

C. BONNEMOY

Évaluation des systèmes : phénomènes transitoires

RAIRO. Recherche opérationnelle, tome 20, n° 1 (1986), p. 61-80

[<http://www.numdam.org/item?id=RO_1986__20_1_61_0>](http://www.numdam.org/item?id=RO_1986__20_1_61_0)

© AFCET, 1986, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « RAIRO. Recherche opérationnelle » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ÉVALUATION DES SYSTÈMES : PHÉNOMÈNES TRANSITOIRES (*)

par C. BONNEMOY ⁽¹⁾

Résumé. — *Dans le but d'évaluer des réseaux ouverts (centraux téléphoniques, par exemple), on utilise en général une modélisation par réseaux de files d'attente, et les logiciels usuels ne traitent que le cas stationnaire. L'étude du comportement transitoire de ces réseaux peut être abordée à l'aide du modèle à flux déterministe de R. Marie. Après une comparaison de ces deux modèles, nous donnons la mise en œuvre du modèle à flux déterministe pour la commande des systèmes, et nous situons son intégration dans le logiciel d'évaluation du Laboratoire d'Informatique de Clermont-Ferrand-II*

Mots clés : Évaluation; réseaux; files d'attente; flux déterministe; transitoire.

Abstract. — *To evaluate open networks (for example, telephone exchanges) one generally uses queuing process networks, and, with the usual software one only treats the stationary case. The transient behaviour of these networks may be studied with the deterministic flow model of R. Marie. After comparing those two models we show how to implement the deterministic flow model in view of commanding systems, and we have a look at its integration in our team evaluation software. (University of Clermont-Ferrand-II, Computer Science Laboratory.)*

Keywords: Evaluation; network; queuing processes; deterministic flow; transient.

1. INTRODUCTION

Nous traitons ici d'un système (Informatique, Central Téléphonique, etc.) se présentant comme un réseau ouvert de m stations, alimenté de l'extérieur par un flux d'entrée, dont tout ou partie, selon l'attente dans le réseau, s'écoule vers l'extérieur. Lorsque le flux entre et sort par la même station, le réseau est dit : « à serveur central ».

Si les arrivées dans le réseau se font de façon discrète, le flux d'entrée s'exprimant alors comme le nombre de « clients » arrivant pendant une unité de temps, le modèle généralement utilisé est celui d'un réseau de files d'attente. Ces modèles, sauf dans des cas très simples, ne sont explicitement résolus que pour le régime stationnaire (i.e., asymptotique) (théorème de Jackson pour une seule classe de clients, et hypothèses particulières sur les lois d'arrivée et de service (cf. [1]), théorème B.C.M.P. dans des cas plus généraux (cf. [3]).

(*) Reçu en mars 1985.

(1) Laboratoire d'Informatique de l'Université de Clermont-Ferrand-II, Complexe Universitaire des Cézéaux, 63170 Aubière, France.

Les langages de simulation comme GPSS, et les logiciels classiquement utilisés en évaluation des systèmes (QNAP, SLAM, SNAP...) ne traitent que ce cas (cf. [4]).

Pour intégrer dans la chaîne informatique (cf. § 7) le fonctionnement transitoire de tels réseaux, nous avons choisi le modèle à flux déterministe de R. Marie (cf. [5]), ce qui entraîne une double approximation :

(a) Du fait que nous n'allons traiter que le cas des effectifs moyens de clients, en service ou en attente dans le réseau. Ceci nous conduira au modèle noté FA par la suite (cf. § 2).

(b) Du fait que le modèle à flux déterministe, noté FD par la suite, introduit des flux de sortie (débits) par station, en général surévalués par rapport à ceux du modèle FA (cf. § 4).

Quoique limité, le modèle FD a une solution analytique simple (cf. § 5), présentant les avantages suivants :

- prise en compte explicite des variations du flux d'entrée en fonction du temps, donc de la possibilité d'introduire en temps réel ou différé des commandes du système pour éviter les situations de blocage (attente dans des stations, suroccupation d'un serveur central éventuel...);
- un gain de temps considérable dans l'étude dynamique du système par rapport aux méthodes de simulation;
- obtention, lorsque la solution asymptotique existe, de certaines caractéristiques identiques à celles du modèle FA correspondant, fournies par les logiciels classiques d'évaluation déjà cités.

2. LE MODÈLE FA

2.1. Hypothèses, notations

Nous nous plaçons dans le cadre des réseaux de Jackson :

m stations, $1 \leq i \leq m$, l'extérieur étant codé par $i=0$. Les arrivées suivent une loi de poisson, les temps de service des stations suivent des lois exponentielles, la discipline est FIFO (PAPS), les probabilités de passage d'une station à l'autre (extérieur compris) sont indépendantes du temps et du nombre de clients.

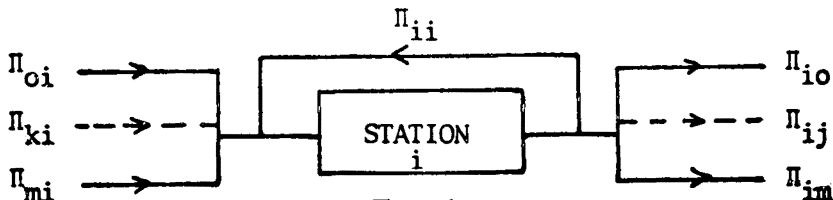


Figure 1.

Plus précisément :

Π_{ij} : probabilité pour un client sortant de la station i , de se diriger vers la station j , $0 \leq i, j \leq m$, avec :

$$\sum_{j=0}^m \Pi_{ij} = 1, \quad 0 \leq i \leq m, \quad \Pi_{00} = 0,$$

— pour une station i :

$N_i(\omega, t)$: v. a., nombre de clients dans la station (dans la file et en service) à l'instant t , $n_i, x_i \in N$ valeurs prises par $N_i(\omega, t)$:

$$\bar{N}_i(t) = E[N_i(\omega, t)],$$

$\mu_i(x_i)$: taux conditionnel de service (sachant que $N_i(t, \omega) = x_i$).

— pour l'ensemble des m stations :

$$N(t, \omega) = \sum_{i=1}^m N_i(t, \omega) \text{ à valeurs } n \in N.$$

$\Lambda(n)$ taux (i.e. flux) conditionnel d'arrivée [sachant que $N(t, \omega) = n$] (en pratique Λ sera supposé constant) :

$$\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_i, \dots, n_m), \quad n = \sum_{i=1}^m n_i$$

« état du système » à l'instant t

- $P_t(\mathbf{n})$: probabilité que le système soit dans l'état $\mathbf{n}$ à l'instant t .
- $P_t(n_i) = \sum_{\substack{n_l \geq 0 \\ l \neq i}} P_t(\mathbf{n})$: probabilité (marginale) que la station i soit dans

l'état n_i en t .

- $P_t(n_i, n_j) = \sum_{\substack{n_l \geq 0 \\ l \neq i, j}} P_t(\mathbf{n})$: probabilité (marginale) que les stations i et j

soient dans l'état n_i et n_j en t .

Alors : $\bar{N}_i(t) = \sum_{n_i \geq 0} n_i P_t(n_i)$ ($+\infty$ si la série diverge).

2.2. Système différentiel aux probabilités (cf. [1]) Kolmogorov

Par définition $\mu_i(0) = 0$, $P_t(\mathbf{n}) = 0$ si $\mathbf{n}$ a, au moins, une composante $n_i < 0$.

Alors sous les hypothèses habituelles non explicitées ici :

$$\begin{aligned}
 \text{(K)} \quad \dot{P}_t(\mathbf{n}) &= \dot{P}_t(n_1, \dots, n_m) \\
 &= - \left[\Lambda(n) + \sum_{i=1}^m (1 - \Pi_{ii}) \mu_i(n_i) \right] P_t(n_1, \dots, n_m) \\
 &\quad + \sum_{i=1}^m \Lambda(n-1) \Pi_{0i} P_t(n_1, \dots, n_i-1, \dots, n_m) \\
 &\quad + \sum_{i=1}^m \Pi_{i0} \mu_i(n_i+1) P_t(n_1, \dots, n_i+1, \dots, n_m) \\
 &\quad + \sum_{i=1}^m \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m \Pi_{ij} \mu_i(n_i+1) P_t(n_1, \dots, n_i+1, \dots, n_j-1, \dots, n_m).
 \end{aligned}$$

système infini d'équations différentielles linéaires pour $n_i \geq 0$, $1 \leq i \leq m$.

La solution stationnaire de (K), lorsqu'elle existe (cf. [1] et [2]), correspond à un premier membre nul. Sauf dans des cas très simples ($m=1$ ou 2), on ne sait pas expliciter la solution de (K) pour le régime transitoire. Nous établissons au paragraphe suivant, dans un cas particulier, un système d'équations aux espérances mathématiques $\bar{N}_i(t)$.

2.3. Formulation du modèle FA

Nous supposons maintenant que chaque station dispose de s_i serveurs identiques, $1 \leq s_i \leq \infty$, qui servent les clients pendant une durée de loi exponentielle de taux μ_i , de sorte que :

$$\mu_i(n_i) = \begin{cases} \mu_i n_i & \text{si } n_i \leq s_i, \\ \mu_i s_i & \text{sinon,} \end{cases}$$

ou μ_i est une constante > 0 . Alors $tm_i = \mu_i^{-1}$ est la durée moyenne de service pour un client dans cette station.

On supposera aussi le flux d'entrée (taux) Λ indépendant du nombre de clients.

Alors on obtient le :

LEMME : Soit $I_p = \{i \in \langle 1, 2, \dots, m \rangle; 1 \leq s_i < \infty\}$ l'ensemble des stations ayant un nombre fini de serveurs, $\text{Card}(I_p) = p \leq m$.

Soit $P_i(n_i)$ la probabilité qu'il y ait n_i clients dans la station i à l'instant t .

Posons :

$$\varphi_i^*(t) = \begin{cases} \mu_i \left[\sum_{n_i=1}^{s_i} n_i P_t(n_i) \right. \\ \left. + s_i \sum_{n_i=s_i+1}^{\infty} P_t(n_i) \right], & i \in I_p, \\ \mu_i \bar{N}_i(t), & i \notin I_p. \end{cases}$$

Alors les espérances mathématiques $\bar{N}_i(t)$ sont solutions de :

$$(FA) \quad \dot{\bar{N}}_i(t) = \sum_{j=1}^m \Pi_{ji} \varphi_j^*(t) - \varphi_i^*(t) + \Lambda \Pi_{0i}, \quad 1 \leq i \leq m.$$

Ces résultats sont obtenus, sous réserve de régularité, à partir des équations de Kolmogorov (K).

La démonstration, purement technique, consiste à calculer :

$$\dot{\bar{N}}_i(t) = \sum_{n_i \geq 0} n_i \dot{P}_t(n_i),$$

à identifier les moments d'ordre 1 et 2 (supposés finis) et à constater que les coefficients des moments d'ordre 2 s'annulent, car :

$$\sum_{j=0}^m \Pi_{ij} - 1 = 0, \quad \forall i.$$

COROLLAIRE : Si $s_i = \infty$, $1 \leq i \leq m$, les espérances mathématiques $\bar{N}_i(t)$ sont solutions du système différentiel linéaire :

$$(FAL) \quad \dot{\bar{N}}_i(t) = \sum_{j=1}^m \Pi_{ji} \mu_j \bar{N}_j(t) - \mu_i \bar{N}_i(t) + \Lambda \Pi_{0i}, \quad 1 \leq i \leq m.$$

REMARQUES : La résolution du système général FA nécessiterait la connaissance des probabilités marginales transitoires $P_t(n_i)$.

Le système particulier FAL est de résolution facile, rien n'empêche d'ailleurs d'y remplacer Λ par un flux $\varphi_0(t)$ suffisamment régulier, par exemple polynomial (cf. § 3).

3. LE MODÈLE A FLUX DÉTERMINISTE FD (cf. [5])

3.1. Le modèle FD

On considère un réseau ouvert de m stations dans lequel s'écoule un « fluide » de façon continue. La source fournit un débit d'entrée $\varphi_0(t)$ (cas

particulier : $\varphi_0(t) = \Lambda$ cte) réparti entre chaque station en proportion Π_{0i} . Le fluide issu de la station i s'écoule vers la station j en proportion Π_{ij} ($j=0$ pour l'extérieur). Si $v_i(t)$ est le volume dans la station i à l'instant t , chaque station i a pour débit : $\varphi_i(v_i(t))$.

Le réseau est régi par le système différentiel :

$$(FD) \quad \left\{ \begin{array}{l} \dot{v}_i(t) = \sum_{j=1}^m \Pi_{ji} \varphi_j(v_j(t)) - \varphi_i(v_i(t)) + \varphi_0(t) \Pi_{0i}, \\ 1 \leq i \leq m \quad \text{avec} \quad \sum_{j=0}^m \Pi_{ij} = 1, \quad 0 \leq i \leq m, \quad \Pi_{00} = 0, \end{array} \right.$$

si $\mu_i > 0$ et $s_i > 0$ sont des caractéristiques de la station i , le débit peut être modélisé dans le cas le plus simple par :

$$\varphi_i(v_i(t)) = \begin{cases} \mu_i v_i(t) & \text{si } v_i(t) \leq s_i, \\ \mu_i s_i & \text{sinon.} \end{cases}$$

DÉFINITION : La station i est dite « saturée » à l'instant t si :

$$v_i(t) > s_i.$$

REMARQUE : Du point de vue FA, une telle station correspond à un nombre moyen de clients supérieur au nombre de serveurs.

Condition initiale :

$$v_i(t_0) = v_i^0 < s_i, \quad 1 \leq i \leq m$$

(aucune station saturée à l'instant initial).

Flux d'entrée :

On suppose que $\varphi_0 \in \mathcal{C}[t_0, \infty[$ et qu'il existe $T > 0$ et une constante $\Lambda > 0$ tels que $t > T \Rightarrow \varphi_0(t) \equiv \Lambda$.

On supposera que la matrice $\Pi = (\Pi_{ij})$, $1 \leq i, j \leq m$ est irréductible, i.e., que l'on peut atteindre toute station du réseau à partir de l'une d'entre elles. On notera par Π_0 le vecteur de composantes Π_{0i} .

3.2. Principe de l'étude de FD

Le fonctionnement « normal » du modèle correspond à un flux d'entrée Λ constant et aucune saturation (i.e., file d'attente dans FA), pour atteindre quand $t \rightarrow \infty$ un régime stationnaire. Le modèle FD se réduit alors à un système différentiel linéaire de dimension m .

Avec les hypothèses faites, le système aux « nombres moyens de passage » e_i par la station i :

$$1 \leq i \leq m \sum_{j=1}^m \Pi_{ji} e_j - e_i = -\Pi_{0i} \Leftrightarrow (\Pi' - I) \mathbf{e} = -\Pi_0,$$

a toujours une solution positive. En effet, la matrice $\Pi' - I$ est irréductible, à diagonale dominante large sauf pour une colonne au moins ($\exists i: \Pi_{i0} > 0$), donc (cf. [6]), elle est régulière, à inverse négative.

Il y a solution stationnaire si (cf. [5]) :

$$\Lambda e_i \leq \mu_i s_i, \quad 1 \leq i \leq m,$$

qui vaut alors :

$$v_i^\infty = \Lambda e_i / \mu_i.$$

Mais au cas où pour un ensemble Is d'indices, $Is \subset \langle 1, 2, \dots, m \rangle$ on constante que $\Lambda e_i > \mu_i s_i$, $i \in Is$, on est assuré de voir les stations correspondantes saturer successivement à des instants : $t_1^* \leq t_2^* \dots$ repérés par : $v_i(t_k^*) = s_i$. Si ms est le nombre de stations saturées, la partie linéaire de FD est de dimension : $m - ms$.

La solution de FD dépend aussi d'une solution particulière correspondant au choix de $\varphi_0(t)$. Avec un flux simplement linéaire par morceaux, on peut commander le système pour, par exemple, faire désaturer une station.

Avant d'examiner ces questions, nous comparons rapidement les deux modèles FA et FD.

4. COMPARAISON DES MODÈLES FA ET FD

4.1. Comparaison

Le modèle FD peut être utilisé pour l'étude des phénomènes transitoires dans les réseaux, ouverts ou fermés. Ne traitant qu'une classe de « clients », il ne peut se comparer qu'à un réseau de Jackson pour lequel on étudie les effectifs moyens, c'est-à-dire le modèle FA.

Si on se limite au cas $\varphi_0(t) = \Lambda$ cte, on s'aperçoit que les modèles FA et FD ne coïncident que dans le cas :

$$\begin{cases} - \text{FA : infinité de serveurs } s_i = \infty \forall i, \\ - \text{FD : pas de saturation } v_i(t) \leq s_i \forall i, \forall t, \end{cases}$$

car alors les flux de sortie (débits) des stations sont identiques :

$$\varphi_i(t) \equiv \varphi_i^*(t) = \mu_i v_i(t) \quad \text{avec } v_i(t) \text{ identifié à } \bar{N}_i(t).$$

Si $\exists i \in \langle 1, 2, \dots, m \rangle$ tel que $s_i < \infty$, alors les modèles FA et FD ne peuvent avoir même solution. En effet, le débit dans FA est :

$$\varphi_i^*(t) = \mu_i \left[\sum_{n_i=0}^{s_i} n_i P_t(n_i) + s_i \sum_{n_i > s_i} P_t(n_i) \right] \leq \mu_i (\bar{N}_i(t) \wedge s_i),$$

alors que pour FD, il est :

$$\varphi_i(t) = \mu_i (\bar{N}_i(t) \wedge s_i) = \begin{cases} \mu_i v_i(t) & (v_i \text{ et } \bar{N}_i \text{ identifiables) si } v_i(t) \leq s_i, \\ \mu_i s_i & \text{sinon,} \end{cases}$$

c'est-à-dire qu'il est surévalué dans les deux cas par rapport au débit de FA.

L'approximation dépend de la probabilité de saturation : $\sum_{n_i > s_i} P_t(n_i)$.

Le (contre-)exemple suivant montre les éventuels dangers d'une approximation de FA par FD, lorsque le nombre de serveurs est minimal.

4.2. Exemple ($m=2$)

Nous allons comparer numériquement pour un système de deux stations les solutions :

(a) exacte (FA) :

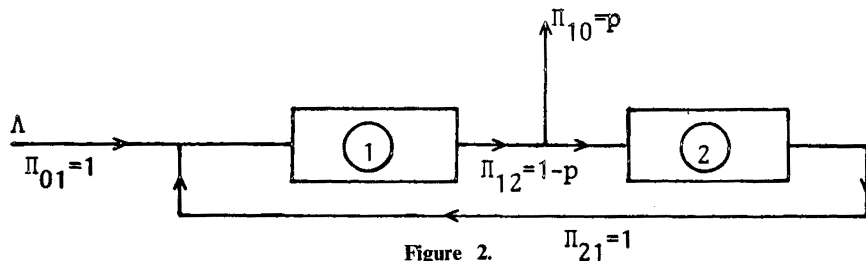
$$v_i^{\text{FA}}(t) = \bar{N}_i(t), \quad i=1, 2,$$

obtenue en intégrant numériquement les équations de Kolmogorov

(b) au flux déterministe (FD) :

$$v_i^{\text{FD}}(t), \quad i=1, 2,$$

pour le modèle suivant :



avec :

$$\begin{aligned} s_1 &= 1, & \mu_1 &= 2, & p &= 0, 1, \\ s_2 &= 1, & \mu_2 &= 0,2 \\ \Lambda &= 0,015 \quad (\text{pas de saturation}), \\ \Lambda &= 0,025 \quad (\text{saturation de 2}), \\ \Pi &= \begin{pmatrix} 0 & 0,9 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, & \Pi_0 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ v_i^{\text{FA}}(0) &= v_i^{\text{FD}}(0) = 0, & i &= 1, 2. \end{aligned}$$

Solutions asymptotiques

Système aux nombres moyens de passage :

$$\begin{aligned} (\Pi^t - I)\mathbf{e} &= -\Pi_0 \rightarrow e_1 = \frac{1}{p}, & e_2 &= \frac{1-p}{p}, \\ \rho_1 &= \frac{\Lambda e_1}{\mu_1}, & \rho_2 &= \frac{\Lambda e_2}{\mu_2}, \end{aligned}$$

si $\rho_1 < s_1 = 1$ et $\rho_2 < s_2 = 1$, alors pour :

$$(a) \bar{N}_i(\infty) = \frac{\rho_i}{1 - \rho_i}, \quad i = 1, 2.$$

$$(b) v_i^\infty = \rho_i, \quad i = 1, 2,$$

avec :

$$\begin{aligned} \Lambda &= 0,015, & \rho_1 &= 0,075, & \rho_2 &= 0,675, \\ \frac{\rho_1}{1 - \rho_1} &= 0,08108\dots, & \frac{\rho_2}{1 - \rho_2} &= 2,0769\dots \end{aligned}$$

avec :

$$\Lambda = 0,025, \quad \rho_1 = 0,125, \quad \rho_2 = 1,125 > 1.$$

Solutions transitoires (cf. fig. 3)

— pour $\Lambda = 0,015$ on constate que $v_i^{\text{FA}}(t)$ et $v_i^{\text{FD}}(t)$ ne sont voisines que pour $t \in [0, 50] \text{ ms}$, ensuite le passage de 1 pour (FA) à une « infinité de serveurs » (pour FD) se traduit de façon plus sensible pour $i = 2$ que pour $i = 1$ ($\rho_2 \gg \rho_1$);

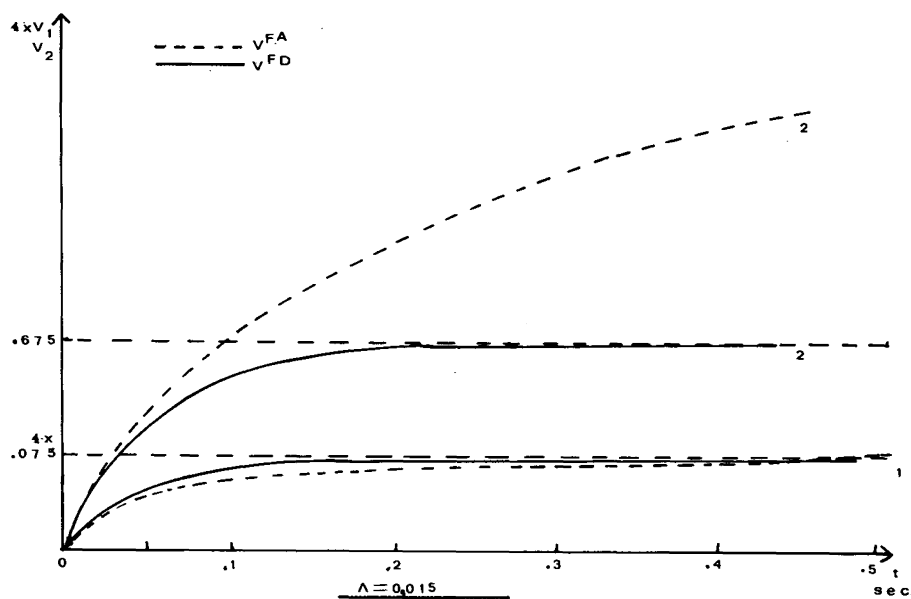
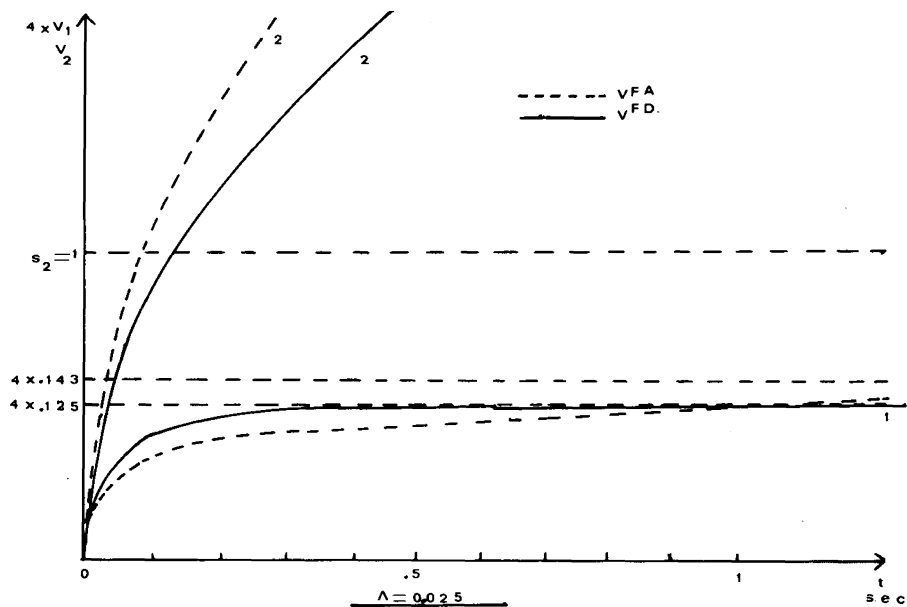


Figure 3. — Comparaison des effectifs dans les modèles FA et FD

— pour $\Lambda=0,025$, la station 2 sature vers $t_1^*=72$ pour FA, et vers $t_1^*=120$ pour FD, les comportements sont assez voisins pour $t \in [0, 1000]$ ms.

N.B. : Les résultats sont meilleurs dès que le nombre de serveurs augmente, mais il restera toujours le cas du serveur central unique pour différencier les résultats, sauf si son taux d'occupation reste faible.

Exemple (résultats asymptotiques, ceux de FA étant obtenus par QNAP) :

i	1	2	3
s	1	12	10
tm	.4	8	25
FD	.1998	4.199	3.478
FA	.2497	4.200	3.479

Pour la station 1 : $N_1^\infty \neq v_1^\infty / (1 - v_1^\infty)$

$$\Lambda = .025, \quad \Pi_{01} = 1$$

$$\Pi = \begin{pmatrix} .385\,640 & .285\,915 & .278\,409 \\ .272\,108 & .727\,892 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

5. COMMANDE ET SOLUTION DE FD

5.1. Commande

Reprenant ce qui est dit en 3.2, on sait que le fonctionnement « normal » du système est le régime stationnaire (sans saturation), avec un flux d'entrée constant sur d'assez longues périodes. Il peut être nécessaire de réajuster ce flux d'entrée, en temps réel ou différé, pour diverses raisons, soit en régime transitoire (ex. saturation d'une station), soit en régime stationnaire (ex. serveur central sur ou sous-occupé).

La commande la plus simple est alors du type :

$$\mathcal{C} = (t_1, t_2, \Lambda_1, \Lambda_2; \quad t_1 < t_2, \Lambda_1 < \Lambda_2 \text{ ou } \Lambda_1 \geq \Lambda_2)$$

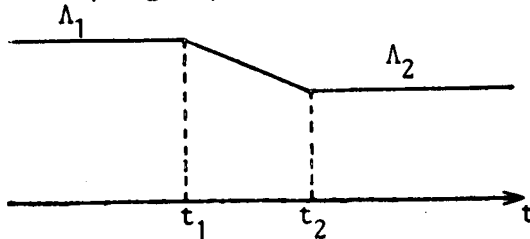


Figure 4.

— On peut évidemment enchaîner plusieurs de ces commandes. Cela se traduit pour le système différentiel de FD :

$$\dot{\mathbf{v}} = F(\mathbf{v}, t),$$

par le calcul d'une solution particulière $\mathbf{v}_p$ (évidente) pour $\varphi_0(t)$ de la forme;

$$\alpha t + \beta$$

et par des changements de condition initiale pour raccorder continûment les trajectoires $v_i(t)$.

— De plus le système FD change de nature à chaque saturation ou désaturation d'une station, la partie linéaire :

$$(\text{FDL}) \quad \dot{\mathbf{v}} = A \mathbf{v} + \varphi_0(t) \Pi_0 + \mathbf{D}$$

changeant de dimension $(m - ms)$ à chaque événement de ce type, événements qui peuvent se produire pendant une commande et réciproquement (cf. exemple au paragraphe 6).

5.2. Solution

$$(\text{FD}) \quad \left\{ \begin{array}{l} \dot{v}_i(t) = \sum_{j=1}^m \Pi_{ji} \varphi_j(v_j(t)) - \varphi_i(v_i(t)) + \varphi_0(t) \Pi_{0i}, \\ 1 \leq i \leq m. \end{array} \right.$$

• Notons :

$$I_s(t) = \{i \in \langle 1, \dots, m \rangle : v_i(t) \geq s_i\}, \quad ms = \text{Card}(I_s) :$$

l'ensemble des indices des stations qui sont saturées à l'instant t .

L'état de la commande (flux d'entrée) à l'instant t est :

$$\varphi_0(t) = \alpha t + \beta,$$

on note $t_d, \mathbf{v}(t_d)$ la condition initiale pour (FD) la plus récente avant t , qui correspond soit à un changement de commande, soit à une saturation/désaturation, soit aux deux simultanément (cf. exemple en § 6). (Par commodité et réalisme, on exclut le cas de deux ou plusieurs saturations/désaturations simultanées.)

Compte tenu du choix des flux de sortie $\varphi_i(v_i(t))$, pour $t \geq t_d$, le système s'écrit :

$$(\text{FDL}) \quad \left\{ \begin{array}{l} \dot{v}_i(t) = \sum_{j \notin I_s} \Pi_{ji} \mu_j v_j(t) - \mu_i v_i(t) + \Pi_{0i} \varphi_0(t) + \underbrace{\sum_{l \in I_s} \Pi_{li} \mu_l s_l}_{d_i} \\ \text{si } i \notin I_s \end{array} \right.$$

$$(FDS) \quad \begin{cases} \dot{v}_i(t) = \sum_{j \notin I_s} \Pi_{ji} \mu_j v_j(t) + \Pi_{0i} \varphi_0(t) - \mu_i s_i + \underbrace{\sum_{l \in I_s} \Pi_{li} \mu_l s_l}_{\gamma_i} \\ \text{si } i \in I_s \end{cases}$$

condition initiale $v_i(t_d)$ $1 \leq i \leq m$.

(a) *Solution de (FDL)*

Soit $A = (\Pi' - I) Mu$, $Mu = \left(\begin{array}{c} \text{---} \mu_i \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right) i \notin I_s$, la matrice $(m - ms) \times (m - ms)$

du système linéaire.

LEMME : Si Π est irréductible, alors A est inversible avec A^{-1} négative et ses valeurs propres sont à parties réelles strictement négatives.

En effet A est à diagonale dominance stricte sur au moins une colonne d'où le résultat (cf. [6]).

On note $(\lambda r_q + i \lambda c_q, \mathbf{V} r_q + i \mathbf{V} c_q)$ les éléments propres de A , $q \notin I_s$. Pour obtenir des solutions réelles, on pose, pour $q \notin I_s$:

$$U_q(t) = \begin{cases} \mathbf{V} r_q & \text{si } \lambda c_q = 0, \\ \left. \begin{array}{l} \mathbf{V} r_q \cos(t \lambda c_q) - \mathbf{V} c_q \sin(t \lambda c_q) \text{ } q \text{ pair} \\ \mathbf{V} c_q \cos(t \lambda c_q) + \mathbf{V} r_q \sin(t \lambda c_q) \text{ } q \text{ impair} \end{array} \right\} & \text{si } \lambda c_q \neq 0. \quad (1)$$

(1) Convention : $\lambda c_{q+1} = -\lambda c_q$, $\lambda r_{q+1} = \lambda r_q$, $\mathbf{V} c_{q+1} = -\mathbf{V} c_q$, $\mathbf{V} r_{q+1} = \mathbf{V} r_q$.

D'où :

$$\begin{cases} v_i(t) = v_{h,i}(t) + v_{p,i}(t), & i \notin I_s, \\ \Leftrightarrow \\ \mathbf{v}(t) = \mathbf{v}_h(t) + \mathbf{v}_p(t) \end{cases}$$

où :

$$\begin{cases} \mathbf{v}_h(t) = \sum_{q \notin I_s} C_q e^{\lambda r_q t} U_q(t), \\ \mathbf{v}_p(t) = -\alpha(t \mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_2) - \beta \mathbf{K}_1 - A^{-1} \mathbf{D}, \\ \mathbf{K}_1 = A^{-1} \Pi_0, \mathbf{K}_2 = A^{-2} \Pi_0, \mathbf{D} = (d_i)_{i \notin I_s}, \end{cases}$$

où les C_q sont calculés par :

$$i \notin I_s \quad \sum_{q \notin I_s} e^{\lambda r_q t_d} U_{q_i}(t_d) C_q = v_i(t_d) - v_{p,i}(t_d).$$

N.B. : A est supposée à spectre simple, sinon il est facile de modifier v_h en conséquence. Cette hypothèse s'est vérifiée dans toutes les applications.

(b) *Solution de FDS*

Pour $i \in I_s$:

$$v_i(t) = \left[\sum_{j \in I_s} \Pi_{ji} \mu_j \int v_j(t) dt + \Pi_{0i} \int \varphi_0(t) dt + t \gamma_i \right] + K_i,$$

où la constante K_i des deux intégrations est calculée par :

$$K_i = v_i(t_d) - \left[\right] (t_d),$$

ces formules fournissent la solution $v_i(t)$ $1 \leq i \leq m$ pour $t_d \leq t \leq t_{d+1}$, où t_{d+1} est l'événement suivant (même définition que pour t_d).

6. EXEMPLE

Nous considérons un réseau de $m=6$ stations, ayant comme serveur central la station $i=1$. La répartition des flux est visible sur la figure 5. Les caractéristiques de ce réseau sont les suivantes :

i	1	2	3	4	5	6
s_i	1	4	8	1	10	1
tm_i	.4	8	8	.3125	25	33.034

$$\Pi_{01} = 1, \quad v(0) = 0$$

$$\Pi = \begin{pmatrix} .271\,975 & .231\,451 & .040\,839 & .095\,306 & .265\,142 & .047\,653 \\ .370\,366 & 0 & .629\,634 & 0 & 0 & 0 \\ .215\,055 & .215\,055 & .569\,890 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

— Le réseau est soumis à la commande (*a priori*) :

$\mathcal{C} = (t_1 = .5 \text{ seconde}, t_2 = 1 \text{ seconde}, \Lambda_1 = 130 \text{ arrivées/s}, \Lambda_2 = 65 \text{ arrivées/s}).$

— Le comportement transitoire des effectifs moyens $v_i(t)$ des stations est visible sur la figure 6. On observe que le système passe par six instants (t_d)

de raccordement successifs :

- $t_0 = 0$, aucune saturation, $ms = 0$, $\alpha = 0$, $\beta = 130$;
- $t_1^* = .11$, saturation de la station 6, $ms = 1$, $\alpha = 0$, $\beta = 130$;
- $t_2^* = .31$, saturation de la station 2, $ms = 2$, $\alpha = 0$, $\beta = 130$;
- $t_1 = .5$, début de la commande, $ms = 2$, $\alpha = -130$, $\beta = 195$;
- $t_2 = 1$, fin de la commande, $ms = 2$, $\alpha = 0$, $\beta = 65$;
- $\hat{t}_1 = 1.16$, désaturation de la station 2, $ms = 1$, $\alpha = 0$, $\beta = 65$.

— Pour $t > \hat{t}_1$, les effectifs des cinq premières stations convergent vers une des valeurs asymptotiques non saturées (0,4, 2,94, 5,06, 0,030, 6,63), alors que $v_6(t) \rightarrow \infty$, asymptotiquement linéairement à raison de 17,365 unités par seconde. (On peut faire désaturer toutes les stations en diminuant Λ_2 .)

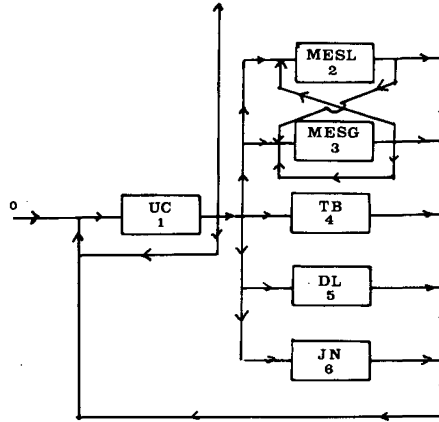


Figure 5. — Réseau.

7. CHAÎNE INFORMATIQUE D'ÉVALUATION

7.1. Chaîne informatique (cf. fig. 7)

Un logiciel d'aide à l'évaluation des systèmes (LAES) a été développé au laboratoire d'informatique à l'initiative de M. Gourgand (cf. [4]). Il permet la saisie (P0) et/ou la modification (P1) des descriptifs « fins » des systèmes complexes (approche transactionnelle) adaptée aux utilisateurs non spécialistes, désireux d'évaluer les performances (temps de réponse, taux d'occupation...) de leur système. Ceux-ci disposent ensuite dans le logiciel des outils nécessaires (P2, P3) pour obtenir les entrées adaptées aux outils d'évaluation : GPSS (simulation), QNAP2 (analytique et/ou simulation), C (BCMP plus sous modèles), MFD (analytique) pour le modèle à flux déterministe.

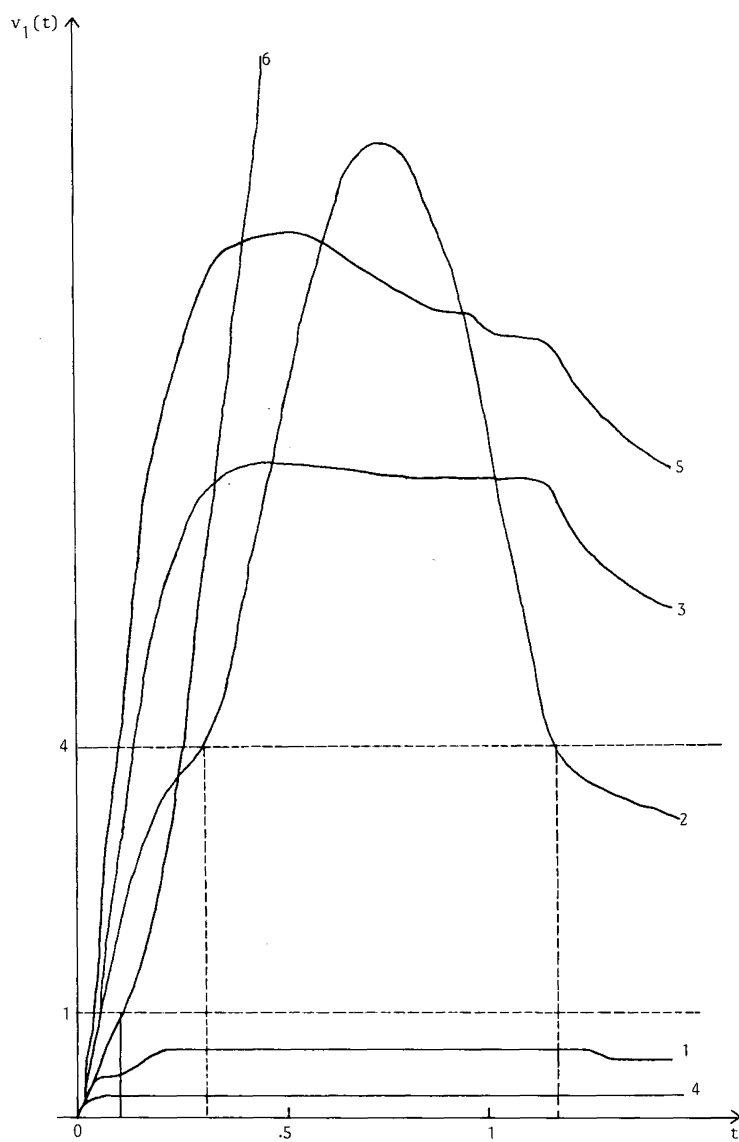


Figure 6. — Comportement transitoire d'un réseau de $m=6$ stations.

Cette chaîne est écrite en FORTRAN 77 et est opérationnelle sur de petits ordinateurs (MINI 6, SM 90).

7.2. Logiciel MFD

Écrit initialement par l'auteur, le programme a été entièrement repris par P. Kellert qui a systématisé la gestion des commandes et des saturations/désaturations, ainsi que l'interfaçage avec LAES. Ce logiciel a été testé sur les exemples alors en cours d'étude : centraux téléphoniques 11F et E11 (réseau ouvert de 11 stations à serveur central). LAES permet, par regroupement ou par suppression, de traiter de façon cohérente ces modèles avec moins de stations, c'est ce qui a été fait pour l'exemple du paragraphe 6.

Dans son état actuel, le logiciel MFD nous permet de conclure sur deux plans :

7.2.1. Sur le plan informatique

Le logiciel MFD est opérationnel pour des commandes données *a priori* dans le fichier d'entrée FFD (cf. fig. 7), ce qui n'est pas gênant pour des évaluations *a priori* du mode transitoire ou asymptotique. Le fichier d'entrée FFD comporte en fait deux fichiers de données :

(a) pour le réseau :

m : nombre de stations;

tm_i , $1 \leq i \leq m$: temps moyens de service;

s_i , $1 \leq i \leq m$: nombre de serveurs;

$\Pi_{ij} \begin{cases} 0 \leq i \leq m : \text{matrice de routage;} \\ 1 \leq j \leq m. \end{cases}$

Ces données sont le résultat de l'analyse fine du système faite en amont, grâce à un langage de description, et peuvent aussi bien servir pour QNAP.

(b) pour les commandes et l'édition :

1^{er} enregistrement :

$v_i(t_0)$, $1 \leq i \leq m$: volumes initiaux.

2^e enregistrement :

t_0 : instant initial;

TM : instant final;

h : pas du calcul;

dt : pas de la tabulation;

TG : pas du tracé par point;

LA : flux initial (Λ_1);

NC : nombre de commandes.

Si $NC=0$, le fichier est terminé, sinon il y a NC enregistrements comportant chacun :

- t_1 : instant du début de la commande;
- t_2 : instant de la fin de la commande;
- LB : valeur du flux d'entrée (Λ_2) en t_2 .

N.B. : Ces données (a) et (b) peuvent aussi être utilisées par une méthode numérique (Runge-Kutta), utilisée avec succès pour valider MFD sur de courtes durées. Le logiciel MFD nécessite quant à lui un certain nombre de paramètres supplémentaires pour les méthodes numériques utilisées (Gauss, Souriau, Bairstow, Dichotomie).

- Des essais sont en cours pour la prise en compte de commandes déclenchées en direct par des sous-modèles. Ont ainsi été introduits un sous-modèle de désaturation et un sous-modèle d'occupation optimale du serveur central (en régime stationnaire) (*cf.* [4]).

- Le calcul des éléments propres étant toujours délicat, la valeur $m=10$ n'a pour l'instant guère été dépassée, mais le gain en temps calcul (rapport de 1 à 50) par rapport à la simulation est très intéressant.

7.2.2. Sur le plan de l'évaluation

Le logiciel MFD a été testé sur les systèmes alors évalués au laboratoire : les centraux téléphoniques 11 F et E 11. Il faut à ce sujet rappeler les importantes restrictions d'utilisation :

- Non prise en compte des ressources passives et en particulier des ZTE (zones temporaires d'enregistrement).
- Une seule classe de clients.
- Matrice de routage constante.
- Serveur central unique ($s=1$), cas peu favorable, comme on l'a vu au paragraphe 4.
- Pas de sous-modèle pour l'unité centrale (du moins dans l'exemple proposé).

(Ces restrictions pourront être partiellement ou totalement levées ultérieurement.)

Compte tenu de ces restrictions, nous avons constaté que pour obtenir une saturation il fallait, en partant à vide, des flux d'entrée de plus de 60 appels par seconde. Pour obtenir la saturation de deux stations il faut un flux de 130 app/s! (*cf.* ex. du § 6). Le système est alors instable, les effectifs moyens des stations saturées augmentant indéfiniment en l'absence de commande telle que $\Lambda_1 \gg \Lambda_2$.

Sachant que le fonctionnement ordinaire de ces réseaux est de type stationnaire par morceaux, avec un flux normal de 25 app/s, et des « pointes » à 50 app/s sur une durée maximale d'environ 15 minutes, on voit que le modèle MFD n'est pas exactement adapté à ces exemples. Ceci n'enlève rien à sa principale qualité : Fournir un outil d'évaluation capable de donner une approche convenable et économique des phénomènes transitoires dans les réseaux.

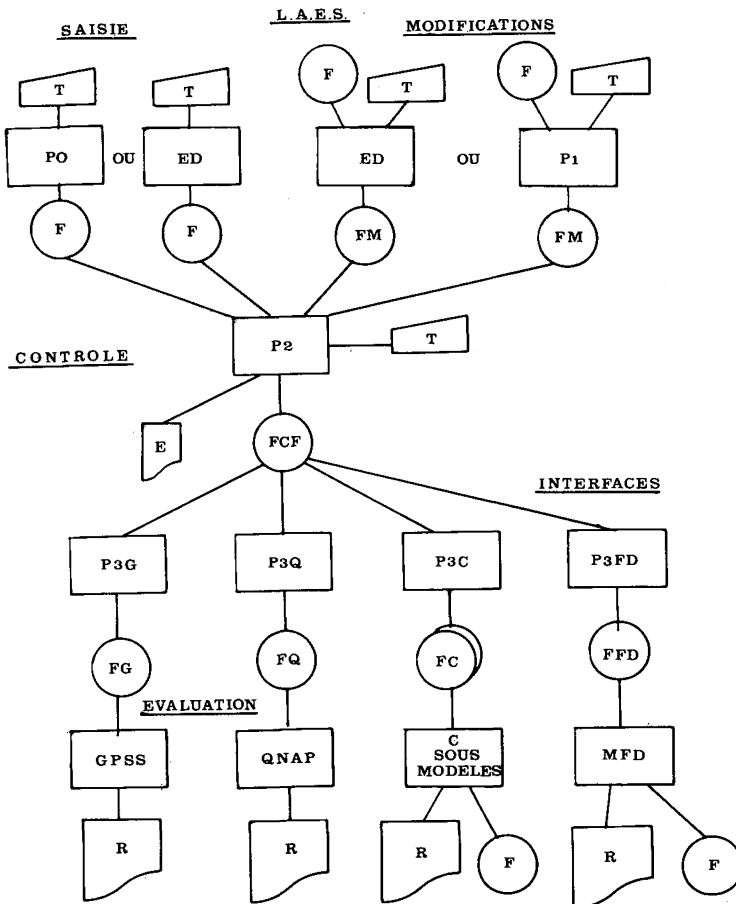


Figure 7. — L.A.E.S. F, FM, FCF, fichiers (E ou S), fichiers modifiés, fichiers contrôlés et formatés; ED, éditeur; E, état de contrôle; T, terminal; R, résultats; FG, FQ, FC, FFD, fichiers d'entrée des logiciels GPSS, QNAP, C, MFD.

BIBLIOGRAPHIE

1. A. BRANDWAJN, *Équivalence et décomposition dans les modèles à files d'attente et leur application à l'évaluation des systèmes d'exploitation*, Thèse d'État, Université de Paris-VI, 1975.
2. K. L. CHUNG, *Markov Chains with Stationary Transitions Probabilities*, Springer, Berlin, 1960.
3. E. GELENBE et G. PUJOLLE, *Introduction aux réseaux de files d'attente*, Eyrolles, 1982.
4. M. GOURGAND, *Outils logiciels pour l'évaluation des performances des systèmes informatiques*, Thèse d'État, Université de Clermont-II, 1984.
5. R. MARIE, *Modélisation par réseaux de files d'attente*, Thèse d'État, Université de Rennes, 1978.
6. R. S. VARGA, *Matrix Iterative Analysis*, Prentice-Hall, 1962.

Imprimerie GAUTHIER-VILLARS-France

Dépôt légal 1986 : Imprimeur : 2864 — Éditeur : 029 — CPPP 63423

Le Directeur de la Publication : J.-M. BOURGOIS