RAIRO. RECHERCHE OPÉRATIONNELLE

JEAN-PIERRE DUSSAULT
PATRICE MARCOTTE

Conditions de régularité géométrique pour les inéquations variationnelles

RAIRO. Recherche opérationnelle, tome 23, n° 1 (1989), p. 1-16
<http://www.numdam.org/item?id=RO_1989__23_1_1_0>

Recherche opérationnelle/Operations Research
(vol. 23, n° 1, 1989, p. 1 à 16)

CONDITIONS DE RÉGULARITÉ GÉOMÉTRIQUE POUR LES INÉQUATIONS VARIATIONNELLES (*)

par Jean-Pierre DUSSAULT (1) et Patrice MARCOTTE (2)

Résumé. — *Nous présentons une nouvelle condition de régularité pour les inéquations variationnelles. Cette condition de régularité est de nature géométrique, et permet d'analyser la convergence d'algorithmes itératifs. Nous présentons également diverses formulations du problème, ainsi que des conditions de régularité qui s'expriment naturellement dans l'une ou l'autre de ces formulations. En particulier, nous pensons à la condition de régularité forte de Robinson, ainsi qu'à la condition de stricte complémentarité classique. Nous mettons en évidence les liens entre ces conditions à l'aide d'exemples et contre-exemples.*

Mots clés : Inéquations variationnelles; régularité.

Abstract. — *We present a new regularity condition for variational inequalities. This condition is best expressed geometrically, and facilitates the local convergence analysis of iterative schemes. We give equivalent formulation of the variational inequality problem, and regularity conditions attached to them, in particular the strong regularity condition of Robinson and the standard strict complementarity condition. We establish relations between those conditions, by the means of examples and counterexamples.*

Keywords : Variational inequalities; regularity.

0. INTRODUCTION ET DÉFINITIONS DE BASE

Rappelons d'abord quelques définitions et résultats fondamentaux sur les inéquations variationnelles. On trouvera plus de détails dans les références [4, 8, 12, 16].

Soit C un ensemble convexe, compact de $\mathfrak{R}^n$, et F une fonction continue de C dans $\mathfrak{R}^n$. Nous disons qu'un point x de C est solution de l'inéquation

(*) Reçu septembre 1988.
(1) Recherche subventionnée par le Conseil de recherche en sciences naturelles et génie (Canada) et le programme de Recherche universitaire du ministère de la défense (Canada).
Université de Sherbrooke, boulevard de l'Université, Sherbrooke (Qué.), Canada, J1K 2R1.
(2) Collège militaire royal de Saint-Jean, Richelain (Qué.) Canada JOJ 1RO.

variationnelle définie par C et F si l'inégalité :

$$(x-y)^t F(x) \leqq 0 \tag{IV}$$

est satisfaite pour tout y dans C. Puisque x est alors point fixe de l'application semi-continue supérieurement

$$x \rightarrow \tau(x) \overset{\text{def}}{=} \arg\min_{y \in C} y^t F(x),$$

le théorème de point fixe de Kakutani [11] permet d'affirmer qu'il existe au moins une solution x dans C. Le problème d'inéquation variationnelle peut également être reformulé comme l'inclusion, ou *équation généralisée* (*voir* Robinson [17]) :

$$0 \in F(x) + N_C(x), \tag{EG}$$

où

$$N_C(x) := \begin{cases} \emptyset & \text{si} \quad x \notin C; \\ \{ y \mid y^t (c-x) \leqq 0, \ \forall c \in C \} & \text{si} \quad x \in C. \end{cases}$$

est le *cône normal* à C en x. Si l'ensemble C possède une représentation explicite de la forme $C = \{ x \in \mathfrak{R}^n \mid h(x) \leqq 0 \}$, où $h = \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_m \end{pmatrix} : C \mapsto \mathfrak{R}^m$ est continûment différentiable sur C, et si une qualification de contraintes est satisfaite, alors (IV) et (EG) peuvent s'exprimer sous forme du problème de complémentarité généralisée :

$$\begin{aligned} F(x) + h'(x)^t \lambda &= 0 \\ h(x) &\leqq 0 \\ \lambda &\geqq 0 \\ \lambda^t h(x) &= 0, \end{aligned} \tag{CN}$$

où $h'(x)$ dénote le jacobien de h en x.

Dans le cas particulier où F est le gradient d'une fonction f, par exemple si la matrice jacobienne $F'(x)$ est symétrique pour tout x dans C, alors la formulation (CN) représente les conditions nécessaires d'optimalité du premier ordre pour le problème

$$\begin{aligned} &\min f(x) \\ &\text{s. à. } h(x) \leqq 0. \end{aligned} \tag{PN}$$

Dans cet article, nous présentons une nouvelle condition de régularité pour la formulation (IV), et établissons les liens entre cette condition de régularité et d'autres conditions qui ont été proposées pour permettre l'analyse de la convergence d'algorithmes itératifs. Les définitions qui suivent seront utilisées fréquemment.

Monotonie. — *La fonction F est monotone (respectivement strictement monotone) sur l'ensemble C si $(x-y)^t(F(x)-F(y))$ est positif ou nul (respectivement positif) pour tout couple de points distincts (x, y) de C.*

Forte monotonie. — *La fonction F est fortement monotone sur C (de coefficient κ) s'il existe un nombre positif κ tel que*

$$(x-y)^t(F(x)-F(y)) \geqq \kappa \|x-y\|^2$$

pour tout couple x, y de points de C, où $\|\,.\,\|$ désigne la norme euclidienne dans $\Re^n$.

Notons que le gradient d'une fonction convexe (respectivement strictement convexe, fortement convexe) est une application monotone (respectivement strictement monotone, fortement monotone). *Voir* [1].

1. CONDITIONS DE RÉGULARITÉ

Nous présentons dans cette section deux conditions de régularité usuelles, l'une habituellement énoncée pour les problèmes (CN), et l'autre pour les problèmes (EG). Nous présentons certains résultats liant ces conditions entre elles, de même que leur lien avec la condition de forte monotonie.

1.1. Complémentarité stricte

Nous dirons que (IV), mis sous la forme (CN), satisfait une condition de complémentarité stricte en un point solution (x^*, λ^*) si on a :

$$\lambda_i^* = 0 \Leftrightarrow h_i(x^*) \neq 0, \qquad i = 1, \ldots, m.$$

1.2. Régularité forte

Cette condition assure que les solutions d'un problème perturbé se comportent bien. Nous présentons dans cette section la condition et son interprétation pour les problèmes (IV), (CN), et (PN). Dans ce qui suit nous supposons que $F \in C^1(\mathfrak{R}^n)$.

DÉFINITION 1.1 : *La linéarisation en* z *de* $F(x)+N_C(x)$ *est notée* $LF_z(x)+N_C(x)$, *où* $LF_z(z) \equiv F(x)+F'(z)(x-z)$.

On linéarise donc F mais non l'ensemble C.

DÉFINITION 1.2 : *Soit* $T(x)=F(x)+N_C(x)$ *une application d'un point dans un ensemble. La transformation inverse de* T *est définie par :* $T^{-1}(y) \overset{\text{def}}{=} \{x \in R^n \mid y \in T(x)\}$.

DÉFINITION 1.3 : *Une solution* x^* *de l'équation généralisée* $0 \in F(x)+N_C(x)$ *est dite* fortement régulière *si et seulement si il existe un voisinage* U *de l'origine, ainsi qu'un voisinage* W *de* x^* *tels que la restriction de* $(W \cap T_{x^*}^{-1})$ *à* U *soit univoque et lipschitzienne, où* $(W \cap T_{x^*}^{-1})(y) \overset{\text{def}}{=} W \cap T_{x^*}^{-1}(y)$ *et* $T_{x^*}(x) \overset{\text{def}}{=} LF_{x^*}(x)+N_C(x)$.

Considérons le cas où C est décrit par l'ensemble d'inégalités $h(x) \leqq 0$, et soit $h=\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}$ une partition de h telle que $h_1(x^*)=0$ et $h_2(x^*)<0$. Soit également λ_1 et λ_2 la partition correspondante des multiplicateurs λ. On a alors

$$F(x^*)+h_1'(x^*)^t\lambda_1=0. \tag{1}$$

Puisque x^* satisfait $x^*=T_{x^*}^{-1}(0)$, la condition de régularité forte implique que $T_{x^*}^{-1}(0) \cap W$ possède une solution y unique quel que soit u dans U. En d'autres termes, le système d'égalités et d'inégalités :

$$\begin{aligned} LF_{x^*}(y)+h_1'(y)^t\lambda_1&=u \\ h_1(y)&\leqq 0 \\ \lambda_1&\geqq 0 \\ \lambda^t h_1(y)&=0 \end{aligned} \tag{2}$$

possède une solution (y, λ_1) unique en y dans W (pas nécessairement unique en λ_1). Réécrivons le système précédent sous la forme :

$$\begin{aligned} [LF_{x^*}(x^*+\varepsilon)-u]+h_1'(x^*+\varepsilon)^t\lambda_1 &= 0 \\ h_1(x^*+\varepsilon) &\equiv 0 \\ \lambda_1 &\geqq 0 \\ \lambda_1^t h_1(x^*+\varepsilon) &= 0. \end{aligned} \tag{3}$$

Dans ce dernier système, u est fixé dans U, et l'on cherche un élément ε dans l'ensemble translaté $(W-\{x^*\})$ pour lequel il existe $\lambda_1 \geqq 0$ satisfaisant (3). Il est possible de s'assurer que $h_2(w)<0$ quel que soit $w \in W$ en choisissant W assez petit. On en déduit le résultat suivant :

LEMME 1 : *Si une solution* (x^*, λ^*) *de* (CN) *est fortement régulière en* x^*, *et si l'on a* $\lambda_1^*>0$ *et unique, alors la solution* w *de l'équation généralisée* (3) *satisfait* $h_1(w)=0$ *pour toute perturbation* ε *suffisamment faible de la fonction de coût* F.

Il est difficile en pratique d'obtenir des conditions suffisantes « faibles » impliquant la forte régularité. On peut en particulier exiger que λ_1 soit positif. Alors, on a que $-F(z)$ se trouve dans l'intérieur relatif $ri(N_C(z))$ du cône normal.

Dans ce cas, pour qu'une solution soit fortement régulière, il faut de plus que la linéarisation LF_{x^*} ne soit *pas constante* sur le plan tangent à la surface $h_1(x^*)=0$ passant par x^*. On peut alors, pour un problème perturbé, restaurer l'orthogonalité de $LF_{x^*}+\varepsilon$ à C, tout en s'assurant que $LF_{x^*}+\varepsilon$ demeure dans $ri(N_C(z))$. Les propriétés géométriques que nous venons de décrire correspondent en fait aux conditions classiques du second ordre d'existence d'un minimum local pour un problème de programmation non linéaire, lorsque $F(x)$ est intégrable sur C [6]. Il est intéressant de noter que la plupart des résultats d'analyse paramétrique en programmation non linéaire peuvent être transposés dans le contexte des inéquations variationnelles [13, 19].

Il est possible que des solutions fortement régulières ne satisfassent pas l'hypothèse de complémentarité stricte. Deux cas sont alors à considérer :

(i) $-F(x^*) \in ri(N_C(x^*))$. On a alors que la matrice jacobienne $h_1'(x^*)$ n'est pas de plein rang. Soit par exemple

$$F(x)=\begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad h(x)=\begin{pmatrix}x_3-x_1\\x_3+x_1\\x_3-x_2\\x_3+x_2\end{pmatrix}.$$

A l'origine, $x^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et l'on a que $-F(x^*)$ appartient à

$$ri(N_C(x^*)) = \{M^t \lambda : \lambda > 0\}$$

où M est la matrice jacobienne $h'(x^*) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Les représentations suivantes de $-F(x^*)$ correspondant à des vecteurs λ_1^* distincts sont toutes valides :

$$\begin{aligned}
-\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} &= 1\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \\
&= 0\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

(ii) Le second cas se produit lorsqu'une contrainte satisfaite avec égalité n'est pas *liante*, c'est-à-dire que x^* demeure solution lorsqu'on supprime cette contrainte.

Pour terminer cette étude de la régularité forte, nous démontrons que la forte monotonie implique la régularité forte.

PROPOSITION 1 : *Si F est fortement monotone sur C, alors toute solution x^* de* (IV) *est fortement régulière.*

Preuve : Considérons le problème perturbé $0 \in LF_{x^*}(x) + t + N_C(x)$ au voisinage de la solution unique x^*. Notons par $x(t)$ une solution du problème perturbé. On a :

$$(x(t_2) - x(t_1))^t (F(x^*) + F'(x^*)(x(t_2) - x^*) + t_2) \leqq 0$$

$$(x(t_1) - x(t_2))^t (F(x^*) + F'(x^*)(x(t_1) - x^*) + t_1) \leqq 0.$$

On obtient, par addition de ces deux inégalités :

$$(x(t_2)-x(t_1))^t(F'(x^*)(x(t_2)-x(t_1))+t_2-t_1)\leqq 0$$

$$(x(t_2)-x(t_1))^t(F'(x^*)(x(t_2)-x(t_1)))\leqq(x(t_2)-x(t_1))^t(t_2-t_1).$$

$$\leqq\|x(t_2)-x(t_1)\|\,\|t_2-t_1\|$$

Le membre de gauche de la dernière inégalité peut être borné inférieurement à l'aide du coefficient de forte monotonie de F :

$$\kappa\|x(t_2)-x(t_1)\|^2\leqq\|x(t_2)-x(t_1)\|\,.\,\|t_2-t_1\|.$$

On en déduit que $x(t)$ est lipschitzienne, de constante $1/\kappa$. □

2. RÉGULARITÉ GÉOMÉTRIQUE

Dans cette section, on introduit une nouvelle condition de régularité, plus faible que la stricte complémentarité, mais différente de la régularité forte. Cette condition permet d'étudier le comportement des contraintes liantes aux points générés par un algorithme de type itératif.

DÉFINITION 2.1 : *Supposons que C soit polyédral de représentation : $C=\{Bx\leqq b\}$ et dénotons par T la face minimale de C contenant l'ensemble S des solutions de (IV). Le problème (IV) satisfait une condition de régularité géométrique si :*

(i) $S\subseteqq ri(T)$;

(ii) $-F(x^*)\in ri(N_C(x^*))$ *pour tout* x^* *dans* S.

Cette condition est plus faible que la condition de complémentarité stricte en ce qu'elle n'est pas affectée par l'addition (ou la suppression) de contraintes « inutiles ». Notons également que notre définition n'exige pas que la solution soit unique. Les lemmes suivant présentent deux propriétés découlant de cette définition.

LEMME 2.2 : *Soit x^* une solution de* (CN) *pour laquelle la condition de complémentarité stricte est satisfaite. Alors x^* est géométriquement régulière.*

Preuve. — Lorsque C est polyédral on peut réécrire (CN) comme

$$\begin{aligned} F(x)+B^t\lambda&=0\\ Bx&\leqq b\\ \lambda&\geqq 0\\ \lambda^t(Bx-b)&=0.\end{aligned}$$

Sous l'hypothèse de complémentarité stricte on a :

$$\lambda_i^* = 0 \quad \Leftrightarrow \quad h_i(x^*) \neq 0, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Soit I l'ensemble des indices pour lesquels $(Bx)_i = b_i$, B_I et λ_I les partitions de B et λ induites par I. On a :

$$N_C(x^*) = \{ y = B_I^t \alpha \mid \alpha \geqq 0 \}$$

si $x^* \in ri(T)$. Par conséquent :

$$\begin{aligned} -F(x^*) &\in \{ y = B_I^t \alpha \mid \alpha > 0 \} \\ &\subseteqq ri(N_C(x^*)). \quad \square \end{aligned}$$

LEMME 2.3 : *Soit S l'ensemble des solutions de (IV) et T la face minimale de C contenant S; alors (IV) est géométriquement régulier si et seulement si T représente la face maximale de C qui soit orthogonale à $-F(x^*)$, pour tout x^* dans S.*

Preuve. — Soit $x^* \in S \subseteqq ri(T)$ et soit $aff(T) = \{ B_I x = b_I \}$ l'expression du sous-espace affine sous-tendant T. On a alors, comme auparavant : $N_C(x^*) = \{ B_I^t \lambda \mid \lambda \geqq 0 \}$. Si $-F(x^*)$ n'est orthogonal qu'à T, on en déduit qu'il n'existe pas de direction réalisable $d = y - x^*$, où $y \in C - T$, satisfaisant le système linéaire :

$$\begin{aligned} -B_I d &\geqq 0 \ (d \text{ réalisable}) \\ B_I d &\neq 0 \ (d \text{ n'est pas dans } aff(T)) \\ d^t(-F(x^*)) &\geqq 0. \end{aligned} \tag{4}$$

Or le théorème d'alternative de Stiemke (*voir* Chvátal [3]) stipule que le système (4) est irréalisable si et seulement si le système :

$$\begin{aligned} -B_I^t \lambda_I - \mu F(x^*) &= 0 \\ \lambda_I, \mu &> 0 \end{aligned}$$

possède une solution. Par conséquent on peut écrire :

$$-F(x^*) = B_I^t \frac{\lambda_I}{\mu} \quad (\lambda_I, \mu > 0)$$

et $-F(x^*) \in ri(N_C(x^*))$, c'est-à-dire que le problème (IV) est fortement régulier. $\square$

COROLLAIRE 2.4 : *Si le polyèdre C est borné, alors* (IV) *est géométriquement régulier si et seulement si, pour tout point extrême u de C et toute solution $x^* \in S$, l'on a :*

$$(u-x^*)^t F(x^*)=0 \quad \Leftrightarrow \quad u \in T$$

où S et T sont définis comme à l'énoncé du lemme 2.3.

Preuve. — Dans la preuve du lemme 2.3, l'hypothèse d'existence d'un point y satisfaisant $(x^*-y)^t F(x^*)=0$ (respectivement >0) peut toujours être remplacée, puisque C est compact, par celle de l'existence d'un point extrême (de T ou de C suivant le contexte) possédant les mêmes propriétés. □

Notons que la régularité géométrique n'est pas impliquée par la régularité forte. En effet, si $F(x)=\begin{pmatrix} x_1-1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ et $C=\Re^2_+$, on a, en $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $F(x)=0$ et $\lambda=0$. Cependant, cette solution est fortement régulière. En effet, le long de $x_2=0$, F se réduit à x_1-1, et son inverse est lipschitzienne dans le quadrant positif.

Évidemment, la régularité géométrique n'entraîne pas la régularité forte. En effet, aucune affirmation n'est faite au sujet de la continuité des solutions de problèmes perturbés.

3. ALGORITHMES

Nous présentons dans cette section quelques résultats relatifs à des algorithmes numériques qui soulignent l'importance de la condition de régularité géométrique introduite dans la section précédente. En fait, la régularité forte permet l'obtention de résultats liés à la convergence et au taux de convergence locaux d'algorithmes. La régularité géométrique permet de démontrer qu'un algorithme identifie les contraintes liantes à la solution.

3.1. Algorithmes itératifs

Dans cette section, nous considérons l'influence des conditions de régularité précédemment exposées sur la convergence d'une famille d'algorithmes itératifs. Les algorithmes de cette famille sont basés sur le schéma suivant :

$$0 \in G(x^{k+1}, x^k)+N_C(x^{k+1}), \tag{5}$$

où la fonction $G(x, x^k)$ constitue une approximation locale continue de la fonction F au point x^k, satisfaisant de plus $G(x, x)=F(x)$, $\forall x \in C$. Le domaine C n'est pas modifié. La fonction G est évidemment choisie de telle sorte que l'inéquation variationnelle (5) soit plus facile à résoudre que l'inéquation variationnelle originale. On trouve dans [4] et [16] des conditions de convergence locale et globale, difficiles à vérifier en pratique, dans le cas où $F(x)$ et $G(x, y)$ sont des fonctions fortement monotones en x. Ce schéma général englobe plusieurs algorithmes connus :

(i) la méthode de Jacobi : $G_i(x_i, x^k) = F_i(x_1^k, \ldots, x_{i-1}^k, x_i, x_{i+1}^k, \ldots, x_n^k)$ constitue la partie diagonale de la fonction F. L'inéquation variationnelle (5) est alors équivalente à un programme mathématique dont l'objectif est séparable. La méthode est d'autant plus efficace que F est dominée par sa partie diagonale;

(ii) la méthode de Jacobi linéarisée : $G(x, x^k) = D(x^t)x + F(x^k) - D(x^k)x^k$ où $D(x^k)$ est la partie diagonale de la matrice $F'(x^k)$;

(iii) la méthode de Gauss-Seidel :

$$G_i(x_i, x^k) = F_i(x_1^{k+1}, \ldots, x_{i-1}^{k+1}, x_i, x_{i+1}^k, \ldots, x_n^k);$$

(iv) la méthode de Gauss-Seidel linéarisée :

$$G(x, x^k) = L(x^k)x + F(x^k) - L(x^k)x^k$$

où $L(x^k)$ est la partie triangulaire inférieure de $F'(x^k)$;

(v) la méthode de projection : $G(x, x^k) = Ax + F(x^k) - Ax^k$ où A est une matrice symétrique définie positive. L'inéquation variationnelle (5) admet alors comme solution $x^{k+1} = \mathrm{Proj}_C^A(x^k - A^{-1}F(x^k))$ où Proj_C^A dénote l'opérateur de projection sur C selon la norme induite par la matrice A: $\|x\|_A^2 = x^t Ax$.

(vi) la méthode de Newton : $G(x, x^k) = F'(x^k)x + F(x^k) - F'(x^k)x^k$. C'est donc une méthode similaire à la méthode de projection, où la norme de la projection est modifiée à chaque itération.

Nous allons démontrer un résultat général concernant la classe d'algorithmes décrite par le schéma itératif (5). Il s'agit d'un résultat local.

PROPOSITION 2 : *Soit un problème d'inéquations variationnelles mis sous la forme* (CN), *satisfaisant les hypothèses suivantes :*

– *l'ensemble convexe C est polyédral et borné;*

– *la solution* x^* *de* (IV) *est unique;*

– *pour tout* x^k *dans C la solution de* (5) *est unique;*

– *la condition de régularité géométrique est satisfaite.*

Alors, il existe un voisinage V de x^* *tel que si v est dans V, le point* $\bar{v}$ *défini par :*

$$0 \in G(\bar{v}, v) + N_C(v)$$

se trouve dans la face optimale T.

Preuve. — Procédons par contradiction. Soit $\{x^k\}$ une suite convergeant vers $x^* \in T$ et telle que la suite $\{\bar{x}^k\}$ définie par

$$0 \in G(\bar{x}^k, x^k) + N_C(\bar{x}^k)$$

ne possède aucun élément dans T. Par continuité de G on doit avoir que $\lim_{k \to \infty} \bar{x}^k = x^*$. Puisque $\bar{x}^k \notin T$ il doit exister une suite de points extrêmes u^k dans $C - T$ telle que :

$$(u^k - \bar{x}^k)^t G(\bar{x}^k, x^k) = 0, \qquad \forall k. \tag{6}$$

Considérons une sous-suite de $\{\bar{x}^k\}$ pour laquelle (6) est satisfait avec $u^k = u$. L'existence d'une telle sous-suite et du point u découle du fait que le nombre de points extrémaux est borné. Puisque $u \notin T$ on a :

$$(u - x^*)^t F(x^*) > 0.$$

Remplaçons u^k par u dans (6) et passons à la limite pour obtenir :

$$(u - x^*)^t G(x^*, x^*) = (u - x^*)^t F(x^*) = 0$$

en contradiction avec l'hypothèse de régularité géométrique. □

Remarques. — 1. La condition de régularité forte seule ne permet pas de démontrer le résultat précédent. Considérons par exemple l'application de la méthode de Newton au problème suivant :

$$F(x) = x + x^2, \qquad C = \mathfrak{R}_+.$$

Alors,

$$F'(x) = 2x + 1.$$

L'origine $x^* = 0$ constitue une solution fortement régulière. Cependant, en un point $z = \varepsilon$, le problème linéarisé $0 \in LF_z(x) + N_C(x^*)$ avec $LF_z(x) = \varepsilon^2 + \varepsilon + (2\varepsilon + 1)(x - \varepsilon)$ admet comme solution unique $x = \varepsilon^2/(2\varepsilon + 1) \neq 0$. Robinson [17] a démontré que, pour la méthode de Newton, si F' est lipschitzienne sur C, et si x^* est fortement régulier, alors la suite $\{x^k\}$ converge quadratiquement vers x^*.

3.2. Algorithmes de descente

Dans cette section, nous étudions deux algorithmes de descente : nous introduirons une fonction de mérite permettant de témoigner du progrès d'algorithmes d'une itération à l'autre. L'analyse de cette fonction fera appel aux conditions de régularité introduites précédemment.

Définissons la fonction g de la façon suivante :

$$g(x) \overset{\text{def}}{=} \max_{y \in C} (x-y)^t F(x).$$

L'ensemble des solutions de (IV) coïncide avec l'ensemble des minima globaux de g sur C. Nous proposons d'utiliser la fonction g comme objectif. Des algorithmes utilisant la fonction g, en général une fonction non-différentiable, comme fonction de mérite ont été proposés dans [5, 14, 15]. En particulier, dans [15], on montre que la solution du problème linéarisé (itération de Newton) constitue une direction de descente stricte pour la fonction g au point x^k. Dans [5], une autre direction de descente est obtenue en linéarisant le terme de complémentarité de (PN), utilisé comme fonction objectif, ainsi que les autres égalités et inégalités, utilisées comme contraintes. Cette seconde direction de descente stricte coïncide avec la première dans un voisinage de la solution. L'utilisation de la fonction de mérite g permet d'assurer que ces algorithmes possèdent la propriété de convergence globale.

Pour démontrer la convergence locale quadratique de ces deux algorithmes, qui utilisent la direction de Newton localement, il faut montrer que l'effet de Maratos ne peut pas se produire avec la fonction g. Nous obtenons ce résultat en démontrant que la fonction g croît assez rapidement lorsqu'on s'éloigne de l'unique solution x^*.

PROPOSITION 3 : *Soit un problème* (IV) *satisfaisant aux hypothèses suivantes :*

— *C est borné;*

— *F est lipschitzienne de coefficient L;*

— *F est fortement monotone, de coefficient* κ;

— *La solution unique x^* de* (IV) *est géométriquement régulière.*

Alors, il existe deux constantes positives α et β telles que

$$\alpha \| x^* - x \| \leqq g(x) \leqq \beta \| x^* - x \|.$$

Preuve. — (i) Preuve que $g(x) \leqq \beta \| x^* - x \|$.

Soit $y \in C$ tel que $g(x) = (x-y)^t F(x)$. On a :

$$\begin{aligned} g(x) &= (x-y)^t F(x) \\ &= (x-x^*)^t F(x) + (x^*-y)^t F(x^*) + (x^*-y)^t (F(x) - F(x^*)) \\ &\leqq \| x-x^* \| \sup_{x \in C} \| F(x) \| + 0 + \operatorname{diam}(C) \cdot L \cdot \| x-x^* \| \end{aligned}$$

où diam (C) dénote le diamètre de l'ensemble borné C.

(ii) Preuve que $g(x) \geqq \alpha \| x-x^* \|$.

Soit $\tilde{y}$ tel que : $g(x) = (x-\tilde{y})^t F(x)$. On a :

$$g(x) = (x-\tilde{y})^t F(x) \geqq (x-y)^t F(x), \qquad \forall y \in \Phi.$$

Analysons le membre de droite de l'inégalité précédente :

$$\begin{aligned} g(x) &\geqq (x-x^*+x^*-y)^t F(x) \\ &= (x-x^*)^t F(x) + (x^*-y)^t F(x). \end{aligned}$$

Le premier terme peut se réécrire comme suit :

$$(x-x^*)^t F(x) \geqq \kappa \| x-x^* \|^2 + (x-x^*)^t F(x^*),$$

où κ est le coefficient de forte monotonie. Maintenant,

$$g(x) \geqq (x-x^*)^t F(x^*) + (x^*-y)^t F(x) + \mathcal{O}(\| x-x^* \|^2).$$

Posons $d = x - x^*$. Désormais, supposons que $y \in T$, la face de dimension minimale contenant x^*. Exprimons le développement de Taylor du premier ordre de g dans la direction d :

$$g(x) \geqq d^t F(x^*) + d^t F'^t(x^*)(x^*-y) + \mathcal{O}(\| d \|^2).$$

Ensuite, séparons le vecteur d en deux composantes, l'une suivant T, et l'autre suivant le complément orthogonal de T, noté $T^\perp$:

$$d = d_T \oplus d_{T^\perp}.$$

Maintenant, soit $\nu = \| d_T \|$, $\omega = \| d_{T^\perp} \|$, $d_1 = d_T / \nu$ et $d_2 = d_{T^\perp} / \omega$. Il s'ensuit :

$$g(x) \geqq \omega d_2^t F(x^*) + \begin{pmatrix} \nu d_1 \\ \omega d_2 \end{pmatrix}^t F'^t(x^*)(x^*-y).$$

Analysons maintenant séparément ces deux termes.

(*a*) On a que $F(x^*)$ et d_2 sont tous les deux orthogonaux à T. De plus, $F(x^*)$ est dans $ri(N_C(x^*))$. Donc, $F(x^*)$ et d_2 sont tous deux dans $aff(N_C(x^*))$, son enveloppe affine. Alors,

$$\omega d_2 F(x^*) \geqq \omega \inf_{\substack{\|\delta\| \\ \delta t \text{ aff } (N_C(x^*))}} \delta^t F(x^*) = \omega k_1 > 0.$$

(*b*) Le raisonnement est simplifié en choisissant $\bar{y}$ tel que $(x^* - \bar{y}) = \lambda d_1$ (λ positif). Alors

$$\begin{aligned} d^t F'(x^*)(x^* - \bar{y}) &= (\nu d_1 + \omega d_2) F'^t(x^*)(\lambda d_1) \\ &= \nu\lambda (d_1^t F'(x^*) d_1) + \omega \lambda (d_2^t F'^t(x^*) d_1) \\ &= \nu\lambda m_{1,1} + \omega\lambda m_{2,1} \\ &\geqq \nu\lambda\kappa + \omega\lambda m_{2,1}, \end{aligned}$$

où κ est le coefficient de forte monotonie de F. Notons que x^* est dans $ri(T)$, et donc, $0 \leqq \lambda \leqq \lambda_{\max}$, où $\lambda_{\max} > 0$ dépend de la distance séparant x^* de la frontière de T.

Puis réunissons les bornes obtenues pour obtenir :

$$g(x) > \omega(k_1 + m_{2,1}\lambda) + \nu\kappa\lambda.$$

Finalement, choisissons λ de telle sorte que le premier terme soit positif. Plus précisément, soit

$$\lambda = \min\left(\lambda_{\max}, \left|\frac{k_1}{2 m_{2,1}}\right|\right),$$

ce qui permet d'écrire :

$$\begin{aligned} g(x) &> \omega\left(\frac{k_1}{2}\right) + \nu\kappa\lambda \\ &= \frac{k_1}{2}\|d_{T^\perp}\| + \kappa\left(\lambda_{\max}, \left|\frac{k_1}{2 m_{2,1}}\right|\right)\|d_T\| \\ &\geqq \min\left(\frac{k_1}{2}, \kappa\left|\frac{k_1}{2 m_{2,1}}\right|, \kappa\lambda_{\max}\right)\|d\|. \quad \square \end{aligned}$$

Ce résultat permet de démontrer la convergence quadratique des algorithmes de type Newton qui utilisent la fonction g comme fonction de mérite, car les méthodes de type Newton convergent localement quadratiquement, ce qui sera également le cas pour la suite $\{g(x^k)\}$.

Il est facile de vérifier que le résultat n'est plus valide lorsque la régularité géométrique n'est pas satisfaite. Considérons en effet le programme non linéaire :

$$\min \frac{1}{2}(x^2+y^2)$$

$$\text{s. à. } -1 \leqq x \leqq 1$$
$$-1 \leqq y \leqq 0.$$

Pour cet exemple on vérifie aisément que $g(0, y)=y^2$ alors que le long de l'axe des ordonnées, la distance au point d'équilibre $(0, 0)$ est égale à $\|(0, y)-(0, 0)\|=|y|$.

4. CONCLUSION

Dans ce travail nous avons introduit une notion de régularité pour les inéquations variationnelles. Bien que, sous cette hypothèse, l'application $W \cap T_{x^*}^{-1}$ introduite à la définition 1.3 ne soit pas nécessairement univoque dans le voisinage U de l'origine, l'ensemble solution S est néanmoins stable dans le sens suivant : sous des perturbations faibles de la fonction F, la face optimale n'est pas modifiée.

Il est possible d'étendre notre définition de régularité dans le cas où l'ensemble C n'est pas nécessairement polyédral et ainsi d'obtenir des résultats analogues aux lemmes 2.2, 2.3 et proposition 2. Cependant, dans ce cas, la notion même de contrainte active devient moins intéressante, en particulier d'un point de vue algorithmique, sauf peut-être lorsque les contraintes sont définies à partir de fonctions quadratiques.

Finalement nous tenons à préciser que notre analyse était motivée par l'étude de la convergence d'algorithmes itératifs utilisés pour la résolution de problèmes pour lesquels la notion de complémentarité stricte n'était pas satisfaite. Cependant il serait intéressant d'étudier la pertinence de cette notion, en particulier dans le contexte de l'analyse de sensibilité pour les inéquations variationnelles.

BIBLIOGRAPHIE

1. A. AUSLENDER, *Optimisation. Méthodes numériques*, Masson, 1976.
2. D. P. BERTSEKAS, *On the Goldstein-Levitin-Polyak Gradient Projection Method*, I.E.E.E. Trans. on Automatic Control, vol. 21, n° 2, 1976.
3. V. CHVÁTAL, *Linear Programming*, Freeman, 1980.
4. S. DAFERMOS, *An Iterative Scheme for Variational Inequalities*, Math. Prog., 26, 1983, p. 40-47.
5. J.-P. DUSSAULT et P. MARCOTTE, A Modified Newton Method For Solving Variational Inequalities, *Proceedings of the 24th I.E.E.E. Conference on Decision and Control*, Fort Lauderdale, December 85, p. 1443-1446.
6. A. V. FIACCO et G. P. MCCORMICK, *Nonlinear Programming: Sequential Unconstrained Minimization Techniques*, Wiley, New York, 1968.
7. R. FLETCHER, *Practical Methods of Optimization*, vol. 2, Wiley, 1981.
8. R. GLOWINSKI, J.-L. LIONS et R. TRÉMOLIÈRES, *Analyse numérique des inéquations variationnelles*, Dunod, 1979.
9. N. H. JOSEPHY, *Newton's Method For Generalized Equations*, MRC Technical Report # 1965, U. of Wisconsin-Madison, 1979.
10. N. H. JOSEPHY, *Quasi-Newton Methods for Generalized Equations*, MRC Technical Report # 1966, U. of Wisconsin-Madison, 1979.
11. S. KAKUTANI, *A Generalization of Brouwer's Fixed Point Theorem*, Duke Math. Journal, Vol. 8, 1941, p. 457-459.
12. D. KINDERLEHRER et G. STAMPACCHIA, *An Introduction to Variational Inequalities and Applications*, Academic Press, New York, 1980.
13. J. KYPARISIS, *Sensitivity Analysis Framework for Variational Inequalities*, Math. Prog., Vol. 38, 1987, p. 203-214.
14. P. MARCOTTE, *A New algorithm for Solving Variational Inequalities with Application to the Traffic Assignment Problem*, Math. Prog., 33, 1984, p. 339-351.
15. P. MARCOTTE et J.-P. DUSSAULT, *A Note on a Globally Convergent Newton Method for Solving Monotone Variational Inequalities*, O. R. Letters, Vol. 6, 1987, p. 35-42.
16. J. S. PANG et D. CHAN, *Iterative Methods for Variational and Complementarity Problem*, Math. Prog., Vol. 24, 1984, p. 284-313.
17. S. M. ROBINSON, *Generalized equations* in Mathematical Programming: the Sate of the Art, Bachem, Grötschel, Korte ed., Springer-Verlag, 1982, p. 346-367.
18. R. T. ROCKAFELLAR, *Convex Analysis*, Princeton Univ. Press, 1970.
19. R. L. TOBIN, *Sensitivity Analysis for Variational Inequalities*, JOTA, 48, 1981, p. 191-204.