deux moyennes mobiles de longueur 10, du type :

$$y_i = A_0 x_i + A_1 x_{i-1} + \ldots + A_9 x_{i-9} + 5 \, , A_j = 1 \, , \quad \forall j = 0, 1, \ldots 9 \qquad (6)$$

Il s'aperçoit alors qu'une partie de la série obtenue après la première moyenne mobile possède une configuration très proche de celle de l'Indice des cycles des Affaires concernant l'Angleterre, pour la période 1855-1877. De plus, une analyse graphique du "Modèle II" met en évidence son caractère cyclique.

On aboutit alors à une première proposition :

". . . la sommation de nombres au hasard peut générer des processus cycliques ou ondulatoires".

En effet, en observant l'évolution d'une série d'aléas normaux indépendants, on ne remarque que des vagues aléatoires sans structures, des zigzags irréguliers. Appelons ces aléas x_i et formons une nouvelle série en utilisant la formule (6). Les termes de cette série étant corrélés, les zigzags irréguliers cessent de constituer la seule composante : il existe des transitions graduelles entre le pic et le creux d'une même vague puisque la probabilité d'occurence d'une grande fluctuation est plus faible que celle d'une petite. Effectuons de nouveau la même opération que précédemment, les outputs devenant inputs. Les différences premières adjacentes sont maintenant corrélées. Et, de ce fait, à la gradualité des transitions va s'ajouter la progressivité : on pourra s'attendre à ce qu'à une baisse fasse suite une autre baisse, et vice versa. De plus, une forte baisse tendra à se poursuivre avec la même vigueur, une baisse peu sensible avec la même modération. Sur des petites sections de vagues on pourra distinguer des lignes droites. Leur fréquence et leur durée seront directement proportionnelles à la valeur du coefficient de corrélation. Des constatations du même type s'imposent pour le coefficient de corrélation entre les différences secondes : plus il sera élevé et plus la tendance à l'apparition de paraboles sera accentuée.

On comprend ainsi aisément que la sommation de nombres au hasard engendre des processus ondulatoires.

Afin de démontrer la régularité approximative des vagues, il procède dans un premier temps à une analyse de FOURIER d'une partie de la série (ou plus précisément des points d'abscisse paire, soit 120 termes). Il compare cette série à la somme des six premières harmoniques, c'est-à-dire des mouvements de fréquence $\Pi j/120$, $j = 1, \ldots, 6$. La similitude est déjà assez grande. Ensuite, il enlève ces composantes de basses fréquences : la courbe résultante s'approxime de façon remarquable par un produit de deux sinusoïdes. Elle met en évidence deux "enveloppes" (figure 4). Dans chacune d'elles, le régime reste bien entretenu durant plusieurs périodes.

Ceci montre de façon très précise qu'une tendance vers une forme parabolique ou une forme linéaire ne peut se maintenir sur une section importante d'une série : les écarts s'accumulant détruisent un régime : un nouveau régime fait alors son apparition.

Il existe de plus une autre tendance, induite sous certaines conditions par les opérateurs linéaires : la tendance à la forme sinusoïdale. Lorsqu'il y a une corrélation importante entre les différences secondes et les valeurs brutes, la série tendra à

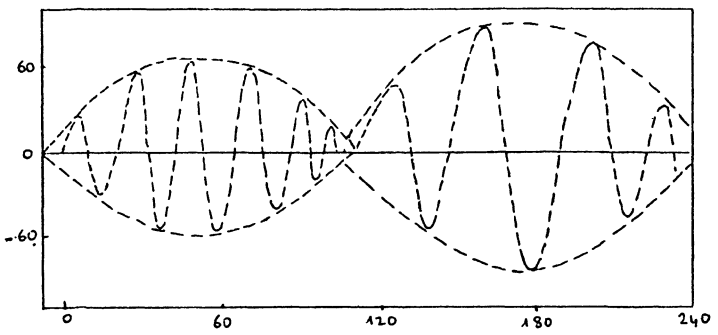


Fig. 4
Deux enveloppes de l'effet Slutzky.

avoir l'allure d'une sinusoïde. Et plus ce coefficient sera proche de -1 et plus cette tendance sera évidente. Néanmoins, un régime sinusoïdal sera fatalement rompu à un moment donné pour faire place à un autre régime.

D'où la deuxième conclusion :

"La sommation de nombres au hasard génère une série cyclique qui tend à imiter pour un certain nombre de cycles une série constituée par un petit nombre de courbes sinusoïdales. Après un nombre de périodes plus ou moins important, chaque régime est détruit, la transition à un autre se faisant parfois plutôt graduellement, parfois plus ou moins abruptement autour de certains points critiques".

L'étude des gains des filtres nous a montré que, loin de limiter ce résultat au filtre "moyenne mobile", comme c'est souvent le cas, il s'étend en suivant SLUTZKY à toute opération du type "somme" effectuée sur des aléas. D'où un énoncé plus général de l'effet SLUTZKY ;

La sommation de nombres au hasard génère une série cyclique qui tend à imiter pour un certain nombre de cycles une série constituée par un petit nombre de courbes sinusoïdales, mais dont la structure se modifie profondément et sans loi particulière lorsque l'on augmente la longueur de la série simulée.

La présence d'une forme typique associée au processus de type (2), sera donc consécutive à la présence de mouvements, de trajectoires de longue période. Ces trajectoires, générées par la procédure de filtrage (volontaire ou non) se traduisent visuellement par des enveloppes du type de celles représentées sur la figure 4. Elles se manifestent également par des corrélations importantes entre valeurs successives de la série étudiée.

Mais lorsque la longueur de la série s'accroît, toutes les autres caractéristiques de période et d'amplitude ne seront pas suffisamment stables pour la décrire.

La conséquence en est que les possibilités de prévision sur une série réelle sont très limitées si l'on utilise des modèles autorégressifs, puisque le processus va subir des modifications majeures au-delà d'un nombre aléatoire de cycles. D'où le résultat très connu dans l'étude de certains phénomènes obéissant à de nombreuses causes aléatoires (c'est le cas, par exemple, des cours de matières premières comme de celui de tout titre échangé sur un marché spéculatif) : leur comportement de long terme se rapproche de celui d'une martingale alors que leur étude sur une courte période peut laisser supposer l'existence de mouvements cycliques (voire périodiques).

De manière générale, les concordances statistiques observables entre plusieurs séries et qui permettent la construction de certains modèles économiques, sont d'autant plus précaires que la taille des échantillons analysés ne permettra pas d'introduire les modifications de structure interne de ces séries.

III – ANALYSE DE LA FORME TYPIQUE DU SPECTRE PAR LA METHODE R/S

Au-delà de la simple constatation de l'existence d'une forme typique, éventuellement de sa caractérisation, nous proposons maintenant une analyse du contenu informationnel de celle-ci, afin d'en tirer les enseignements nécessaires à la construction de modèles de prévision temporelle.

Nous allons, pour ce faire, tenter une identification des formes typiques par l'intermédiaire de leur intensité. C.est-à-dire puisque nous envisageons à cet effet l'utilisation de la méthode R/S, à l'aide de la valeur du coefficient H. Nous rejoignons en cela la remarque présentée par MANDELBROT ([10]), pp. 267-268)(11) concernant le rapport qui existe entre la notion de dépendance et la forme du spectre considéré.

Nous nous proposons donc de montrer :

1. que la méthode R/S permet d'opérer une distinction entre les processus de type (1) et ceux de type (2).

2. que cette méthode peut fournir, par ailleurs des indications très utiles sur la longueur de la mémoire du processus sous-jacent auquel se trouve associée une forme typique.

Nous étudierons, pour cela, un certain nombre de simulations du type moyenne mobile.

III.1. Forme typique du spectre et absence de mémoire : le cas d'un processus de type (1)

Considérons le cas d'un processus entièrement déterminable qui, cependant, exhiberait une forte puissance à la fréquence zéro. Ce sera, par exemple, le processus :

$$x_t = h(t) + \varepsilon_t \quad , \quad \varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0,1)$$

si h(t) est un mouvement cosinusoïdal simple dont la période ne peut être facilement isolée d'une simple tendance compte tenu de la taille de l'échantillon analysé.

Soit donc,

$$x_t = 0.225 \cos \frac{\Pi}{240} t + \varepsilon_t \quad , \quad \varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0,1)$$

(11) Une telle correspondance est aussi exprimée par MANDELBROT dans [9].

Ce processus ne présente aucune trace de dépendance temporelle. Et pourtant, si nous effectuons une analyse spectrale sur un échantillon de 200 observations, par exemple, la période du mouvement cosinusoïdal ne pourra pas être isolée : le spectre de x_t présentera le symptôme de la forme typique. C'est le cas du spectre 3 représenté par la figure 5 et qui n'est estimé qu'avec 48 retards[12]

Il semble difficile d'accroître le nombre des retards utilisés pour l'estimation spectrale, à cause de la taille réduite de l'échantillon. Afin d'isoler la période de ce mouvement, il faudrait théoriquement utiliser au moins 120 retards lors de l'estimation : le pic apparaîtrait alors dans la bande de fréquences $\left(\frac{\Pi}{120} \pm \frac{\Pi}{240}\right)$, soit dans la bande de période (160, 480), soit encore sur la bande de fréquences qui suit immédiatement la bande de fréquence 0.

Une telle recherche ne sera donc possible que pour un échantillon de taille nettement supérieure à celui qui est considéré ici. Lorsqu'on se trouve en présence d'un spectre à forme typique, il n'est pas toujours possible, et notamment en économie, d'augmenter suffisamment le nombre des retards utilisés[13].

En revanche, l'utilisation de la méthode R/S permet de préciser la nature de ce processus. Considérons à cette fin les résultats que nous fournit cette méthode [14].

TABLEAU 3

Mouvement cosinusoïdal sans mémoire
(période = 480, 200 points)

Estimation effectuée avec 10 courbes et T= n

Décalage initial n	10	30	50
H	0,542	0,528	0,516
r^2	0,998	0,995	0,990

La valeur de H est proche de 0,5 : nous pouvons conclure à l'existence d'un processus sans mémoire.

L'utilisation simultanée de R/S et de l'analyse spectrale nous permet donc de préciser aisément et quelque soit la taille de l'échantillon, la nature du processus analysé.

Avant de généraliser cette conclusion à l'analyse des processus de type (2), une remarque s'impose. La valeur de H tend vers 0.5 lorsque n augmente. Mais, dans le cas d'un processus sans mémoire, la rapidité de cette convergence dépend du rapport existant entre la variance du terme aléatoire et celle de la fonction h(t).

(12) Si nous nous limitons à 48 retards, la première bande de fréquence après le zéro correspond à une période comprise entre 64 et 192. Elle ne peut donc inclure un mouvement de période 480 !

(13) Rappelons qu'en données mensuelles, une série économique de 240 points devra être observable sur 20 années. Ce qui, actuellement, est déjà à la limite du possible pour la plupart des séries étudiées par l'économiste.

(14) Sur les points de méthode, cf. [6] et annexe 2.

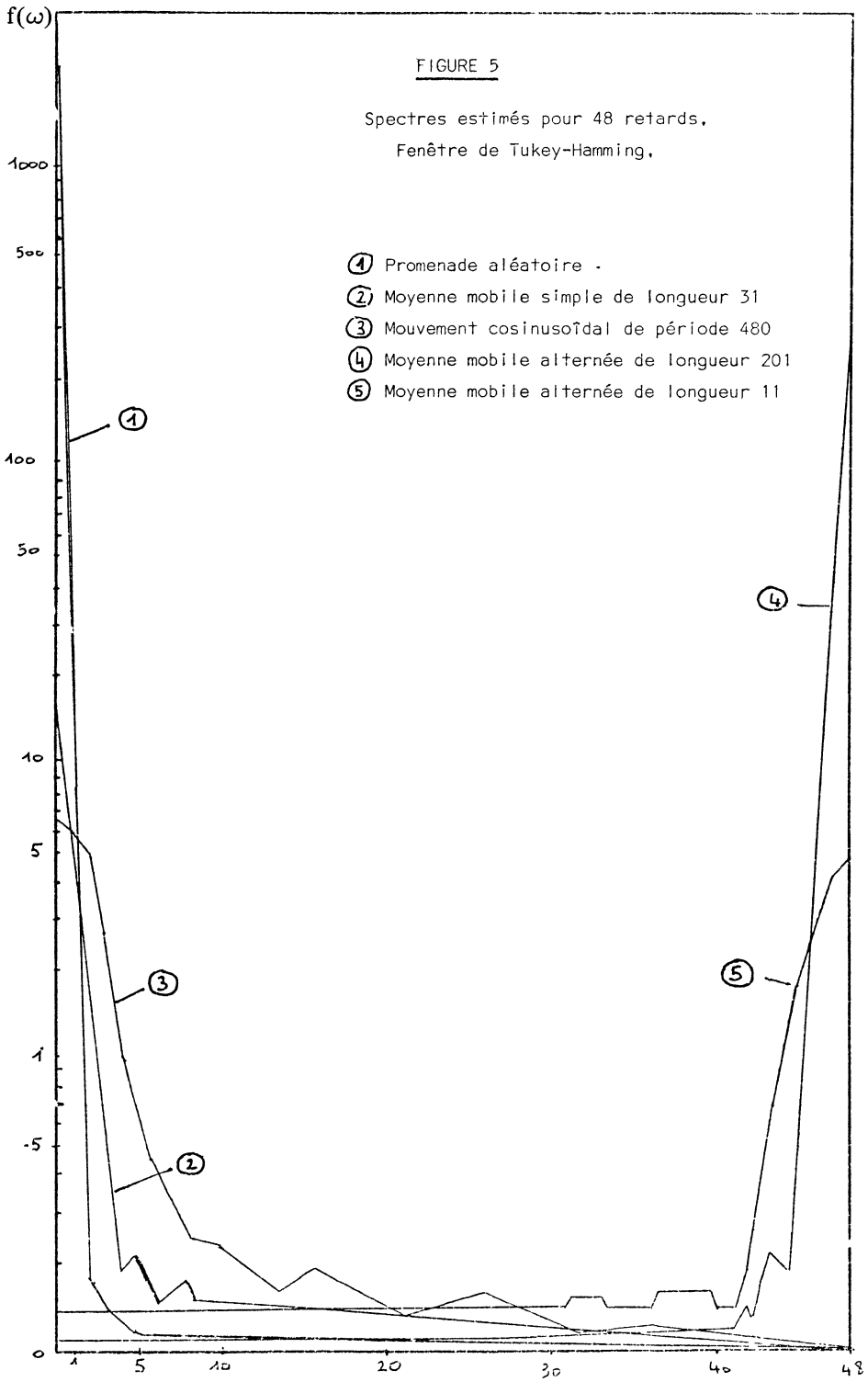


FIGURE 5

Spectres estimés pour 48 retards,
Fenêtre de Tukey-Hamming,

1. Promenade aléatoire .
2. Moyenne mobile simple de longueur 31
3. Mouvement cosinusoïdal de période 480
4. Moyenne mobile alternée de longueur 201
5. Moyenne mobile alternée de longueur 11

Plus ce rapport sera élevé, plus la convergence sera rapide. Ainsi, si le processus analysé est :

$$x_t = 4 \cos \frac{\Pi}{100} t + \varepsilon_t \quad , \quad \varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0,1) \ ,$$

nous obtenons les résultats suivants :

TABLEAU 4

Mouvement cosinusoïdal sans mémoire
(période 200, 1000 points)

Estimation effectuée avec 10 courbes et T = n

Décalage initial n	10	30	50	70	90	110
H	.797	.740	.641	.560	.537	.525
r^2	.988	.980	.952	.948	.935	.879

La comparaison de ces résultats avec ceux du tableau précédent, s'effectue en ayant présent à l'esprit que le rapport

$$\text{Variance } \varepsilon_t \ / \ \text{Variance } h(t)$$

est de 1/7 dans le cas présent alors qu'il était de 1 précédemment.

III. 2. Forme typique du spectre et dépendance positive : le cas de processus de type (2)

III. 2.1. La dépendance infinie positive

Le cas trival de la promenade aléatoire correspond, rappelons-le, à une valeur de H = 1. Ce processus de MARKOV d'ordre 1 non stationnaire a été simulé par le processus à accroissements indépendants suivant :

$$x_t = x_{t-1} + \varepsilon_t \quad , \quad \varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0,1)$$

Un tel processus a donc un spectre qui présente une puissance infinie à la fréquence zéro (figure 5). Ce qui s'explique aisément par le gain du filtre utilisé puisque le spectre de la série x_t est :

$$f_x(\omega) = \frac{f_\epsilon(\omega)}{2\,(1 - \cos \omega)}$$

avec

$$f_\epsilon(\omega) = \frac{1}{2\,\Pi} \qquad \text{pour tout } \omega.$$

L'application de la méthode R/S nous fournit, bien sûr, les résultats attendus (tableau 5). La valeur de H égale 1 dès que le décalage initial est suffisamment grand, traduisant ainsi l'existence d'une mémoire infinie.

Tableau 5

Estimations de h, série brute, 1 200 observations
Estimations effectuées avec 10 courbes et T = n

Longueur de la moyenne mobile		Décalage initial n						Caractéristiques spectrales du filtre
		10	30	50	70	90	110	
11	H	.687	.657	.654	.652	.650	.598	forme typique
	r^2	1.000	.997	.997	.991	.987	982	f(0)/f(II) = 121
31	H	.783	.828	.855	.887	.918	.901	forme typique
	r^2	.990	.991	.988	.987	.988	.981	f(0)/f(II) = 961
51	H	.807	.827	,833	.831	.828	.833	forme typique
	r^2	.993	.999	.999	.997	996	.996	f(0)/f(II) = 2 601
201	H	.831	.877	.961	.960	.966	.963	forme typique
	r^2	.968	.998	.999	.999	.999	.999	f(0)/f(II) = 40401
Promenade aléatoire	H	.723	.891	.957	.989	.992	1.000	forme typique
	r^2	.851	.987	.999	1.000	1.000	1.000	f(0)/f(II) = ∞

Afin d'éliminer la forte puissance et rendre la série stationnaire en moyenne quadratique, il est fréquemment préconisé dans la littérature d'étudier la série des quasi-différences ([15]). Un tel traitement de la série sera pertinent si la mémoire est infinie. Cependant, lorsque la mémoire est courte, cette procédure conduira à des résultats ininterprétables.

Ce sera notamment le cas si le processus sous-jacent est du type moyenne mobile de longueur finie ([16]).

Seule l'étude de la dépendance de la série brute à l'aide de la méthode R/S peut nous renseigner sur ce point, comme nous allons le voir maintenant.

III. 2.2. La dépendance finie positive ou mémoire courte

La présence d'une mémoire courte est définie par $0.5 < H < 1$ ([17]). L'exemple de processus caractérisés par une telle mémoire est celui des moyennes mobiles simples d'aléas normaux :

$$X_t = \frac{1}{2m+1} \cdot \sum_{i=-m}^{m} \varepsilon_{t+i} \quad , \quad \varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0,1)$$

$2m + 1$ représentant la longueur de la moyenne mobile.

L'analyse des résultats présentés dans le tableau 5 (cf. aussi figure 5), nous permet de dégager l'intérêt de la méthode R/S. On remarque en effet que, conformément aux résultats présentés en [6] et rappelés dans l'annexe 2, la valeur de H se trouve associée à la présence d'une mémoire.

Lorsque la valeur du décalage initial égale la longueur de la mémoire, la valeur de H augmente avec le rapport $f(O)/f(\pi)$ et nous fournit ainsi une indication sur l'importance de l'effet de mémoire.

---

(15) L'opérateur quasi-différence est défini par : $X_t - a X_{t-1}$, avec $a \leqslant |1|$.

(16) Nous avons vu précédemment un exemple de telles distorsions.

(17) Durant la phase transitoire, bien sûr (cf. annexe 2 et [6]).

De plus, la longueur de la mémoire (ici la longueur de la moyenne mobile) est directement appréciée par l'intermédiaire de l'évolution du r^2 : la longueur de la mémoire est associée au retard correspondant au r^2 maximum. Par exemple, dans le cas d'une moyenne mobile de longueur 11, le r^2 associé à l'estimation de H décroît dès le premier décalage utilisé, en l'occurence 10. Pour la moyenne mobile de longueur 51, le r^2 est stabilisé pour un décalage initial de 50 et décroît par la suite.

La méthode R/S permet donc d'associer à chaque forme typique la longueur de la mémoire correspondante. Nous avons vu précédemment que l'utilisation du filtre quasi-différences introduisait un biais dans la série output lorsque la mémoire du processus filtré n'était pas infinie. La composition des gains des filtres est à l'origine "d'artefacts" dont les caractéristiques dépendront de la longueur de la série brute.

Si nous appliquons la méthode R/S aux différences premières des séries "moyenne mobile" précédentes, nous obtenons :

Tableau 6

Moyenne mobile (200 observations)
Différences premières
Estimation effectuée avec 10 courbes et T = n

Longueur de moyenne mobile		Décalage initial n		
		10	30	50
11	H	0.365	0.289	0.295
	r^2	0.957	0.893	0.833
31	H	0.515	0.535	0.572
	r^2	0.976	0.975	0.921
51	H	0.531	0.638	0.794
	r^2	0.977	0.934	0.930

Aucune conclusion bien précise ne se dégage du tableau 6. Pour une moyenne mobile de longueur 11 les valeurs de H estimées traduisent l'existence d'une dépendance finie négative (cf. paragraphe suivant), tout à fait conforme à la nature de la série output. En revanche, dans les deux autres cas, nous risquons de conclure à l'existence d'une mémoire courte : le phénomène a été totalement dénaturé.

III. 2.3. La dépendance finie négative

Nous savons (cf. [6]) qu'une dépendance négative se traduit par des valeurs de H inférieures à 0.5. Une telle persistance se rencontre, par exemple, lorsque la valeur d'une série dépend des valeurs antérieures par l'intermédiaire d'un effet de mémoire comparable à une auto-corrélation négative. Un processus de cette nature peut être écrit de la sorte :

$$X_t = \sum_{k=-m}^{m} (-1)^k a_k X_{t+k}$$

Comme on pouvait s'y attendre, ces processus pour lesquels H tend vers 0 durant la phase transitoire présentent une forme typique inversée. Le tableau 7 (voir aussi figure 5) résume les caractéristiques spectrales de ces processus et leur analyse par la méthode R/S.

Les conclusions que l'on peut tirer d'une telle analyse doivent cependant être considérées avec prudence dans l'état actuel de nos recherches (cf. [6]).

Tableau 7

Moyenne mobile alternée (200 observations) série brute
Estimation effectuée avec 10 courbes et $T = n$

Longueur de la moyenne mobile		Décalage initial n			Caractéristiques spectrales du filtre
		10	30	50	
11	H	0.230	0.274	0.273	forme typique inversée
	r^2	0.848	0.765	0.553	$f(\pi)/f(0) = 121$
31	H	0.158	0.171	0.131	forme typique inversée
	r^2	0.564	0.526	0.206	$f(\pi)/f(0) = 961$
51	H	0.124	0.176	0.223	forme typique inversée
	r^2	0.476	0.469	0.767	$f(\pi)/f(0) = 2\,601$

IV – Deux exemples économiques

Afin d'illustrer les développements précédents, nous nous proposons maintenant d'analyser deux séries de cours du cacao ([18]). Le choix de ces séries, que nous commencerons par décrire brièvement, a été motivé par le souci de retrouver, par l'analyse R/S :

1 . le cas d'une dépendance infinie positive ;

2 . le cas d'une mémoire courte.

IV.1. Description des séries étudiées

Les deux séries temporelles analysées sont celles du cours quotidien du cacao. La première, est celle de l'échéance septembre 1975 à Paris ([19]). Elle a été observée du 2 septembre 1974 au 30 septembre 1975 et, nous disposons donc de 270 observations, compte tenu des samedis, dimanches et jours fériés qui sont des jours de fermeture de la Bourse des marchandises.

---

(18) Pour une analyse détaillée, le lecteur intéressé se reportera à D. HERNAD, [4].

(19) Une échéance indique l'époque de livraison de la marchandise correspondante. Par exemple, envisageons le cas d'un acheteur ou d'un vendeur de X tonnes de cacao. Cet opérateur prend position sur le marché, disons le 10 novembre 1974. L'opération peut se dénouer de deux façons différentes :
– **soit par** une opération inverse ; l'opérateur vend s'il était acheteur et achète s'il était vendeur, une quantité identique de cacao avant la fin du mois de septembre 1975. Il peut ainsi espérer réaliser une plus-value (ce sera le cas d'un spéculateur) ; ou, il peut tout simplement chercher à assurer sa situation face à une évolution défavorable des cours susceptible d'entrainer, par exemple, une dévalorisation de ses stocks de cacao (ce cas peut correspondre à celui d'un fabriquant de chocolat) ;
– soit par le maintien de la position initiale ; dans ce cas, l'opérateur devra livrer ou prendre livraison des X tonnes de cacao au cours du 10 novembre 1974.

Quant à la seconde série, celle de l'échéance mai 1975 à Londres, elle a été étudiée du 2 septembre 1974 au 29 mai 1975 et nous disposons donc de 185 cotations.

Les graphiques représentatifs de ces séries (figure 6) nous permettent de mettre en évidence le caractère principal de l'évolution des cours du cacao : les variations des cours sont en général de grande ampleur.

Le tableau 8 montre que plus de 5 % des variations de cours de l'échéance mai Londres et plus de 7 % de celles de septembre Paris sont d'un niveau absolu supérieur à deux fois la valeur de l'écart-type des séries considérées. Et l'on trouve encore plus d'1 % de variations de plus de 3 σ dans les deux cas. D'ailleurs, cette grande instabilité des cours se trouve confirmée par l'étude de la variance de sous-échantillons (tableau 9) et plus particulièrement pour septembre Paris. L'instabilité de celle-ci traduit la présence de variations de cours fréquentes et de grande ampleur.

Pour terminer cette rapide présentation des séries, soulignons un point sur lequel nous reviendrons : sur la figure 6, nous avons tracé le graphe représentatif d'une moyenne mobile simple de longueur 31 (200 observations). Il est intéressant de remarquer la similitude de profil entre cette série et les deux précédentes, et surtout avec le profil de l'échéance mai 1975 Londres. Bien sûr, les évolutions de la moyenne mobile semblent nettement plus heurtées ; un lissage permettrait cependant d'en dégager un profil plus comparable. Il n'en demeure pas moins qu'au vu d'une telle ressemblance, on est tenté de se rappeler la citation de SLUTZKY rapporté au § II ([20]), et l'on comprend mieux, à cette occasion, à quel point SLUTZKY avait pu être frappé par la similitude d'aspects entre une série générée par une moyenne mobile et l'évolution de certains phénomènes économiques.

Tableau 8

Fréquence des variations des cours

	% des variations en dehors d'un intervalle de		
	$\pm 2\ \sigma$	$\pm 3\ \sigma$	$\pm 4\ \sigma$
Mai Londres	5.33	1.06	0.53
Septembre Paris	7.03	2.22	0.

Tableau 9

Caractéristiques de la variance sur des sous-échantillons de longueur 30 : le cas de $P_t - P_{t-1}$

	Valeur minimale	Valeur maximale	Rapport des extrema
Mai Londres	62.6	294.1	4.7
Septembre Paris	46.	533.	11.59

(20) " . . . de même que les vagues qui se suivent les unes les autres sur la mer ne se répètent pas à l'identique, la période et l'amplitude des cycles économiques se modifient sans cesse avec le temps".

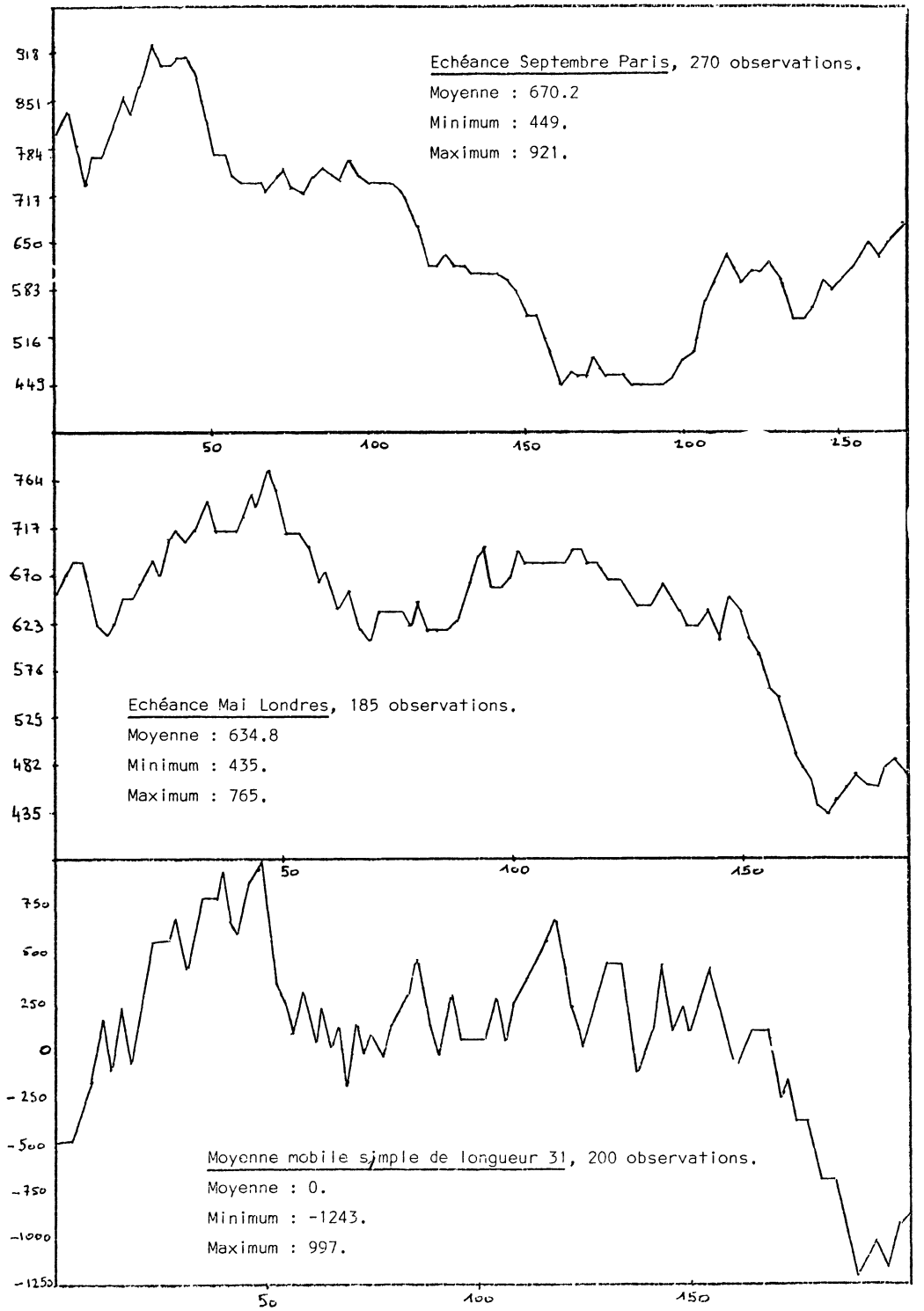


FIGURE 6 Graphiques des séries analysées.

Tableau 10

Caractéristiques spectrales

10.1 *Spectres des valeurs brutes, 40 retards, fenêtre de Parzen*

	% de variance expliquée par f(0)	f(0)/f(II)
Mai Londres	78.9	1 316
Septembre Paris	83.9	6 309

10.2 *Spectres des différences premières, 40 retards, fenêtre de Parzen*

	Période du pic principal	% de variance expliquée par ce pic	Période du second pic	% de variance expliquée
Mai Londres	∞	4.2	2.33	8.5
Septembre Paris	∞	5.6	3.	9.9

IV.2. Etude des caractéristiques spectrales des séries

Afin de rechercher une éventuelle forme typique, nous avons étudié les spectres des séries brutes. Nous en donnons la représentation dans la figure 7 : l'estimation correspondante a été effectuée avec la fenêtre de Parzen ([21]).

Il apparait immédiatement que les deux spectres exhibent une forte puissance à la fréquence zéro ; mais à un degré moindre dans le cas de l'échéance mai Londres comme on peut s'en rendre compte en considérant le tableau 10. Le rapport f (0)/f (II) est en effet plus grand dans le cas de l'échéance septembre Paris : 6 309 contre 1 316 par mai Londres.

En soi, une telle forme typique peut être associée à l'existence d'un processus générateur des cours du type moyenne mobile simple, par exemple. Alors, le rapport f (0)/f (II) sera approximativement égal au carré de la longueur de cette moyenne mobile (se reporter au I.2.). Donc, dans le cas de nos deux séries, une moyenne mobile simple de longueur (approximative) 36 serait associée à l'échéance Mai Londres et une autre de longueur 79 à l'échéance septembre Paris.

Une telle conclusion, au moins en ce qui concerne l'existence même d'un processus du type moyenne mobile, doit être vérifiée. Pour ce faire, nous employons bien entendu la méthode R/S.

(21) Le choix de cette fenêtre se justifie par le fait qu'elle permet de minimiser non pas le biais de l'estimateur, mais sa variance ; ce qui permet d'éliminer les problèmes de non convergence des estimateurs qui avaient été rencontrés à l'origine par SCHUSTER lors de l'interprétation des résultats fournis par son périodogramme.

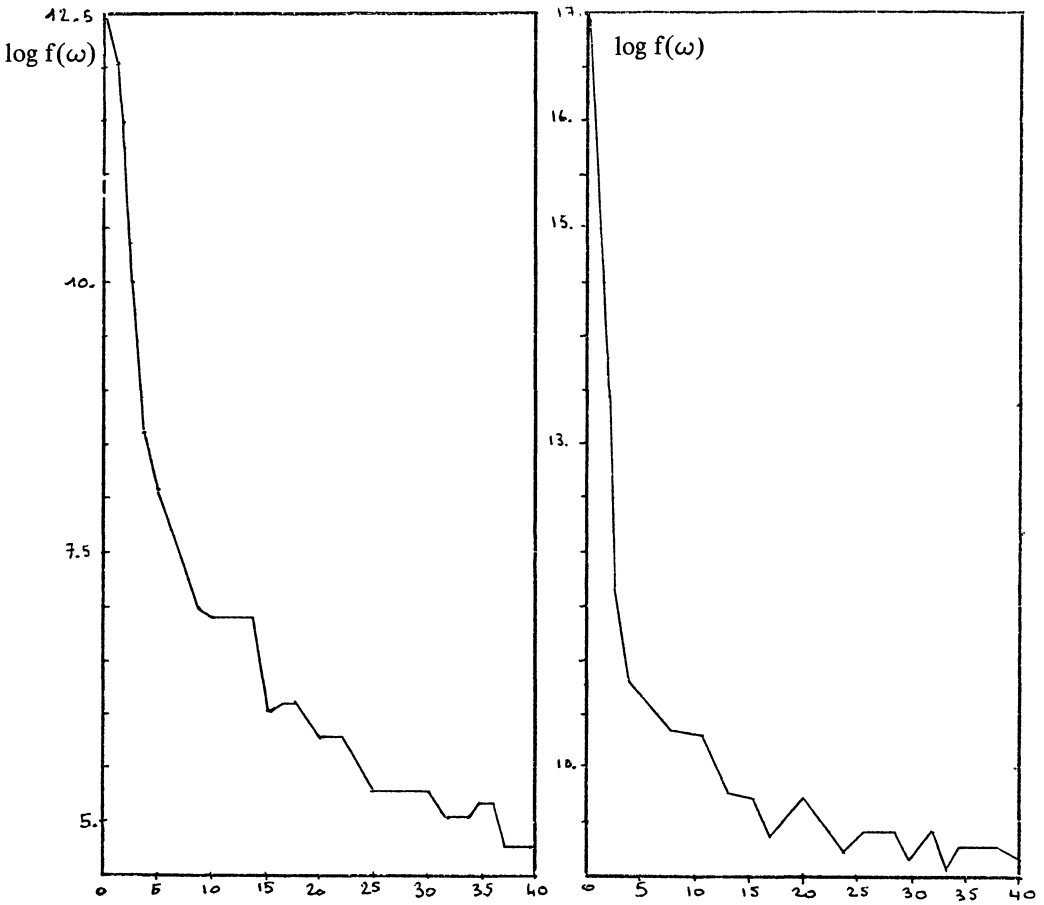


FIGURE 7

Graphes du logarithme de la puissance spectrale.
(Fenêtre de Parzen, estimation avec 40 retards)

IV.3. Etude de la dépendance temporelle

Compte tenu de la taille de nos deux séries (respectivement 185 et 270 observations pour mai Londres et septembre Paris), les estimations par la méthode R/S ont été entreprises avec 5 et 10 courbes, et toujours pour un décalage initial n'excédant pas 40.

Les résultats sont consignés dans le tableau 11. Considérons tout d'abord le cas de l'échéance mai Londres. Les estimations de H sur la série des cours bruts caractérisent un processus à mémoire courte (non infinie). Plus exactement, et en conservant à l'esprit la faible taille de l'échantillon analysé, les valeurs estimées de H et l'évolution du r^2 nous conduisent à retenir une mémoire de longueur supérieure ou égale à 30 (disons 35 par analogie avec les résultats de l'analyse

Tableau 11

Analyse par la méthode R/S

T = n

		nombre de courbes		Décalage initial 10	15	20	30	40
Cours bruts	Mai Londres	10	H	.960	.931	*	*	*
			r^2	.995	.994			
		5	H	.963	.929	.918	.854	*
			r^2	.990	991	.991	.992	
	Septembre Paris ([23])	10	H	1.029	1.028	1.032	*	*
			r^2	.999	.999	.999		
		5	H	1.029	1.035	1.041	1.065	1.080
			r^2	.996	.996	.995	.996	.994
Différences premières	Mai Londres	10	H	.592	.666	*	*	*
			r^2	.988	.984			
		5	H	.588	.582	.549	.508	*
			r^2	.994	.972	.943	.951	
	Septembre Paris	10	H	.718	.707	.691	*	*
			r^2	.995	.991	.987		
		5	H	.701	.699	.673	.681	.674
			r^2	.997	.995	.993	.994	.980

* Ces estimations ne peuvent être calculées compte tenu de la longueur des séries analysées, N, et de la contrainte d'estimation, nombre de courbes x décalage initial < N (cf. [6]).

spectrale) ([22]) : les valeurs du r^2 se stabilisent en effet dès le décalage initial de 20, puis persistent lorsque le décalage augmente. En outre, les valeurs de H, .854, et du r^2, .992, sont compatibles, pour un décalage de 30, avec celles de la moyenne mobile de longueur 31 du tableau 5.

Considérons la série des différences premières dont le spectre est représenté sur la figure 8. Son étude indique un pic "significatif" correspondant à une période de 2.33 cours. Ce pic semble induit par la procédure de filtrage utilisée et correspond à un cycle apériodique comparable à celui qui est isolé en I.1.2.. Cette similitude est frappante, au premier abord. Mais reportons nous à la comparaison graphique du § IV.1. : la moyenne mobile de la figure 6 nous semblait bien une représentation pertinente de l'échéance mai Londres.

---

(22) C'est-à-dire qu'un modèle autorégressif, par exemple, construit pour prévoir l'échéance mai Londres, devra intégrer l'information contenue dans les 35 dernières cotations :

$$P_t = f(P_{t-1}, P_{t-2}, \ldots, P_{t-35})$$

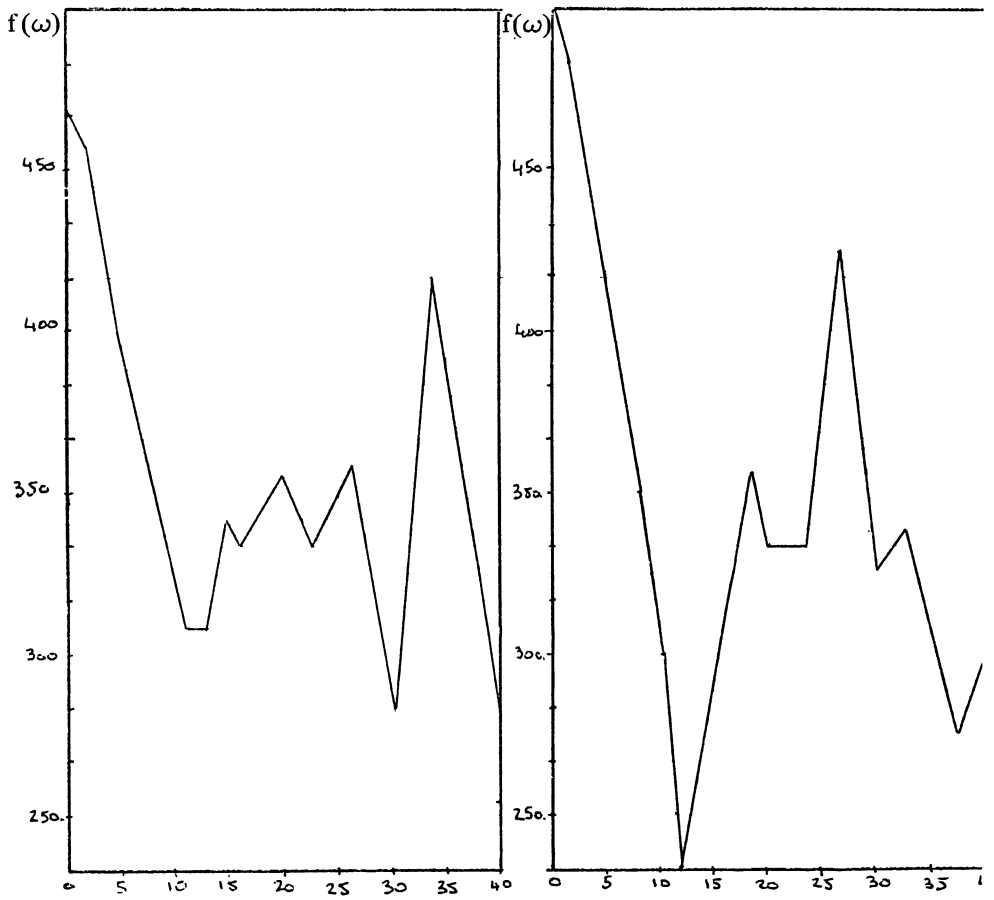
(23) Les valeurs de H estimées sont supérieures à 1 : cette situation résulte de la taille réduite de l'échantillon analysé.

Les résultats de l'analyse spectrale et de la méthode R/S paraissent concorder : le processus générateur de l'échéance mai 1975 Londres semble pouvoir être assimilé à un processus à mémoire courte dont la longueur avoisinne 35.

Cette conclusion heureuse ne doit cependant pas tromper. La concordance est fortuite. Non qu'elle ne puisse pas exister ; bien au contraire, puisque nous nous sommes jusqu'à présent efforcés de la mettre en valeur. Mais, compte tenu de la taille restreinte de l'échantillon, il ne faut voir là qu'un heureux hasard.

De manière générale, la taille de l'échantillon affecte les estimations spectrales, notamment la valeur du rapport $f(0)/f(\pi)$ et non l'estimation de H lorsque, comme nous allons le montrer, la série est à dépendance infinie positive.

En effet, si la mémoire de l'échéance septembre Paris semble être de 79 eu égard aux résultats de l'analyse spectrale, il n'en est plus de même avec la méthode



8.1. Echéance Mai Londres

8.2. Echéance Septembre Paris

FIGURE 8

Graphes de la puissance spectrale des différences premières.
(Fenêtre de Parzen, estimation avec 40 retards)

R/S. Les résultats du tableau 11 sont éloquents ([24]) : la dépendance de la série est infinie positive. La série, en l'absence d'une étude précise de ses variations, peut être rangée dans la classe des martingales.

Quant aux résultats des différences premières (tableau 11 et figure 8) ils doivent être considérés avec prudence en dehors de toute analyse plus précise de la série ([25]), mais ne sont en rien susceptibles d'altérer la conclusion précédente.

Le processus générateur de l'échéance septembre 1975 Paris s'apparente à un processus à mémoire infinie de la classe des martingales.

V. CONCLUSION

Au terme de cette étude, deux conclusions principales semblent s'imposer. La recherche et la mesure de la dépendance au sein des séries temporelles apparait comme une nécessité. La méthode R/S, en fournissant un puissant instrument d'analyse de la forme typique du spectre, répond à cette exigence.

Envisageons rapidement ces deux remarques.

1. L'effet pervers des dépendances temporelles a été rappelé avec insistance tout au long de cet article. Il n'est pas nécessaire d'y revenir une fois encore.

Mais la recherche et la mesure de la dépendance ne doivent pas demeurer une fin en soi.

Il faut pouvoir intégrer cette information nouvelle au sein d'une méthodologie globale.

Or, sur ce point, la déception est grande. Les procédures d'estimations économétriques des modèles reposent généralement sur une hypothèse rigide d'indépendance des aléas. Les développements classiques ([26]) de l'économétrie des modèles autorégressifs ou à retards échelonnés n'ont proposé jusqu'à ce jour qu'une solution bien imparfaite et insuffisante.

Il serait donc nécessaire d'envisager l'adaptation et l'étude spécifique de procédure d'estimation spectrale, par exemple, dont l'emploi est répandu dans d'autres domaines. Ou, de manière générale, de tout autre instrument qui permette explicitement la prise en compte des effets de mémoire.

---

(24) Les valeurs de H persistent à 1 et celles du r^2 sont en tout point semblables à celles des simulations présentées dans le tableau 5 et dans [6].

(25) On peut en effet parfaitement envisager que la série brute considérée est telle que : $X_t = \sum_{-\infty}^{t} Y_t$ avec $Y_t = \epsilon_t + a \cos \omega t$, ω très petit. La série X_t sera à dépendance infinie positive, comme dans le cas envisagé ; alors que le spectre de Y_t exhibera une puissance non négligeable en $\omega = 0$ et que la méthode R/S nous laissera présumer à l'existence d'une mémoire courte pour des décalages faibles. Ce résultat a été envisagé précédemment (III.1.1.) Il est d'ailleurs intéressant de comparer le tableau4 avec le tableau 11.

(26) Par classiques, nous entendons opérationnels, disponibles facilement et sans redéfinition préalable de l'objet. Ainsi en est-il de la régression, des procédures de Almon, . . . qui fournissent des programmes informatiques standardisés.

2. La méthode R/S nous permet d'estimer la longueur de la mémoire du processus étudié. Les résultats présentés dans cette étude peuvent se résumer dans le tableau suivant :

TABLEAU 12

Nature du processus étudié	Définition	Existence d'une forme typique	Méthode d'analyse utilisable	r^2 de l'ajustement Si T = n
Processus à dépendance infinie positive	$g(\varepsilon)$	oui	R/S	croissant avec n
Processus à mémoire courte	$h(t)$ + $g(\varepsilon)$	oui	R/S et analyse spectrale	• croissant puis décroissant • maximum pour n = longueur de de la mémoire
Processus sans mémoire (aléas non corrélés ou indépendants)	$h(t)$ + ε_t	oui si la taille de la série est trop restreinte	R/S	Pas de comportement caractéristique
		non dans le cas contraire	analyse spectrale	

[ANNEXE 1] LES PROCESSUS DETERMINABLES

Définition :

Un processus stationnaire $\{x_t\}$ est dit déterminable s'il existe une suite de nombres $b_1 \ldots b_j \ldots$ telle que :

$$x_t + \sum_{j=1}^{\infty} b_j x_{t-j} = 0$$

c'est-à-dire si l'on peut calculer chaque valeur x_t comme limite d'une combinaison linéaire infinie des valeurs prises antérieurement par x_θ , $\theta < t$.

Ainsi, à tout instant, l'évolution future de la réalisation peut-être parfaitement déterminée pourvu que l'on connaisse son évolution passée. Les processus déterminables ont des caractéristiques analogues à celles des processus harmoniques.

[ANNEXE 2] LA METHODE R/S

La méthode R/S permet de mesurer l'intensité de la dépendance qui peut exister dans la structure d'une série. Méthode d'analyse non paramétrique, elle repose sur la propriété suivante : la dépendance se traduit par des cycles apério-

diques de plus ou moins longue durée, ou, ce qui est équivalent, par une corrélation entre la moyenne de la chronique passée et la moyenne de la chronique future, quelque soit la longueur de la série.

Outre l'absence de dépendance/mémoire qui caractérise les aléas, indépendants non corrélés, on distingue trois types de dépendance :

a . la dépendance finie ou de courte période ou encore mémoire courte ; c'est le cas d'une série générée par un processus markovien du type moyenne mobile de longueur finie ;

b . la dépendance infinie positive (bruits fractionnaires, martingales, promenades aléatoires) ;

c . la dépendance infinie négative.

Le principe d'estimation du paramètre de dépendance H qui caractérise la méthode, a été mis au point par MANDELBROT [10] et il repose sur le calcul du rapport :

$$R(t,d)/S(t,d)$$

sur une fraction de la série étudiée, fraction commençant en t et de longueur d (d est appelé paramètre de décalage).

Si $x(t)$ est la série étudiée ([1]) et $x^*(t)$ la série cumulée :

$$x^*(t) = \sum_{s=1}^{t} x(s)$$

$R(t, d)$ est une version améliorée de l'étendue de $x^*(t)$ et $S^2(t, d)$ est la variance de la variable $x(t)$.

Le point central de ce calcul est que R, définie sur la variable cumulée, $x^*(t)$, combine les propriétés à long et court termes de la série $x(t)$, alors que S^2 n'inclut que les propriétés de court terme. Sous certains hypothèses, le rapport R/S ne contient plus que les propriétés de long terme de $x(t)$.

L'analyse R/S est obtenue à partir des propriétés d'une fonction aléatoire stationnaire définie en transformant $x(t)$ par la fonction $R(t, d)/S(t, d)$. C'est le comportement de cette fonction, lorsque $d \to \infty$, qui permet alors de définir le concept de R/S dépendance qui est une forme de dépendance statistique cyclique apériodique.

Définition

Un processus aléatoire satisfaira la loi $R/S \sim c\, d^H$ en moyenne, si

$$\lim_{d \to \infty} d^{-H}\, E[R(t,d)/S(t,d)]$$

est définie strictement positive.

Afin de procéder à l'estimation de H, la série $x(t)$ est découpée en un certain nombre de tronçons successifs de longueur d conduisant chacun à une valeur du rapport $R(t, d)/S(t, d)$. La valeur moyenne de ces rapports est associée au décalage d.

---

(1) La série $x(t)$ doit être préalablement centrée.

En recommençant le calcul pour différentes valeurs de d, on obtient une série de couples (R/S , d). Afin d'obtenir une répartition uniforme de d sur une échelle logarithmique, on définit ses valeurs par :

$$d(i) = n^{i\,B+1} \qquad i = 0, 1 \ldots T$$

où B est un paramètre de transformation logarithmique, n le premier décalage utilisé et T + 1 le nombre de tronçons retenu pour l'estimation.

Enfin, la valeur de H est déterminée à partir du coefficient de régression de log R/S sur log d. La qualité de l'ajustement retenu est mesurée par le coefficient de détermination r^2.

Nous avons montré ([6]) que l'analyse R/S peut être utilisée pour mesurer la longueur de la mémoire de la série x(t) et pour associer à chaque série la valeur de H qui lui correspond. Pour ce faire, nous proposons de balayer l'espace des décalages sous la contrainte T = n, c'est-à-dire d'effectuer plusieurs analyses R/S d'une même série pour différentes valeurs du décalage initial n employé. L'indicateur de qualité de l'ajustement, r^2, permet de déceler la longueur de la mémoire recherchée : il sera maximum dès que le décalage initial égale la longueur de la mémoire, l'estimation de H s'effectuant alors entièrement sur la phase transitoire.

Finalement, les résultats obtenus s'interprêteront comme suit, compte tenu de la valeur de H :

a) La série analysée étant purement aléatoire, la valeur de H sera 0.5 quel que soit le processus générateur. Ce qui traduit une absence de dépendance dans la série. La valeur de H, dans le cas d'un processus markovien de type moyenne mobile, avoisine aussi 0.5 une fois la phase transitoire dépassée ;

b) A mesure que la dépendance augmente, c'est-à-dire à mesure que des cycles de long terme apériodiques apparaissent, la valeur de H se rapproche de celle d'une trajectoire de longue période et le spectre de la série exhibera une très forte puissance à la fréquence zéro. En ce qui concerne une moyenne mobile simple, la pente H ne sera supérieure à 0.5 que durant la phase transitoire. Quant au cas de la promenade aléatoire H = 1 ;

c) Lorsqu'en revanche $0 < H < 0.5$, il y a une dépendance négative.

BIBLIOGRAPHIE

[1] ADELMAN (I.). – "Long Cycles : Facts or Artefacts ?", AER, LV, juin 1965, pp. 444-463.

[2] DELEAU (M.) et MALGRANGE (P.). – "L'analyse des modèles macroéconomiques quantitatifs", *Economica,* 1978.

[3] GRANGER (C.W.). – "The Typical Spectral Shape of an Economic Variable", *Econometrica,* vol. XXXIV (janvier 1966), pp. 150-161.

[4] HERNARD (D.). – "Hasard et fonctionnement des cours en Bourse des marchandises : le cas du cacao", Thèse de doctorat d'Etat ès Sciences économiques, octobre 1978, Université de Paris-X.

[5] HERNARD (D.) et MOUILLART (M.). – "Analyse spectrale des chroniques boursières : la théorie des promenades aléatoires", Mémoire de D E S, novembre 1975, Université de Paris-X.

[6] HERNAD (D.), MOUILLART (M.) et STRAUSS-KAHN (D.). – "Du bon usage de R/S", *Revue de Statistique appliquée,* vol. XXVI, n° 4, 1978.

[7] LAGRANGE (H.) et MOUILLART (M.). – "Lissage typologique et démodulation", Séminaire Classification automatique et reconnaissance des formes, IRIA, 1977, à paraître.

[8] LEVY (P.). – "Processus stochastiques et mouvements browniens", Gauthiers-Villars, Paris, 1965.

[9] MANDELBROT (B.). – "Long Run Linearity, Locally Gaussian Process, H-spectra ans Finite Variance", *International Economic Review,* vol. X, février 1969, p. 82-111.

[10] MANDELBROT (B.). – "Statistical Methodology for Non-periodic Cycles : from the Covariance to R/S Analysis", *Annals of Economic and Social Measurement,* I, juillet 1972, pp. 259-290.

[11] MASSON (A.) et STRAUSS-KAHN (D.). – "Le temps dans l'analyse des phénomènes économiques : processus stochastiques et interprétation des données synchroniques", *Annales de l'INSEE,* n° 29, 1-3/1978.

[12] SLUTZKY (E.). – "The Summation of Random Causes as the Source of Cyclic Process", *Econometrica,* avril 1937, pp. 105-146.