

I. KARPOUZAS

Y. CHERRUAULT

A. GUILLEZ

**Une méthode pour la résolution numérique  
d'équations fonctionnelles. Application à la résolution  
d'équations aux dérivées partielles**

*RAIRO. Recherche opérationnelle*, tome 20, n° 4 (1986),  
p. 307-319

[http://www.numdam.org/item?id=RO\\_1986\\_\\_20\\_4\\_307\\_0](http://www.numdam.org/item?id=RO_1986__20_4_307_0)

© AFCET, 1986, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « RAIRO. Recherche opérationnelle » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

**UNE MÉTHODE  
POUR LA RÉOLUTION NUMÉRIQUE  
D'ÉQUATIONS FONCTIONNELLES.  
APPLICATION A LA RÉOLUTION D'ÉQUATIONS  
AUX DÉRIVÉES PARTIELLES (\*)**

par I. KARPOUZAS, Y. CHERRUAULT et A. GUILLEZ (2)

---

*Résumé. — Nous proposons une méthode pour la résolution numérique d'équations fonctionnelles linéaires ou non. L'idée de base est simple et consiste à choisir une forme approchée particulière pour représenter les fonctions inconnues. On utilise pour cela une transformation (Aliénor) que nous avons développée à propos d'une méthode d'optimisation globale. Cette technique a été appliquée à la résolution d'équations aux dérivées partielles issues de la biologie.*

**Mots clés :** Équations aux dérivées partielles; méthodes numériques; approximation de fonctions de  $n$  variables; optimisation globale.

*Abstract. — We propose a method for the numerical solution of functional equations, linear or not. The basic idea is simple and consists to choose a particular approximated form for representing the unknowns functions. For that, we use a transformation (Alienor) that has been developed about global optimization methods. This technique is applied to the solution of partial differential equations arising in biology.*

**Keywords:** Partial differential equations; numerical methods; approximation of  $n$  variables functions; global optimisation.

## 1. INTRODUCTION

Un des plus importants chapitres de l'analyse fonctionnelle moderne est la théorie des méthodes d'approximation pour la résolution des différents problèmes mathématiques non solubles analytiquement. En outre, en stipulant des approches considérablement simplifiées pour les méthodes numériques, les idées de l'analyse fonctionnelle ont essentiellement évolué vers de nouveaux

---

(\*) Reçu janvier 1986.

(2) MÉDIMAT, Université Paris-VI, 15, rue de l'École-de-Médecine, 75270 Paris Cedex 06.

algorithmes de calculs (problèmes de l'algèbre linéaire, des équations différentielles et intégrales, analyse non linéaire, etc. [15, 22]).

La résolution de ces problèmes a été facilitée par l'emploi d'opérateurs : On sépare sur ceux-ci la fonction sur laquelle ils opèrent et on considère le résultat comme un produit, ensuite, on « libère » la grandeur algébrique  $Au(x, t) = f(x, t)$  ( $A$  opérateur linéaire ou non linéaire). La théorie générale des méthodes d'approximation utilise beaucoup de résultats fondamentalement connus et permet d'approcher soit l'opérateur  $A$ , soit la fonction  $u(x, t)$ . Par exemple, on peut approcher par des combinaisons linéaires de masses de Dirac certains opérateurs linéaires intégraux ou intégral-différentiels [2]. La méthode des différences finies approche un opérateur linéaire différentiel, de plusieurs manières (formule centrée, avant, arrière...) [7, 21].

Pour l'étude des opérateurs non linéaires et des équations non linéaires on fait appel aux méthodes variationnelles [9, 12, 16, 23].

Par contre, avec la méthode de Ritz, de Galerkin ou des éléments finis, on conserve l'opérateur  $A$ , mais on cherche la solution  $u$  dans un ensemble « approché », ce qui équivaut à choisir une approximation pour la fonction  $u(x, t)$ , [6, 19].

La méthode que nous présentons se rattache à cette dernière éventualité, c'est-à-dire que nous laisserons inchangé l'opérateur  $A$  mais par contre on approchera la fonction  $u(x, t)$  par une expression d'une forme assez simple. Si l'opérateur  $A$  est linéaire nous aboutissons à la minimisation de fonctionnelles quadratiques dont on calcule l'optimum en résolvant des systèmes linéaires. En revanche, dans le cas d'un opérateur non linéaire, nous obtenons des fonctionnelles qui ne sont plus quadratiques et dont on doit chercher l'optimum par des méthodes numériques d'optimisation [4, 20, 24].

## 2. LA TRANSFORMATION ALIENOR

Cette méthode consiste à réduire les variables du problème à une seule. On utilise pour cela les propriétés de la spirale d'Archimède dont l'équation en coordonnées polaires est  $r = a\theta$  ( $\theta \geq 0$ ). Cette courbe passe aussi près qu'on veut de n'importe quel point du plan  $R^2$  pourvu que  $a$  soit assez petit. Elle constitue par conséquent une approximation de  $R^2$ . Les anglo-saxons parlent de « space filling curve » autrement dit on a à faire à des courbes qui « remplissent » l'espace [1].

Pour deux variables  $(x, y)$ , la transformation Aliénor s'exprime comme suit :

$$x = a\theta \cos \theta, \quad y = a\theta \sin \theta, \quad \theta \geq 0.$$

Autrement dit, on passe en coordonnées polaires en reliant de plus  $r$  et  $\theta$  par la spirale  $r = a\theta$ . De façon plus générale, la transformation Aliénor permet de remplacer une fonction de  $n$  variables  $f(x_1, \dots, x_n)$  par une fonction de la seule variable  $\theta$  [3] à l'aide des relations suivantes que nous explicitons pour  $n=4$

$$\begin{aligned}x_1 &= r_1 \cos \theta_1, & x_2 &= r_1 \sin \theta_1, & r_1 &= a_1 \theta_1 \\x_3 &= r_2 \cos \theta_2, & x_4 &= r_2 \sin \theta_2, & r_2 &= a_2 \theta_2 \\ \theta_1 &= r \cos \theta, & \theta_2 &= r \sin \theta, & r &= a\theta, & \theta &\geq 0.\end{aligned}$$

Il est facile de constater que les quatre variables  $x_1, x_2, x_3, x_4$  s'expriment toutes en fonction de la seule variable  $\theta$ . Et par conséquent  $f(x_1, \dots, x_4) = G(\theta)$  dépend seulement de  $\theta$ .

Ainsi, on aboutit à un problème beaucoup plus simple que ce soit dans le domaine de l'approximation ou dans celui de l'optimisation [3]. De plus, la littérature classique est fort riche en méthodes numériques pour l'approximation [24] et l'optimisation [18] des fonctions d'une seule variable.

## 2.1. Optimisation globale d'une fonctionnelle [8]

Soit la fonctionnelle continue  $Y = f(x_1, \dots, x_n)$ . On cherche à trouver l'optimum absolu de  $Y$ . A l'aide de la transformation précédente « Aliénor », on remplace  $f(x_1, \dots, x_n)$  par une fonction d'une seule variable  $G(\theta)$ . Quand les  $a_i \rightarrow 0$  il est assez facile de montrer que l'optimum global de la fonctionnelle  $G(\theta)$ , converge vers l'optimum global de la fonctionnelle  $f(x_1, \dots, x_n)$  [3 a].

Autrement dit

$$\text{Min } G(\theta) \rightarrow \text{Min } f(x_1, \dots, x_n).$$

De plus soit  $\theta^*$  tel que  $\text{Min } G(\theta) = G(\theta^*)$ . On peut lui associer  $x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*$  grâce à la transformation Aliénor. Alors on a :

$$x_1^* \rightarrow x_1^+, \dots, x_n^* \rightarrow x_n^+$$

où

$$(x_1^+, \dots, x_n^+)$$

vérifie :

$$\text{Min } f(x_1, \dots, x_n) = f(x_1^+, \dots, x_n^+).$$

## 2.2. Application à l'approximation des fonctions

Sans restreindre la généralité, plaçons-nous dans un cas simple à trois variables. Soit  $x, y, z$  les variables, on a les relations suivantes (où l'on a choisi le même paramètre  $a$  pour les spirales) :

$$\begin{aligned} x &= a \theta_1 \cos \theta_1 \\ y &= a \theta_1 \sin \theta_1 \\ \theta_1 &= a \theta \cos \theta \\ z &= a \theta \sin \theta, \quad \theta \geq 0 \end{aligned} \quad (2.2.1)$$

qui vont nous permettre de ramener toute fonction de trois variables à une fonction de la seule variable  $\theta$ . Ces relations (2.2.1) montrent que l'on passe sans problème de  $\theta$  à  $(x, y, z)$ . Réciproquement si l'on veut obtenir  $\theta$  à partir de  $(x, y, z)$ , les relations (2.2.1) donnent :

$$\theta = \frac{1}{a} \left( z^2 + \frac{1}{a^2} (x^2 + y^2) \right)^{1/2} \quad (2.2.2)$$

C'est l'expression (2.2.2) qui va donner la structure d'approximation que nous utiliserons pour la résolution d'équations fonctionnelles et en particulier pour la résolution d'équations aux dérivées partielles.

## 2.3. Applications à la résolution d'équations fonctionnelles

Soit à résoudre une équation fonctionnelle

$$A u = f \quad (2.3.1)$$

où  $A$  est un opérateur donné, application d'un Hilbert  $V$  dans un autre Hilbert  $H$ .  $f$  est une fonction connue et il s'agit de trouver  $u$  satisfaisant (2.3.1).

Pour cela on peut se ramener à la recherche du minimum de la fonctionnelle.

$$J(u) = \| A u - f \|^2,$$

où  $\| \cdot \|$  désigne la norme de  $H$ .

Bien sûr, si l'opérateur  $A$  est différentiel il y aura lieu d'ajouter des conditions initiales et aux limites pour assurer l'existence et l'unicité de la solution (2.3.1).

A l'aide de la transformation Aliénor on peut transformer  $u(x_1, \dots, x_n)$  en une fonction d'une seule variable soit  $G(\theta)$ . Cette dernière, peut être approchée, par exemple, par un polynôme en  $\theta : G(\theta) = \alpha_0 + \alpha_1 \theta + \dots + \alpha_q \theta^q$ , et l'on cherche alors :

$$\text{Min}_{\alpha_i} \| AG(\theta) - F(\theta) \|^2$$

où  $F$  est la fonction déduite de  $f$  par la transformation.

Nous pouvons considérer la fonctionnelle discrétisée qui prend la forme suivante dans le cas considéré :

$$\| AG(\theta) - F(\theta) \|^2 \simeq h \sum_j [AG(\theta_j) - F(\theta_j)]^2$$

et qui correspond à une approximation de  $\| \quad \|^2$ .

On peut passer très facilement de  $\theta$  à  $x_1, \dots, x_n$  [grâce aux formules du type (2.2.2)]. On obtient  $\theta = p(x_2, \dots, x_n)$  et ainsi l'équation (2.3.1) peut être résolue grâce au problème d'optimisation suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver les paramètres } \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_q \text{ tels que} \\ J = \sum_j [A(\alpha_0 + \alpha_1 p(x_1^{(j)}, \dots, x_n^{(j)})^{1/2} + \dots + \alpha_q p(x_n^{(j)})^{q/2}) - f(x_1^{(j)}, \dots, x_n^{(j)})]^2 \\ \text{soit minimal.} \end{array} \right.$$

Les  $x_1^{(j)}, \dots, x_n^{(j)}$  sont des points du domaine où l'opérateur  $A$  est défini. Quant à la fonctionnelle positive  $J$  elle dépend *explicitement* des coefficients inconnus,  $\alpha_0, \dots, \alpha_q$ . Dans le cas d'un opérateur  $A$  *linéaire*, il est facile de déterminer les  $\alpha_i, i=0, \dots, q$ , en résolvant le système algébrique *linéaire* [14] :

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha_0} = \dots = \frac{\partial J}{\partial \alpha_q} = 0,$$

qui donne une condition nécessaire et suffisante d'optimalité.

Si l'opérateur  $A$  est non linéaire on peut trouver le minimum absolu de  $J$  en utilisant la méthode d'optimisation globale décrite dans [3] et [4] et basée sur la précédente transformation Aliénor. En fait on réduira, grâce à cette technique, les paramètres  $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_q$  au seul paramètre  $\theta_0$ . On aura alors à minimiser  $J$  par rapport à  $\theta_0$ .

## 2.4. Variantes

Il y a un grand éventail de possibilités pour choisir l'approximation de la fonction d'une variable  $G(\theta)$ .

On peut choisir par exemple comme fonction  $G(\theta)$ .

- une fraction rationnelle;
- un développement logarithmique (polynôme en  $\text{Log}, \dots$ );
- un développement exponentiel;
- une fonction spline.

## 3. APPLICATION DE LA MÉTHODE A LA RÉOLUTION D'ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

Par la méthode précédente nous résoudrons l'équation de la chaleur. Les conditions initiales et aux limites de cette équation seront introduites dans la fonctionnelle  $J$  à minimiser sous la forme de termes de pénalisation.

Nous développerons également une technique liée au procédé des isochrones et qui permet d'obtenir une solution approchée par résolution d'un système linéaire. Pour ce faire on cherchera une forme de solution liée à la transformation Aliénor à deux variables.

Enfin nous résoudrons l'équation de la chaleur par une méthode lagrangienne utilisant encore Aliénor.

Considérons la forme suivante pour l'équation de la diffusion de la chaleur [13] :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = u_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (3.1.1)$$

avec les conditions aux limites :  $u(0, t) = u(\pi, t) = 0$ ,  $t \geq 0$  et les conditions initiales :  $u(x, 0) = 2 \sin x$ ,  $0 \leq x \leq \pi$ . Nous avons choisi de plus  $u_0 = 1$ .

Désignons par  $A = (\partial/\partial t) - u_0 (\partial^2/\partial x^2)$ , l'opérateur différentiel.

Comme au paragraphe 2.3, on remplace  $u(x, t)$  par :

$$\alpha_0 + \alpha_1 [x^2 + t^2]^{1/2} + \dots + \alpha_q \cdot [x^2 + t^2]^{q/2}.$$

C'est dans cet espace de fonctions engendré par  $1, (x^2 + t^2)^{1/2}, \dots, (x^2 + t^2)^{q/2}$  que nous allons résoudre (3.1.1).

Les  $\alpha_i, i=0, \dots, q$  seront déterminés en minimisant la fonctionnelle pénalisée  $J_r$  donnée par :

$$J_r = \sum_{j=1}^N [A u(x_j, t_j)]^2 + \frac{1}{r_1} \sum_{j=1}^{M_1} \left[ \sum_{i=0}^q \alpha_i (x_j)^{i/2} - 2 \sin x_j \right]^2 + \frac{1}{r_2} \sum_{j=1}^{M_2} \left[ \sum_{i=0}^q \alpha_i (x_j^2 + t_j^2)^{i/1} \right]^2.$$

où les deux derniers termes en  $1/r_1$  et  $1/r_2$  correspondent à la pénalisation [5].

L'optimum de cette fonctionnelle sera obtenu en écrivant

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha_r} = 0, \quad r=0, \dots, q.$$

La solution sera donc donnée en résolvant un système algébrique *linéaire*.

Il est facile de s'assurer, puisque  $A$  est linéaire, que  $J_r$  est une fonctionnelle strictement convexe par rapport à  $(\alpha_0, \dots, \alpha_u)$  et qu'elle vérifie

$$\lim_{\|(\alpha_0, \dots, \alpha_u)\| \rightarrow \infty} J_r = +\infty.$$

Elle admet donc un minimum unique en vertu d'un théorème classique [5].

De plus, toujours en vertu de résultats classiques [5], la solution du problème pénalisé converge, lorsque  $r_1$  et  $r_2$  tendent vers zéro, vers la solution de l'équation (3.1.1) avec les conditions initiales et aux limites décrites plus haut.

#### 4. LA MÉTHODE DES ISOCHRONES

Le procédé des isochrones [7] est très général. Soit  $t_i$  un instant donné et  $x_j$  un point de l'espace, posons d'abord :

$$r_{ij} = (t_i^2 + x_j^2)^{1/2} \tag{4.1}$$

qui est une expression suggérée par la transformation Aliénor à deux variables  $(x, t)$ . Posons ensuite :

$$F_i(r_{ij}) = \sum_{k=0}^n C_{ik} r_{ij}^k \tag{4.2}$$

Les équations (4.1) et (4.2) définissent l'isochrone  $t_i$ . L'idée consiste à considérer chaque  $C_{ik}$  comme une fonction de  $t$ . L'équation (4.2) devient alors [5] :

$$F(r, t) = \sum_{k=0}^n d_k(t) r^k.$$

L'application à la résolution de l'équation de la diffusion sera décrite dans le cadre suivant. Soit l'équation

$$\frac{\partial F}{\partial t} = a \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + b F \quad \text{avec} \quad F(0, t) = c(1 - e^{-t/T})$$

et

$$\frac{\partial F}{\partial x}(L, t) = 0$$

avec  $a=0,02$ ,  $b=8$ ,  $c=600$ ,  $T=30$  s,  $L=1$  m.

On remarque d'abord que :

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{x}{r} F'(r), \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \frac{t^2}{r^3} F'(r) + \frac{x^2}{r^2} F''(r), \quad \frac{\partial F}{\partial t} = \frac{t}{r} F'(r).$$

Quant aux conditions initiales et finales, elles deviennent :

$$F_i(r = t_i) = 600(1 - e^{-t_i/30}) \quad (4.3)$$

$$F_i(r_i = \sqrt{1 + t_i^2}) = 0. \quad (4.4)$$

L'équation aux dérivées partielles devient l'équation algébrique suivante :

$$(0,02) \frac{x_j^2}{r_{ij}^2} F_i''(r_{ij}) + \left( \frac{0,02 t_i}{r_{ij}^2} - 1 \right) \frac{t_i}{r_{ij}} F_i'(r_{ij}) + 8 F_i(r_{ij}) = 0 \quad (4.5)$$

$i=0, \dots, p, j=0, \dots, q$ .

Les équations (4.3), (4.4) et (4.5) donnent au total  $(2+q)$  équations correspondant aux  $q$  valeurs différentes de  $x_j$ . On peut alors choisir

$$f_i(r) = \sum_{k=0}^n c_{ik} r^k \quad \text{avec} \quad n=2+q. \quad (4.6)$$

Les inconnues  $c_{ik}$  de (4.6) seront donc solutions d'un système linéaire comprenant les équations (4.3), (4.4) et les  $q$  équations provenant de (4.5) pour les différentes valeurs de  $x_j$ .

5. MÉTHODE DE LAGRANGE

Revenons au problème (3.1.1) où les contraintes (conditions initiales et aux limites) vont être introduites dans une fonctionnelle  $L$  à l'aide des multiplicateurs de Lagrange  $\lambda_i$  [12]. De façon précise nous allons minimiser une fonctionnelle  $L$  par rapport aux paramètres  $\alpha_i, \lambda_{i,1}, \lambda_{i,2}$  avec :

$$L = \sum_{i=1}^K [Au(x_i, t_i)]^2 + \sum_{i=1}^M \lambda_{i,1} A_{i,1} + \sum_{l=1}^L \lambda_{l,2} A_{l,2}$$

et où l'on a posé :

$$A_{i,1} = 2 \sin x_i - \sum_{j=0}^N \alpha_j (x_i^2)^{j/2}$$

et

$$A_{l,2} = \sum_{i=0}^N \alpha_i (x_i^2 + t_i^2)^{l/2}.$$

Le minimum de  $L$  satisfait le système algébrique linéaire :

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \alpha_j} = 0, \quad j=0, \dots, n, \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda_{i,1}} = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_{l,2}} = 0, \quad i=1, \dots, M, \quad l=1, \dots, L. \end{aligned}$$

Pour accélérer le procédé, on peut négliger un certain nombre de paramètre  $\lambda_{i,1}, \lambda_{l,2}$ . C'est ce que nous avons fait de façon empirique et cela mériterait d'être justifié théoriquement.

6. GÉNÉRALITÉS SUR LA CONVERGENCE DE NOS MÉTHODES

On peut souvent se placer dans le cadre général suivant. Soit un espace de Hilbert  $V$  de norme  $\| \cdot \|$ .

Considérons le problème :

$$\left. \begin{aligned} \text{Trouver } u \in V, \text{ tel que : } \\ Au = f, \quad A: V \rightarrow V. \end{aligned} \right\} \quad (6.1)$$

La solution  $u$  de (6.1) est supposée unique. Pour des résultats d'existence et d'unicité on pourra consulter [22]. Nos techniques impliquent que l'on

remplace le problème (6. 1) par le problème approché suivant :

$$\begin{aligned} & \text{Trouver } u_h^* \in V_h \text{ tel que :} \\ & \| A u_h^* - f \| = \text{Min}_{u_h \in V_h} \| A u_h - f \| \end{aligned}$$

où  $V_h \subset V$  est un espace de dimension finie. On suppose que  $V_h$  « approche »  $V$  quand  $h \rightarrow 0$  au sens suivant : pour tout  $\varepsilon > 0$  et pour tout  $u \in V$ , il existe  $h > 0$  et  $u_h \in V_h$  tel que  $\| u - u_h \| \leq \varepsilon$ .

On peut alors montrer le résultat :

**PROPOSITION :** *Soit  $A : V \rightarrow H$  un opérateur linéaire continu. On suppose que  $A^{-1}$  existe et est continu. Alors, la solution  $u_h^*$  du problème d'optimisation (6. 2) converge fortement vers la solution  $u$  du problème (6. 1).*

*Démonstration :* De l'hypothèse  $V_h$  « approche »  $V$  on déduit :

Pour  $\varepsilon$  fixé, il existe

$$u_h \in V_h : \| u_h - u \| \leq \varepsilon \quad (6. 3)$$

or :

$$\text{Min}_{v_h \in V_h} \| A v_h - A u \| \leq \| A u_h - A u \|. \quad (6. 4)$$

De la continuité de l'opérateur  $A$  ( $\| A u - A w \| \leq \eta \| u - w \|$ ) et de (6. 4) on déduit :

$$\text{Min}_{u_h \in V_h} \| A u_h - A u \| \leq \eta \| u_h - u \| \leq \varepsilon \eta \quad (6. 5)$$

où  $\eta \varepsilon$  tend vers zéro quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Utilisant ensuite la continuité de l'opérateur  $A^{-1}$  : il existe  $\alpha > 0$  tel que  $\alpha \| v - u \| \leq \| A v - A u \|$  et de (6. 5) on tire :

$$\alpha \| u_h^* - u \| \leq \| A u_h^* - A u \| = \text{Min}_{v_h \in V_h} \| A v_h - A u \| \leq \eta \varepsilon.$$

D'où  $\| u_h^* - u \| \leq (\eta \varepsilon / \alpha)$  qui tend vers zéro pour  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Par conséquence  $u_h^*$  converge fortement vers la solution  $u$  du problème (6. 1), lorsque  $h \rightarrow 0$ .

## 7. RÉSULTATS

Toutes les méthodes précédentes ont été programmées sur *microcalculateurs* (type Apple ou Commodore). Dans tous les cas une solution exacte pouvait être calculée, ce qui a permis de déterminer *exactement* les erreurs.

Pour l'équation de la chaleur, avec des conditions aux limites et initiales déjà précisées, la technique de pénalisation utilisée avec  $q = 12$ , un pas d'espace de 0,1 et un pas de temps de 0,05, nous a donné des erreurs relatives de l'ordre de  $10^{-3}$  avec de temps en temps des pics à  $10^{-2}$

En ce qui concerne la méthode des isochrones appliquée à la résolution numérique d'une équation de diffusion, les résultats numériques sont excellents puisqu'à partir des 30 points obtenus avec

$$t_i = 10, 20, 30, 40, 50, 60 \text{ s}$$

et

$$x_j = 0,2, 0,4, 0,6, 0,8 \text{ m,}$$

on obtient des erreurs relatives maximales évoluant entre 2,03 E-03 et 1,58 E-02.

Enfin, les résultats numériques obtenus pour l'équation de la diffusion à l'aide de la méthode Lagrangienne sont tout à fait comparables à ceux obtenus avec la technique de pénalisation. La précision est sensiblement la même. Pour ces deux méthodes, on s'est limité en fait à quelques valeurs de  $t$  (2, en dehors de  $t = 0$ ). On progresse ensuite dans le temps par pas de 2 ce qui accélère la vitesse de résolution.

## 8. CONCLUSIONS

Pour mieux cerner la réalité des phénomènes provenant de la biologie et de la médecine, on a souvent besoin d'une modélisation mathématique complexe. Cette modélisation nous conduit fréquemment à des problèmes aux limites non linéaires ainsi qu'à des problèmes de contrôle optimal qui, si on les discrétise, aboutissent à de « grands systèmes » algébriques. De difficiles problèmes de stabilité et de convergence y sont souvent associés. Dans notre papier nous proposons une méthode de résolution des équations fonctionnelles basée sur une transformation réductrice (Aliénor) qui nous permet de rechercher des solutions sous une forme particulière. Les équations fonctionnelles sont résolues par passage à un problème d'optimisation mais nous ne « touchons » pas à l'opérateur de l'équation. C'est seulement la fonction inconnue que nous approchons. Cette démarche est, bien sûr, classique car

on la retrouve dans les méthodes de type Galerkin ou dans les techniques d'éléments finis. Ce qui est original dans notre démarche c'est la mise en œuvre d'une technique systématique et simple pour proposer des approximations de fonctions de plusieurs variables. Nous *réduisons* d'abord le problème à *une variable* et dans ce cas les bonnes approximations sont nombreuses.

Après quoi, on peut « remonter » aux variables de départ avec notre transformation inverse et proposer des approximations de fonctions de plusieurs variables. C'est cette démarche simple et systématique qui manque à la méthode des éléments finis et qui rend si lourd l'élaboration d'un code d'éléments finis.

Nos méthodes ont été testées sur de nombreux exemples provenant de la biologie. Elles sont simples et faciles à mettre en œuvre. De plus elles n'exigent pas de gros ordinateurs. Les cas traités ici l'ont été sur microcalculateurs comportant au maximum 128 K.

#### BIBLIOGRAPHIE

1. V. V. ALEKSANDROV, N. D. GORSKY et A. O. POLYAKOV, *Recursive Algorithms of Data Representation and Processing*, Leningrad, 1979.
2. Y. CHERRUAULT, *Approximation d'opérateurs linéaires et applications*, Dunod, Paris, 1968.
3. Y. CHERRUAULT, *Biomathématiques*, Collect. « Que sais-je? », P.U.F., Paris, 1983.
- 3a. Y. CHERRUAULT. *Mathematical Modelling in Biomedicine*, Optimal Control of Biomedical Systems, Reidel Dordrecht, 1986.
4. Y. CHERRUAULT et A. GUILLEZ, *A Simple Method for Optimization*, Kybernetes, vol. 12, n° 1, 1983, p. 59-63.
5. Y. CHERRUAULT et P. LORIDAN, *Modélisation et Méthodes Mathématiques en biomédecine*, Masson, Paris, 1977.
6. P. G. CIARLET. *The Finite Element Method for Elliptic Problem*, North-Holland, Amsterdam, 1979.
7. E. T. COPSON, *Partial Differential Equations*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1975.
8. I. C. W. DIXON et G. P. SZEGO, *Towards Global Optimization*, North Holland, Amsterdam, 1974.
9. I. EKELAND et R. TEMAM, *Convex Analysis and Variational problems*, North Holland, Amsterdam, 1979.
10. A. FIACCO et G. McCORMICK, *Non Linear Programming: Sequential Unconstrained Minimization Techniques*, J. Willey, 1968.
11. M. FORTIN et R. GLOWINSKI, *Méthodes de lagrangien augmenté. Applications à la résolution numérique de problèmes aux limites*. Méthodes mathématiques de l'Informatique, vol. 9, Dunod, Paris, 1982.
12. R. GLOWINSKI, *Numerical Methods for non Linear Variational Problems*, Springer-Verlag, New York, 1984.

13. D. S. JONES et B. D. SLEEMAN, *Differential Equations and Mathematical Biology*, G. Allen and Unwin, 1983.
14. I. KARPOUZAS et Y. CHERRUAULT, *A New Global Optimization Technique for Solving Partial Differential Equations*, 12th Congress IFIP on System modeling and optimization, Budapest, Hongrie 2-6 septembre, 1985.
15. A. KRASNOSEL'SKII *et al.*, *Approximate Solution of Operator Equations*, Wolters-Noordhoff Publishing, Groningen, 1972.
16. J. L. LIONS, *Quelques Méthodes de Résolution des Problèmes aux Limites Non Linéaires*, Dunod, Paris, 1969.
17. P. LORIDAN, *Approximation de problèmes d'optimisation avec contraintes*, Thèse de Doctorat de 3<sup>e</sup> cycle, Université de Lille, 1969.
18. D. G. LUENBERGER, *Optimization by Vector Space Methods*, John Wiley and Sons, Inc., New York, 1969.
19. S. G. MIKHLIN, *The Numerical Performance of Variational Methods*, Wolters-Noordhoff, Groningen, 1971.
20. MORTON M. DENN, *Optimization by Variational Methods*, McGraw Hill, 1969.
21. P. A. RAVIART et J. M. THOMAS, *Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles*, Masson, Paris, 1983.
22. R. TEMAM, *Numerical analysis*, Reidel, 1973.
23. M. M. VAINBERG, *Variational Methods for the Study of Nonlinear Operators*, Holden-Day inc., San Francisco, 1964.
24. J. VIGNES, R. ALT et M. PICHAT, *Algorithmes numériques, analyse et mise en œuvre*, t. 2, *équations et systèmes non linéaires*, Édit. TECHNIP, Paris, 1980.