

F. A. LOOTSMA

## **Modélisation du jugement humain dans l'analyse multicritère au moyen de comparaisons par paires**

*RAIRO. Recherche opérationnelle*, tome 21, n° 3 (1987), p. 241-257

[http://www.numdam.org/item?id=RO\\_1987\\_\\_21\\_3\\_241\\_0](http://www.numdam.org/item?id=RO_1987__21_3_241_0)

© AFCET, 1987, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « RAIRO. Recherche opérationnelle » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

## MODÉLISATION DU JUGEMENT HUMAIN DANS L'ANALYSE MULTICRITÈRE AU MOYEN DE COMPARAISONS PAR PAIRES (\*)

par F. A. LOOTSMA <sup>(1)</sup>

---

**Résumé.** — *Les méthodes de comparaisons par paires permettent à un décideur individuel ou à un groupe de décideurs de pondérer un nombre fini de stimuli. Les méthodes multicritères aident alors à la décision par la pondération des critères (stimuli au niveau 1 de décision) et des actions (stimuli au niveau 2) sur les critères respectifs, et par l'agrégation des résultats intermédiaires, une procédure qui permet de calculer un score final pour chaque action.*

*Nous nous intéressons à une classe d'échelles discrètes et géométriques (c'est-à-dire que les échelons forment une série géométrique) pour exprimer les gradations du jugement (indifférence, préférence faible, préférence forte, ...) en comparant un stimulus à l'autre. Les transformations d'échelle ne changent pas les relations de surclassement des stimuli, et elles n'affectent que faiblement leur pondération.*

*La nature vague des gradations et l'imprécision des décideurs nous ont conduits à l'introduction des nombres flous pour exprimer les jugements préférentiels. Nous nous limitons aux nombres avec des fonctions caractéristiques triangulaires parce que les paramètres suivent une algèbre transparente. Dans un modèle simplifié, dont tous les jugements ont le même degré d'imprécision, nous obtenons une solution analytique qui nous permet d'étudier la propagation du flou dans une hiérarchie des niveaux de décisions.*

**Mots clés :** Méthodes pour l'aide à la décision; poids des critères; scores finaux des actions; nombres flous; normalisation des poids; propagation du flou; pondération des décideurs.

**Abstract.** — *We are concerned with the pairwise-comparison methods for solving the typical problem of multi-criteria decision analysis: the ranking and rating of a finite (usually small) number of alternatives under conflicting decision criteria. We are in fact running up against a two-level decision problem. At the first level, we estimate the weights of the decision criteria via a method of pairwise comparisons. At the second level, we estimate the weights of the alternatives in a similar way under each of the criteria separately. Lastly, we aggregate the results to obtain a final score for each alternative.*

*In a method of pairwise comparisons, stimuli (criteria at decision level 1, and alternatives at level 2) are presented in pairs to one or more decision makers. The basic experiment is the comparison of two stimuli by a single decision maker who is requested to express his preference (if any) for one of the two. Our particular concern is the interface with the decision maker: the numerical scaling of the gradations of his comparative judgement. Well-known results in psychophysical measurement enable us to show that the echelons should exhibit a geometric progression.*

---

(\*) Reçu janvier 1987.

(<sup>1</sup>) Faculté de Mathématique et d'Informatique, École Polytechnique de Delft, B.P. n° 356, 2600 AJ Delft, Pays-Bas.

*A welcome, additional observation is that transformations, due to variations of a scale parameter, do not produce rank reversal in a single-level evaluation of stimuli.*

*Because the gradations are vague and the decision makers imprecise, we express the judgemental statements in fuzzy numbers with triangular membership functions. These are characterized by a triple of parameters following straightforward, workable algebraic rules. We analyze a simplified model (where all judgemental statements have a common left-hand and right-hand spread) in order to understand the results of the calculations (the fuzzy final scores of the alternatives) as well as the propagation of fuzziness in hierarchical decision making.*

Keywords : Methods for decision support; weights of the criteria; final scores of the alternatives; fuzzy numbers; normalization of weights; propagation of fuzziness; weighing the decision makers.

## 1. L'ANALYSE MULTICRITÈRE

Nous considérons les méthodes de comparaisons par paires conçues pour la résolution du problème caractéristique de l'analyse multicritère [10], [11] : la pondération d'un nombre fini d'actions sur des critères incompatibles. En effet, nous devons faire face à une *hiérarchie de décisions*. Au premier niveau, nous évaluons les poids des critères par une méthode de comparaisons par paires. Au deuxième niveau, nous pondérons les actions de la même façon, sur chacun des critères séparément. Puis, nous agrégeons les résultats afin d'obtenir un score final pour chaque action. En résumé, soit  $c_i$  le poids calculé du critère  $C_i$  et  $a_{ij}$  le poids calculé de l'action  $A_j$  sur le critère  $C_i$ , nous évaluons le score final  $s_j$  de l'action  $A_j$  par

$$s_j = \sum_i c_i a_{ij} \quad (1)$$

une formule d'agrégation bien connue qu'on peut expliquer facilement (cf. annexe 1).

## 2. COMPARAISONS PAR PAIRES

Dans une méthode de comparaisons par paires, on présente des stimuli par deux à un décideur ou à un groupe de décideurs. Au premier niveau de décisions les stimuli sont les critères eux-mêmes, au deuxième niveau ils sont les actions sur le critère actuel qu'on est en train d'étudier. *L'essai élémentaire* est la comparaison des stimuli  $S_i$  et  $S_j$  par un décideur individuel  $k$  qui est prié d'exprimer sa préférence (s'il en a une) pour un des deux. Nous supposons que  $S_i$  et  $S_j$  ont des valeurs  $V_i$  et  $V_j$  sur une échelle numérique. Il est entendu que la réponse du décideur (sa préférence, dans une forme narrative ou qualitative) est une approximation de l'importance relative des stimuli exprimée par  $V_i/V_j$ . La réponse est en fait limitée à un nombre fini de catégories :

les gradations du jugement comparatif. Le décideur est prié de choisir une des qualifications

- indifférence,
- préférence faible,
- préférence forte,
- dominance,

ou un seuil entre deux qualifications voisines s'il hésite entre elles.

**3. ÉCHELLE QUALITATIVE ET ÉCHELLES NUMÉRIQUES**

Nous nous intéressons particulièrement à l'interface avec le décideur : l'échelle numérique associée aux gradations de son jugement. Considérons l'essai élémentaire où le décideur  $k$  compare  $S_i$  à  $S_j$ , et partons d'une échelle qualitative dont les échelons sont donnés par les qualifications (gradations) suivantes :

- $e_6$  dominance de  $S_i$  sur  $S_j$
- $e_5$  seuil de dominance
- $e_4$  préférence forte pour  $S_i$
- $e_3$  seuil d'engagement
- $e_2$  préférence faible pour  $S_i$
- $e_1$  seuil d'indifférence vers  $S_i$
- $e_0$  indifférence
- $e_{-1}$  seuil d'indifférence vers  $S_j$
- $e_{-2}$  préférence faible pour  $S_j$
- .....
- $e_{-6}$  dominance de  $S_j$  sur  $S_i$ .

Le symbole  $e_n$  représente la valeur numérique de l'échelon  $n$ . Pour  $n \geq 0$ , nous utilisons maintenant un résultat bien connu dans le domaine de la psychologie expérimentale : l'écart  $e_{n+1} - e_n$  est supérieur ou égal à la différence perceptible minimale qui est proportionnelle à  $e_n$ . Notre modèle pour l'échelle numérique est alors fondé sur la relation (J. Meisner, entretiens privés, cf. [9])

$$e_{n+1} - e_n = \varepsilon e_n$$

où  $\varepsilon$  représente une constante indépendante de  $n$ . On en déduit immédiatement

$$e_{n+1} = (1 + \varepsilon)e_n = (1 + \varepsilon)^2 e_{n-1} = \dots = (1 + \varepsilon)^{n+1}.$$

En substituant  $\exp(\gamma) = (1 + \varepsilon)$ , on peut écrire les valeurs des échelons comme

$$e_n = \exp(\gamma n),$$

où  $\gamma > 0$  est le paramètre d'échelle. Cette expression s'applique aussi au cas où  $n$  est négatif. Notons maintenant par  $r_{ijk}$  la valeur numérique du jugement dans l'essai ci-dessus. Pour le codage du jugement on a donc

$$r_{ijk} = \exp(\gamma \delta_{ijk}), \quad (2)$$

où  $\delta_{ijk}$  est un nombre entier,  $-6 \leq \delta_{ijk} \leq 6$ , qui désigne la gradation choisie par le décideur (cf. fig. 1 et 2 du projet C.R.E.).

Dans nos essais numériques et dans nos projets [4, 6, 8, 9] nous avons surtout utilisé les valeurs  $\gamma = 1/2$  (échelle normale) et  $\gamma = 1$  (échelle longue ou étendue) parce qu'elles semblent acceptables du point de vue des sciences sociales. En outre, ces essais nous permettent à étudier l'influence du choix de  $\gamma$ .

#### 4. VALEURS APPROXIMATIVES DES STIMULI

Soit  $D_{ij}$  l'ensemble des décideurs qui ont comparé  $S_i$  à  $S_j$  et qui ont prononcé leur opinion; il n'est pas nécessaire que leurs jugements soient conformes. Une approximation du vecteur  $V = (V_1, \dots, V_p)$ ,  $p$  représentant le nombre de stimuli, est alors obtenue par la minimisation de la fonction

$$\sum_{i < j} \sum_{k \in D_{ij}} (\ln r_{ijk} - \ln v_i + \ln v_j)^2. \quad (3)$$

En écrivant  $w_i = \ln v_i$  et  $q_{ijk} = \ln r_{ijk} = \gamma \delta_{ijk}$ , on déduit les équations normales

$$w_i \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^p N_{ij} - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^p N_{ij} w_j = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^p \sum_{k \in D_{ij}} q_{ijk}, \quad (4)$$

où  $N_{ij}$  est le nombre d'éléments dans l'ensemble  $D_{ij}$ . En général, il y a exactement un degré de liberté dans les solutions de (4), et on écrit une solution arbitraire comme  $w_i + \eta$ . En supposant que les valeurs  $V_b$  de même

que leurs approximations  $v_i$ , sont normalisées par

$$\sum_{i=1}^p V_i = \sum_{i=1}^p v_i = 1, \quad (5)$$

on obtient l'approximation unique

$$v_i = \frac{\exp(w_i + \eta)}{\sum_{i=1}^p \exp(w_i + \eta)} = \frac{\exp(w_i)}{\sum_{i=1}^p \exp(w_i)}. \quad (6)$$

### 5. TRANSFORMATIONS D'ÉCHELLE

Ensuite, nous analysons la sensibilité des résultats sous des changements de  $\gamma$ . Malgré ces transformations d'échelle, l'ordre des valeurs approximatives  $v_i$  reste invariable à un seul niveau; ce résultat provient du fait que le paramètre d'échelle n'apparaît que dans le second membre de (4) qu'on peut écrire

$$\gamma \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^p \sum_{k \in D_{ij}} \delta_{ijk}.$$

Dans une hiérarchie de décisions, avec les critères comme stimuli au premier niveau et les actions dans la même qualité au deuxième, on ne peut pas garantir que les scores finaux maintiendront leur ordre. Nos essais numériques ont pourtant montré qu'un changement de  $\gamma$  n'affecte que faiblement les valeurs approximatives des stimuli ou les scores finaux des actions (cf. *fig. 3*).

### 6. MODÉLISATION DU JUGEMENT PAR DES NOMBRES FLOUS

La méthodologie présentée ci-dessus a le désavantage que, dans chaque essai élémentaire, le décideur est prié de ne pas choisir plus d'une qualification (indifférence, préférence faible, préférence forte, dominance, ou un seuil entre deux gradations voisines). Pourtant, dans beaucoup de cas il se rend compte que plusieurs qualifications sont plus ou moins aptes à exprimer son jugement comparatif, parce qu'elles sont *vaguement* définies. Il pourrait donner son jugement en attribuant à chaque qualification un nombre réel entre 0 et 1

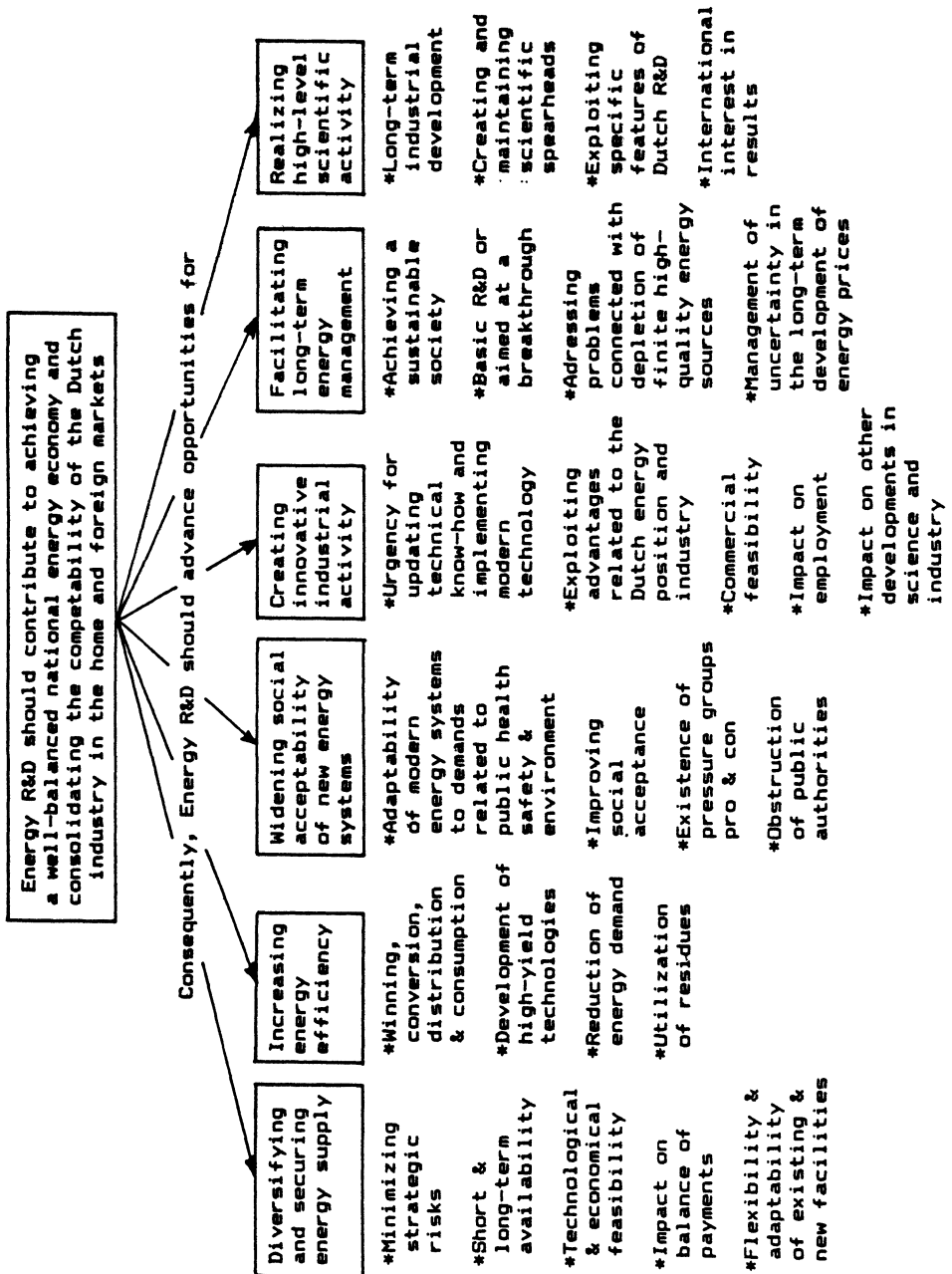


Figure 1. - Six critères incompatibles, qui ont été utilisés aux Pays-Bas par le Conseil de Recherche sur l'Énergie pour évaluer les technologies énergétiques (économies, énergie houillère, énergie nucléaire, énergie solaire, ...) en vertu de leur contribution au plan national (approvisionnement équilibré de l'énergie et renforcement de la position industrielle). Les décideurs sont priés de considérer ces critères par paires et de juger leur impact relatif (projet C.R.E., cf. [6], [9]).  
Reproduction du document authentique, avec texte en anglais.

R.E.O.-Project

F.A. Lootsma

=====>  
 FOR OFFICE USE ONLY

Compare the impact of the following pairs of CRITERIA and mark the appropriate box or box boundary.

|       |    | has MUCH HIGHER impact than | has SOMEWHAT HIGHER impact than | has ABOUT EQUAL impact as | has SOMEWHAT LOWER impact than | has MUCH LOWER impact than |
|-------|----|-----------------------------|---------------------------------|---------------------------|--------------------------------|----------------------------|
| 1-4   | 1  |                             |                                 |                           |                                |                            |
|       |    | DOMINATES                   |                                 |                           | is DOMINATED by                |                            |
| 56 78 |    |                             |                                 |                           |                                |                            |
| 11 11 |    |                             |                                 |                           |                                |                            |
| 11 11 |    |                             |                                 |                           |                                |                            |
| 3- 2  | -2 |                             |                                 | X                         |                                |                            |
| 2- 5  | 4  |                             | X                               |                           |                                |                            |
| 4- 2  | 0  |                             |                                 | X                         |                                |                            |
| 2- 6  | 3  |                             | X                               |                           |                                |                            |
| 6- 5  | -1 |                             |                                 | X                         |                                |                            |
| 1- 6  | 4  |                             | X                               |                           |                                |                            |
| 5- 3  | -1 |                             |                                 | X                         |                                |                            |
| 4- 6  | 2  |                             | X                               |                           |                                |                            |
| 4- 3  | 2  |                             | X                               |                           |                                |                            |
| 1- 5  | 4  |                             | X                               |                           |                                |                            |
| 3- 1  | -4 |                             |                                 |                           | X                              |                            |
| 1- 4  | 2  |                             | X                               |                           |                                |                            |
| 5- 4  | -2 |                             |                                 | X                         |                                |                            |
| 3- 6  | 1  |                             | X                               |                           |                                |                            |
| 2- 1  | 0  |                             |                                 | X                         |                                |                            |

Figure 2. — Critères présentés par paires dans un ordre arbitraire (projet C.R.E., cf. [6], [9]). Le décideur est prié d'exprimer son jugement comparatif au moyen d'une croix dans une des cases horizontales, ou sur la ligne entre deux cases voisines s'il hésite entre les gradations correspondantes. Les nombres dans la colonne de gauche, attribués après coup par un codeur, indiquent les gradations qui ont été choisies par le décideur. Ajoutons que les actions (les technologies énergétiques) seront évaluées, sur chaque critère séparément, de la même façon : au moyen d'un questionnaire qui présente les actions par paires dans un ordre arbitraire. Reproduction du document authentique, avec texte en anglais.



| Scales                       | Equidistant Scale of Saaty | Geometric Scale Normal ( $\gamma=1/2$ ) | Geometric Scale Stretched ( $\gamma=1$ ) |
|------------------------------|----------------------------|---|--|
| Equal impact                 | 1                          | $\exp(0) = 1.0 \times 10^0$             | $\exp(0) = 1.0 \times 10^0$              |
| Somewhat higher impact       | 3                          | $\exp(2\gamma) = 2.7 \times 10^0$       | $\exp(2\gamma) = 7.4 \times 10^0$        |
| Much higher impact           | 5                          | $\exp(4\gamma) = 7.4 \times 10^0$       | $\exp(4\gamma) = 5.5 \times 10^1$        |
| Dominant                     | 7                          | $\exp(6\gamma) = 2.0 \times 10^1$       | $\exp(6\gamma) = 4.0 \times 10^2$        |
| Absolutely dominant          | 9                          |   |  |
| Security of Energy Supply    | 24.5                       | 24.9                                    | 32.1                                     |
| Energy Efficiency            | 13.0                       | 12.9                                    | 8.6                                      |
| Social Acceptability         | 9.3                        | 8.8                                     | 4.0                                      |
| Innovation-based Industry    | 18.6                       | 18.7                                    | 18.1                                     |
| Long-term Contribution       | 24.1                       | 25.2                                    | 32.7                                     |
| High-level Science           | 10.4                       | 9.4                                     | 4.6                                      |
| Energy Saving in Industry    | 5.4                        | 5.3                                     | 5.8                                      |
| Energy Saving in Houses      | 6.1                        | 5.9                                     | 8.6                                      |
| Energy Saving in Traffic     | 3.6                        | 3.7                                     | 2.6                                      |
| Energy Saving in Other Areas | 5.3                        | 5.2                                     | 5.3                                      |
| Oil and Natural Gas          | 4.2                        | 4.3                                     | 4.4                                      |
| Coal Winning                 | 4.5                        | 4.6                                     | 5.5                                      |
| Coal Combustion              | 4.3                        | 4.4                                     | 4.7                                      |
| Coal Gasification            | 5.5                        | 5.5                                     | 6.8                                      |
| Coal, Residues               | 3.9                        | 3.9                                     | 3.4                                      |
| Uranium Thermal Reactor      | 4.2                        | 4.2                                     | 4.0                                      |
| Uranium Fission Cycle        | 4.7                        | 4.6                                     | 4.7                                      |
| Uranium Breeder              | 7.0                        | 6.8                                     | 11.1                                     |
| Uranium Nuclear Fusion       | 3.7                        | 3.7                                     | 2.9                                      |
| Solar Energy, Thermal        | 3.7                        | 3.7                                     | 2.9                                      |
| Solar Energy, Electrical     | 4.6                        | 4.5                                     | 4.2                                      |
| Wind Energy, Decentralized   | 3.5                        | 3.6                                     | 2.7                                      |
| Wind Energy, Centralized     | 3.8                        | 3.9                                     | 3.3                                      |
| Biomass Energy               | 3.7                        | 3.8                                     | 2.9                                      |
| Geothermal Energy            | 2.8                        | 3.0                                     | 1.8                                      |
| Electricity Production       | 3.4                        | 3.5                                     | 2.5                                      |
| Thermal Energy Storage       | 4.0                        | 4.0                                     | 3.4                                      |
| System Analysis              | 3.3                        | 3.4                                     | 2.4                                      |
| Relay Systems                | 4.8                        | 4.8                                     | 4.4                                      |

Figure 3. - Poids et classement des critères, scores finaux et classement des technologies énergétiques (projet C.R.E., avec 6 critères, 23 actions, et 8 décideurs, cf. [6] et [9]). On les a évalués sur la base d'une seule collection de jugements comparatifs qui ont été codés sur trois échelles distinctes : l'échelle équidistante de Saaty (cf. [11]), l'échelle géométrique normale ( $\gamma=1/2$ ) et l'échelle géométrique longue ( $\gamma=1$ ). Le classement des poids des critères (niveau 1 de décisions) ne change pas sur les échelles géométriques. Les scores finaux des actions (les technologies) ne sont que faiblement affectés par les transformations d'échelle. Reproduction du document authentique, avec texte en anglais.

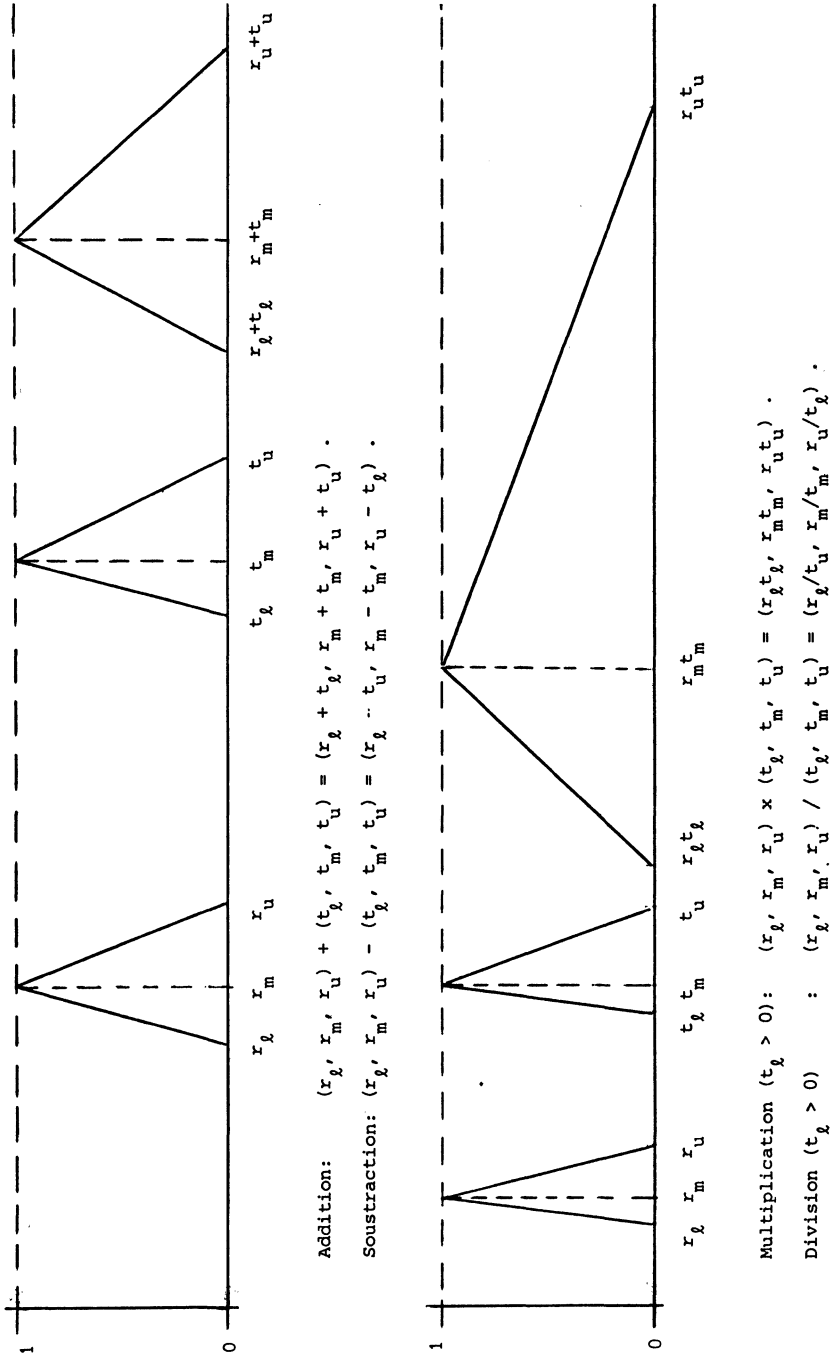
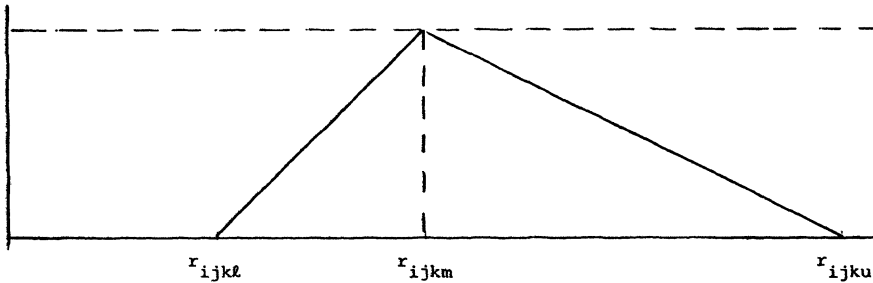


Figure 4. — Opérations arithmétiques sur deux nombres flous  $\tilde{r} = (r_l, r_m, r_u)$  et  $\tilde{t} = (t_l, t_m, t_u)$  avec des fonctions caractéristiques triangulaires. Remarquez que les quatre opérations se font terme à terme, dans l'ordre de l'écriture pour l'addition et la multiplication, dans l'ordre inverse pour la soustraction et la division (à l'exception cependant de la valeur modale).

pour exprimer leur *crédibilité*. Il n'est pas nécessaire que ces nombres s'additionnent à 1, parce que les qualifications peuvent se chevaucher. Le décideur pourrait également choisir la qualification la plus crédible, ainsi qu'un étalement à gauche et un étalement à droite pour exprimer l'étendue de crédibilité. Partant du dernier cas [5, 8], nous prenons pour modèle un nombre flou  $r$  avec une fonction caractéristique *triangulaire* déterminée par trois paramètres : la *valeur modale*  $r_m$  où se trouve le sommet du triangle et où la fonction caractéristique vaut 1, une *valeur inférieure*  $r_l$  et une *valeur supérieure*  $r_u$  pour fixer la base.

On écrit  $\tilde{r} = (r_l, r_m, r_u)$ . Une algèbre floue se réduit maintenant à une algèbre, simple et transparente, des trois paramètres ([3, 5, 12], cf. fig. 4).



$$\begin{aligned} \tilde{q}_{ijk} &= \ln(\tilde{r}_{ijk}) = \ln(r_{ijkl}, r_{ijkm}, r_{ijk u}) = \\ &= (\ln r_{ijkl}, \ln r_{ijkm}, \ln r_{ijk u}) \end{aligned}$$

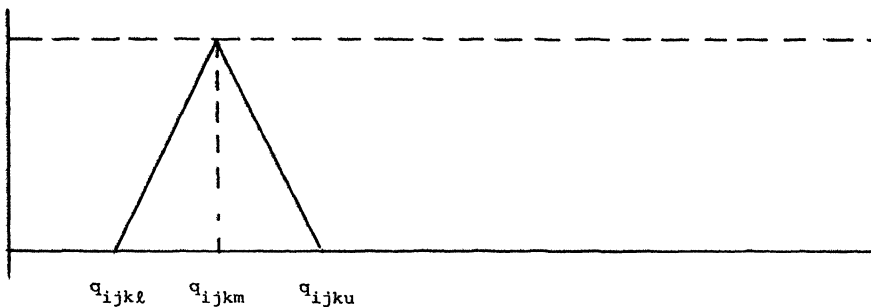


Figure 5. — Modèle flou  $\tilde{r}_{ijk} = (r_{ijk l}, r_{ijk m}, r_{ijk u})$  du jugement vague exprimé par le décideur  $k$  en comparant les stimuli  $S_i$  et  $S_j$  l'un à l'autre. Dans beaucoup d'applications, la fonction caractéristique de  $\tilde{q}_{ijk} = \ln(\tilde{r}_{ijk})$  a la forme d'un triangle isocèle.

7. COMPARAISONS PAR PAIRES AU MOYEN DE NOMBRES FLOUS

Soit  $\tilde{r}_{ijk} = (r_{ijkl}, r_{ijkm}, r_{ijkn})$  le modèle flou du jugement vague prononcé par le décideur  $k$  en comparant  $S_i$  à  $S_j$ . Soit  $\tilde{q}_{ijk} = \ln \tilde{r}_{ijk}$  et  $\tilde{w}_i = \ln \tilde{v}_i$  (cf. fig. 5). L'équivalent flou des équations normales (4) est donné par

$$\tilde{w}_i \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^p N_{ij} - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^p N_{ij} \tilde{w}_j = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^p \sum_{k \in D_{ij}} \tilde{q}_{ijk}. \tag{7}$$

On montre facilement que les valeurs modales  $w_{im}$  satisfont aux équations

$$w_{im} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^p N_{ij} - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^p N_{ij} w_{jm} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^p \sum_{k \in D_{ij}} q_{ijkm}. \tag{8}$$

On ne peut pas séparer les valeurs inférieures et supérieures de la même façon : elles sont liées par le système

$$\begin{aligned} w_{il} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^p N_{ij} - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^p N_{ij} w_{jl} &= \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^p \sum_{k \in D_{ij}} q_{ijkl}, \\ w_{iu} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^p N_{ij} - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^p N_{ij} w_{ju} &= \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^p \sum_{k \in D_{ij}} q_{ijk u}. \end{aligned} \tag{9}$$

Une solution générale des systèmes (8) et (9) s'écrit comme

$$(w_{il} + \zeta, w_{im} + \eta, w_{iu} + \zeta) \tag{10}$$

avec les degrés de liberté  $\eta$  et  $\zeta$ . Pour obtenir des valeurs approximatives qui sont uniques il est nécessaire de normaliser les résultats

$$\exp(\tilde{w}_i) = (\exp(w_{il} + \zeta), \exp(w_{im} + \eta), \exp(w_{iu} + \zeta)).$$

On montre qu'une solution unique de (7) est alors donnée par les triples  $(v_{il}, v_{im}, v_{iu})$  définis comme (G. Boender, entretien privé, cf. annexe 2 et [1])

$$(a \exp(w_{il}), b \exp(w_{im}), a \exp(w_{iu})), \tag{11}$$

avec les coefficients de normalisation

$$a = \left( \sum_{i=1}^p \exp(w_{ii}) \cdot \sum_{i=1}^p \exp(w_{iu}) \right)^{-1/2},$$

$$b = \left( \sum_{i=1}^p \exp(w_{im}) \right)^{-1}.$$

### 8. MODÈLE SIMPLIFIÉ POUR ANALYSER LES RÉSULTATS

Les triples (11) ne représentent pas nécessairement des nombres flous parce que l'ordre  $v_{ii} \leq v_{im} \leq v_{iu}$  n'est pas garanti. Nos expériences ont toutefois montré qu'une violation de cet ordre est exceptionnelle. En outre, nous avons conçu un modèle simplifié du jugement pour analyser et mieux comprendre les résultats des calculs. Supposons que tous les jugements aient le même degré d'imprécision  $\alpha$ ; c'est-à-dire qu'on peut écrire

$$\begin{aligned} r_{ijkl} &= \exp[\gamma(\delta_{ijk} - \alpha)], \\ r_{ijkm} &= \exp[\gamma\delta_{ijk}], \\ r_{ijkn} &= \exp[\gamma(\delta_{ijk} + \alpha)]. \end{aligned} \quad (12)$$

Avec une valeur entière,  $\alpha$  représente l'étalement à gauche et à droite sur l'échelle qualitative (cf. §3). L'imprécision des jugements est appelée faible si  $\alpha=1$ , et importante si  $\alpha=2$ . On écrit, provisoirement,

$$w_{iu} - w_{im} = w_{im} - w_{il} = \gamma\beta,$$

et on déduit des équations (8) et (9) que  $\beta$  est soumis à

$$\beta \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^p N_{ij} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^p N_{ij} \beta = \alpha \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^p N_{ij}.$$

Avec la solution  $\beta = (1/2)\alpha$  on trouve une solution générale de (8) et (9) donnée par

$$\left( \exp\left(w_{im} - \frac{1}{2}\alpha\gamma + \zeta\right), \exp(w_{im} + \eta), \exp\left(w_{im} + \frac{1}{2}\alpha\gamma + \zeta\right) \right),$$

et la normalisation habituelle (cf. § 7) fournit l'approximation unique

$$\frac{\exp(w_{im})}{\sum_{i=1}^p \exp(w_{im})} \left( \exp\left(-\frac{1}{2}\alpha\gamma\right), 1, \exp\left(\frac{1}{2}\alpha\gamma\right) \right). \quad (13)$$

Il est intéressant d'observer que le degré d'imprécision est réduit de moitié.

## 9. LA PROPAGATION DU FLOU

Considérons maintenant une hiérarchie de décisions (cf. § 1), prenons

$$\tilde{c}_i = (c_{il}, c_{im}, c_{iu})$$

pour dénoter l'approximation floue du poids du critère  $C_i$ , et soit

$$\tilde{a}_{ij} = (a_{ijl}, a_{ijm}, a_{iju})$$

l'approximation floue du poids de l'action  $A_j$  sur le critère  $C_i$ . Si tous les jugements comparatifs ont le même degré d'imprécision  $\alpha$ , on a (cf. § 8)

$$\begin{aligned} \tilde{c}_i &= c_{im} \left( \exp\left(-\frac{1}{2}\alpha\gamma\right), 1, \exp\left(\frac{1}{2}\alpha\gamma\right) \right), \\ \tilde{a}_{ij} &= a_{ijm} \left( \exp\left(-\frac{1}{2}\alpha\gamma\right), 1, \exp\left(\frac{1}{2}\alpha\gamma\right) \right). \end{aligned} \quad (14)$$

En utilisant la formule d'agrégation (1), on déduit immédiatement le score final  $s_j$  de l'action  $A_j$ . Donc on obtient

$$\tilde{s}_j = \sum_i c_{im} a_{ijm} (\exp(-\alpha\gamma), 1, \exp(\alpha\gamma)), \quad (15)$$

un résultat qui montre que le degré d'imprécision s'est doublé par rapport à (14).

## 10. LE TROISIÈME NIVEAU DE DÉCISIONS

Beaucoup de méthodes de la recherche opérationnelle font preuve d'une nature normative. Fondées sur des idées préconçues de rationalité (minimisation des coûts comme le seul but d'une opération industrielle, par exemple)

elles prescrivent une solution optimale. Même la simple fonction (3) à minimiser contient des rationalités inexprimées. Nous avons, par exemple, tacitement postulé l'équivalence des décideurs ou, proprement dit, de leurs jugements, tandis que dans un groupe de décideurs il y a normalement une grande divergence d'influence, de pouvoir, de prestige, et d'engagement. On pourrait tenir compte de la position relative des décideurs par une généralisation de (3) de la forme suivante :

$$\sum_{i < j} \sum_{k \in D_{ij}} (\ln r_{ijk} - \ln v_i + \ln v_j)^2 d_k \quad (16)$$

où  $d_k$  représente le poids du décideur  $k$ . Nous passons sur la question délicate de l'existence d'un décideur suprême qui pourrait établir ces poids. Les équations normales déduites de la minimisation de (16) sont données par

$$w_i \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^p \left( \sum_{k \in D_{ij}} d_k \right) - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^p \left( \sum_{k \in D_{ij}} d_k \right) w_j = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^p \sum_{k \in D_{ij}} q_{ijk} d_k \quad (17)$$

une formule qui se prête facilement à remplacer (4). Une analyse du comportement des résultats au cas de jugements flous est toujours inachevée.

## 11. LES BUTS DE L'ANALYSE MULTICRITÈRE

Nous sommes partis de deux hypothèses fondamentales : (a) les décideurs ont une valeur, peut-être cachée au plus profond d'eux-mêmes, pour chaque stimulus qui est en jeu dans un certain processus de décision, et (b) nos procédures pour obtenir leurs préférences produisent des réponses, plus ou moins précises, dans un voisinage de la valeur correcte. Dans une telle situation on peut sincèrement présenter les méthodes d'analyse multicritère comme des outils pour aider les décideurs à trouver une décision « pré-existante ». Sinon, on n'aide plus, mais on conduit le processus de décision dans une autre direction, vers une décision « nouvelle » ou « inattendue ». En tout cas, on introduit une méthodologie qui *remplacera* un processus traditionnel. On trouve un développement parallèle dans la gestion des entreprises où l'informatique n'introduit pas simplement une modernisation graduelle des méthodes de travail traditionnelles; au contraire, elle provoque un bouleversement, une innovation qui remplace une génération d'ouvriers par des spécialistes universitaires. On augmente la productivité (taux de croissance voisin de 7% par an chez Philips, par exemple) et on économise de la main d'œuvre!

Nous nous demandons naturellement ce qui se passera plus tard avec les décideurs dans les entreprises et dans la bureaucratie de l'État.

Dans le domaine du management, on ne peut pas justifier l'introduction de l'analyse multicritère en promettant que cette méthodologie *optimisera* la qualité des décisions. Certes, elle déchaînera une vive discussion entre les décideurs (nous l'avons vu dans beaucoup d'applications), elle produira souvent un sentiment de satisfaction chez eux, mais à la longue ces avantages ne suffiront pas. En outre, qu'est-ce qu'une décision optimale? A vrai dire, nous n'en avons pas entendu parler dans Royal Dutch/Shell à Londres où l'on emploie l'analyse multicritère depuis plusieurs années pour distribuer un budget de recherche sur un ensemble de projets. « On gagne du temps, et pour nos managers ça vaut la peine ». C'est cette voix de la pratique qui donne la seule justification pour l'application *permanente* de l'analyse multicritère.

Finalement, remarquons que, dans ce domaine, il ne faut jamais oublier les mots de Blaise Pascal : le cœur a ses raisons que la raison ne connaît point.

## ANNEXE 1

### Formule d'agrégation

Considérons deux stimuli  $S_j$  et  $S_k$  dans un ensemble de stimuli qui ont été comparés par paires. Nous avons vu (§ 4) que la normalisation a été introduite pour fixer les approximations (les poids calculés)  $v_j$  et  $v_k$ . Autrement dit : parce qu'il y a un degré de liberté, le vrai résultat des comparaisons par paires est donné par le quotient  $v_j/v_k$ , une quantité qui représente le poids relatif de  $S_j$  par rapport à  $S_k$ .

Retournons maintenant à l'évaluation de deux actions  $A_j$  et  $A_k$ . Évidemment, le quotient  $a_{ij}/a_{ik}$  est le poids relatif de  $A_j$  par rapport à  $A_k$  sur le critère  $C_i$ . Si les poids  $c_i$  (normalisés de sorte que  $\sum c_i = 1$ ) sont égaux, il va sans dire qu'on peut introduire la moyenne géométrique

$$\prod_i (a_{ij}/a_{ik})^{c_i}$$

comme le poids relatif de  $A_j$  par rapport à  $A_k$  sur tous les critères simultanément. Dans ce qui suit, nous maintiendrons cette expression comme modèle pour le poids relatif dans le cas où les  $c_i$  (toujours normalisés) ne sont pas égaux. Nous choisissons, d'autre part, le quotient  $s_j/s_k$  des scores finaux pour exprimer ce poids relatif. Alors

$$s_j = \prod_i (a_{ij})^{c_i},$$



et en utilisant des approximations du premier ordre, on déduit

$$s_j = \exp \left[ \sum_i c_i \ln a_{ij} \right] \simeq 1 + \sum_i c_i \ln a_{ij} \simeq 1 + \sum_i c_i (a_{ij} - 1) = \sum_i c_i a_{ij}$$

## ANNEXE 2

### Normalisation proposée par G. Boender (cf. [1])

Nous considérons un ensemble de nombres flous (avec des fonctions caractéristiques triangulaires) qui sont représentés par les triples

$$(y_{il}, y_{im}, y_{iu}), \quad i = 1, \dots, p.$$

En multipliant ces nombres par l'inverse de leur somme, nous obtenons les nombres normalisés

$$(z_{il}, z_{im}, z_{iu}) \stackrel{\text{def}}{=} \left( \frac{y_{il}}{\sum_i y_{iu}}, \frac{y_{im}}{\sum_i y_{im}}, \frac{y_{iu}}{\sum_i y_{il}} \right),$$

qui ont les propriétés suivantes :

$$\sum_i z_{im} = 1,$$

$$\left( \sum_i z_{il} \right) \cdot \left( \sum_i z_{iu} \right) = 1.$$

Ces deux relations nous permettent d'éliminer les deux degrés de liberté dans la formule (10).

## BIBLIOGRAPHIE

1. C.G.E. BOENDER, J.G. DE GRAAN et F.A. LOOTSMA, *Multi-Criteria Decision Analysis with Fuzzy Pairwise Comparisons*, Manuscript under preparation, Faculty of Mathematics and Informatics, Delft University of Technology, Netherlands, 1987.
2. H.A. DAVID, *The Method of Paired Comparisons*, Griffin, London, 1963.
3. D. DUBOIS et H. PRADE, *Fuzzy Sets and Systems: Theory and Applications*, Academic Press, New York, 1980.
4. M. KOK et F.A. LOOTSMA, *Pairwise Comparison Methods in Multi-objective Programming, with Applications in a Long-term Energy-planning Model*, European Journal of Operational Research, vol. 22, 1985, p. 44-55.
5. P.J.M. VAN LAARHOVEN et W. PEDRYCZ, *A Fuzzy Extension of Saaty's Priority Theory*, Fuzzy Sets and Systems, vol. 11, 1983, p. 229-241.

6. K. LÉGRÁDY, F.A. LOOTSMA, J. MEISNER et F. SCHELLEMANS, *Multi-criteria Decision Analysis to aid Budget Allocation*, in M. GRAUER et A.P. WIERZBICKI éd., *Interactive Decision Analysis*, Springer, Berlin, 1984, p. 164-174.
7. F.A. LOOTSMA, *Performance Evaluation of Non-linear Optimization Methods via Pairwise Comparison and Fuzzy Numbers*, *Mathematical Programming*, vol. 33, 1985, p. 93-114.
8. F.A. LOOTSMA, *Fuzzy Performance Evaluation of Nonlinear Optimization Methods, with Sensitivity Analysis of the Final Scores*, Report 86-40, Faculty of Mathematics and Informatics, Delft University of Technology, Netherlands, 1986.
9. F.A. LOOTSMA, J. MEISNER et F. SCHELLEMANS, *Multi-criteria Decision Analysis as an Aid to Strategic Planning of Energy Research and Development*, *European Journal of Operational Research*, vol. 25, 1986, p. 216-234.
10. B. ROY, *Méthodologie Multicritère d'Aide à la Décision*, Collection Gestion, Economica, Paris, 1985.
11. Th. L. SAATY, *The Analytic Hierarchy Process, Planning, Priority Setting, Resource Allocation*, McGraw-Hill, New York, 1980.
12. L.A. ZADEH, *Fuzzy Sets*, *Information and Control*, vol. 8, 1965, p. 338-353.