

J. P. MALENGÉ

**Le point sur quelques méthodes directes de
recherche de l'extremum d'une fonction
monodimensionnelle unimodale**

RAIRO. Recherche opérationnelle, tome 11, n° 3 (1977),
p. 323-335

http://www.numdam.org/item?id=RO_1977__11_3_323_0

© AFCET, 1977, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « RAIRO. Recherche opérationnelle » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

LE POINT SUR QUELQUES MÉTHODES DIRECTES DE RECHERCHE DE L'EXTREMUM D'UNE FONCTION MONODIMENSIONNELLE UNIMODALE (1)

par J. P. MALENGÉ(2)

Résumé. — *On compare différentes méthodes directes de recherche du minimum d'une fonction unimodale. Le cas où la densité de probabilité de l'extremum n'est pas constante dans l'intervalle de recherche est examiné et on propose une nouvelle méthode qui tient compte d'un effet de bord insoupçonné des auteurs des autres méthodes.*

INTRODUCTION

Soit f une fonction réelle d'une variable réelle, unimodale sur un intervalle $[a, b]$, il s'agit de trouver un intervalle de longueur ε ($\varepsilon > 0$ donné) qui contienne un point x^* tel que $f(x^*)$ soit maximal. Les méthodes classiques (nombre d'or, Fibonnacci) réduisent progressivement l'intervalle de départ en fonction uniquement du signe de $f(x_i) - f(x_j)$.

Plusieurs auteurs ont essayé d'améliorer l'efficacité de ces méthodes classiques soit en s'appuyant sur les valeurs de $f(x_i) - f(x_j)$ ou sur les signes de $f(x_i)$, $f(x_j)$, $f(x_k)$ soit en faisant des hypothèses plus ou moins explicites sur $P(x^*)$, densité de probabilité de x^* , maximum de $f(x)$.

Le but de cet article est essentiellement de faire une étude critique de ces méthodes et de démontrer que les méthodes classiques restent les plus performantes. Nous examinerons successivement la méthode de Gentry [4] puis la méthode de Berman [2] et simultanément celle de Mignotte [8] qui repose sur la même idée. Enfin nous serons amené à proposer une méthode que l'on pourrait supposer améliorante, mais que nous démontrerons éga-

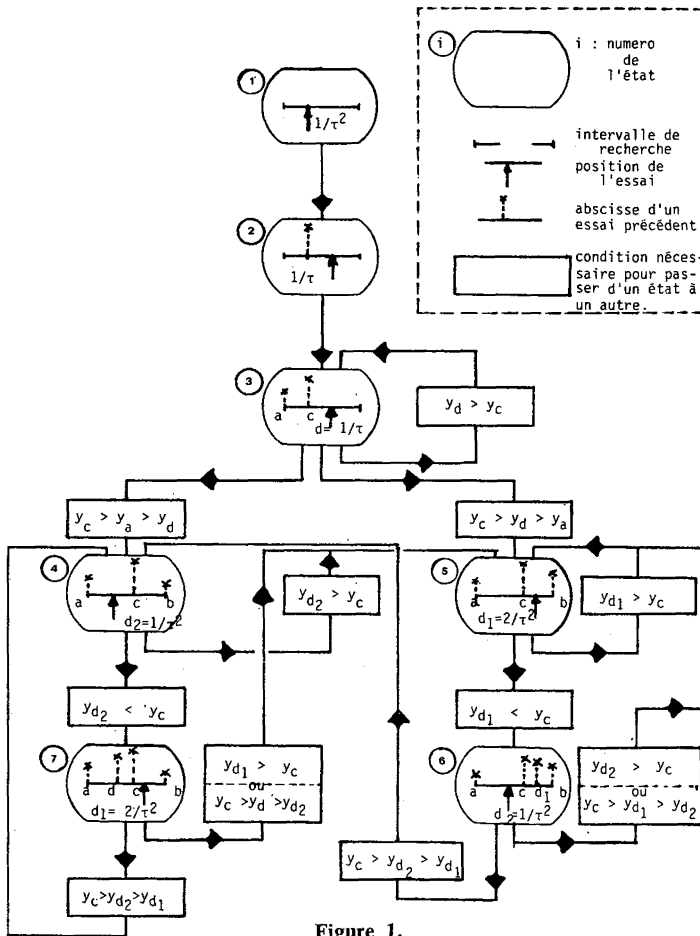
(1) Reçu nov. 1975, version révisée déc. 76.

(2) Professeur Iman et L. A. 190, Université de Nice (France).

lement moins performante. Par contre nous concluerons en rappelant la généralisation des méthodes classiques (nombre d'or, Fibonacci) que nous avons proposé récemment dans un colloque [6].

Cette revue bibliographique n'est probablement pas exhaustive. En effet, nombreux sont les scientifiques qui sont confrontés « expérimentalement » à ce problème de recherche directe du maximum. Ils ont l'habitude de publier le fruit de leurs réflexions sur ce sujet dans les revues spécialisées dans leur domaine d'application, ce qui rend le suivi de la bibliographie très malaisé.

Enfin, dans cet article nous prenons, pour simplifier, comme méthode de référence celle du nombre d'or, bien qu'il soit connu que celle de Fibonacci est légèrement meilleure.



I. MÉTHODE DE GENTRY

Alors que la méthode du nombre d'or ne compare que les valeurs des essais situés dans l'intervalle de recherche, Gentry [4] base sa méthode sur la comparaison de ces valeurs avec les valeurs aux bornes de cet intervalle. De ces comparaisons, il en déduit l'emplacement de l'essai suivant qu'il place évidemment du côté des plus grandes valeurs. Il est à noter que les positions exactes de ces essais sont toujours fonction du nombre d'or.

La figure 1 décrit le graphe de transition de la méthode considérée comme un automate d'état fini. La figure 2 donne la matrice de réduction.

	1	2	3	4	5	6	7
1		1					
2			$\frac{1}{\tau}$				
3			$\frac{1}{\tau}$	$\frac{1}{\tau}$	$\frac{1}{\tau}$		
4				$\frac{1}{\tau}$			$\frac{1}{\tau}$
5				$\frac{1}{\tau}$	$\frac{2}{\tau}$		
6			$\frac{1}{2}$	$\frac{1+2\tau}{6}$			
7			$\frac{1}{\tau}$	$\frac{1}{\tau}$			

Figure 2.

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	1	0	0	0	0	0
2	0	0	1	0	0	0	0
3	0	0	$\frac{3-\tau}{3}$	$\frac{\tau}{6}$	$\frac{\tau}{6}$	0	0
4	0	0	0	0	$\frac{1}{\tau}$	0	$\frac{1}{\tau^2}$
5	0	0	0	0	$\frac{\tau-1}{2}$	$\frac{3-\tau}{2}$	0
6	0	0	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	0	0
7	0	0	0	$\frac{\tau}{6}$	$\frac{6-\tau}{6}$	0	0

Figure 3.

On constate que dans certains cas la réduction est meilleure que celle du nombre d'or, dans certains cas, elle est moins bonne. L'efficacité globale de la méthode dépend donc des probabilités de transition. En supposant que dans l'intervalle initial $P(x^*) = \text{constante}$, on obtient la matrice de transition (fig. 3) à partir de laquelle nous avons pu calculer [7] que le rapport de réduction moyen était de 0,64515, donc moins bon que le $1/\tau = 0,61803$ de la méthode du nombre d'or. Encore ce calcul a-t-il été fait sans tenir compte d'un effet de bord dont nous n'étions pas conscients à l'époque et que nous exposons ci-dessous.

II. L'EFFET DE BORD

Soit un intervalle de départ $[a, b]$ et $P(x^*) = 1/(b - a)$ sur cet intervalle. Si l'on calcule $f(x_1)$ et $f(x_2)$ avec $x_1 < x_2$ quelconque et que l'on obtienne, par exemple $f(x_1) > f(x_2)$, que peut-on dire de $P_1(x^*)$ densité de probabilité de x^* dans l'intervalle $[a, x_2]$? Dans l'ensemble Ω des fonctions

unimodales dont le maximum est compris entre a et b soit Ω_1 le sous-ensemble contenant celles dont le maximum est compris entre x_1 et x_2 . Ω_1 peut lui-même être scindé en deux sous-ensembles Ω_{11} contenant les fonctions telles que $f(x_1) > f(x_2)$ et Ω_{12} contenant les fonctions telles que $f(x_2) > f(x_1)$ avec $\text{card}(\Omega_{11}) = \text{card}(\Omega_{12})$.

L'hypothèse $P(x^*) = \frac{1}{b-a}$ conduit donc (fig. 4) à

$$P_1(x^*) = \begin{cases} p & \text{si } a < x < x_1 \\ \frac{p}{2} & \text{si } x_1 < x < x_2 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

avec $p(x_1 - a) + \frac{p}{2}(x_2 - x_1) = 1$

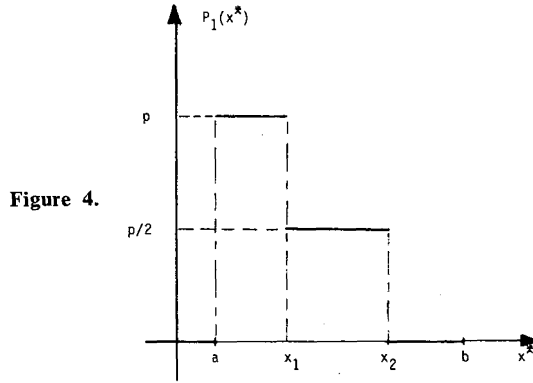


Figure 4.

En conclusion, si $P(x^*) = C^{ste}$, $P_1(x^*)$ est constante par morceaux, le rapport entre les deux constantes étant égal à 2. En poursuivant le même raisonnement pour les essais successifs, on montre qu'après $n + 1$ essais $P_n(x^*)$ est également constante par morceaux, le rapport entre les deux constantes étant égal à 2^n où n est un entier de valeur absolue inférieure ou égale à n .

Cette modification au cours des essais de $P_i(x^*)$ avait déjà été signalée par Fine [3] sous une autre forme : cet auteur calcule l'évolution de la fonction de répartition au cours des essais. On peut faire le lien entre nos travaux et ceux de Fine de la façon suivante : soit

- R l'hypothèse « $f(x_1) > f(x_2)$ »
- H_1 » « $x^* \in (a, x_1)$ »
- H_2 » « $x^* \in (x_1, x_2)$ »
- H_3 » « $x^* \in (x_2, b)$ »

en notant π les probabilités (la lettre P a été utilisée ci-dessus pour la densité de probabilité), le théorème de Bayes permet d'écrire :

$$\pi(H_1/R) = \frac{\pi(R/H_1) \cdot \pi(H_1)}{\pi(R/H_1) \cdot \pi(H_1) + \pi(R/H_2) \cdot \pi(H_2) + \pi(R/H_3) \cdot \pi(H_3)}$$

or $\pi(R/H_1) = 1$, $\pi(R/H_2) = 1/2$ et $\pi(R/H_3) = 0$

comme

$$\pi(H_1) = \int_a^{x_1} P(x^*) dx = \frac{x_1 - a}{b - a}$$

et

$$\pi(H_2) = \int_{x_1}^{x_2} P(x^*) dx = \frac{x_2 - x_1}{b - a}$$

on a

$$\pi(H_1/R) = \frac{x_1 - a}{x_1 + x_2 - a} \quad \text{et} \quad \pi(H_2/R) = \frac{(x_2 - x_1)/2}{x_1 + x_2 - a}$$

On retrouve ce résultat facilement en intégrant $P_1(x^*)$ donné ci-dessus et on constate également que ce résultat est identique à celui de Fine, aux notations près.

III. INFLUENCE DE L'EFFET DE BORD SUR L'EFFICACITÉ DE CERTAINES MÉTHODES: BERMAN, MIGNOTTE

Berman [2] il y a une dizaine d'années et Mignotte [8] plus récemment ont proposé des méthodes très voisines dont le principe est le suivant : on place n essais, également espacés dans l'intervalle de départ, ce qui détermine un espace réduit dans lequel on itère.

Nous avons pu montrer [5] grâce à un calcul rigoureux, et en tenant compte de l'effet de bord, que la méthode de Berman était moins efficace que celle du nombre d'or. Ce calcul soulève d'ailleurs la question de savoir quelle densité de probabilité $P(x^*)$ il faut donner à l'ensemble des fonctions pour lesquelles $f(a)$ et $f(b)$ sont connus : doit-on choisir $P(x^*)$ constant ou $P(x^*)$ variant linéairement de a vers b ? Les deux cas ont été envisagés.

Signalons que les méthodes de Berman et Mignotte s'apparentent à ce que l'on a coutume d'appeler « méthode par blocs successifs d'essais simultanés ». En 1966, Avriel et Wilde [1] ont calculé les emplacements des essais pour obtenir l'efficacité maximale. Ce calcul fait intervenir des nombres d'Avriel qui sont des nombres de Fibonacci généralisés :

$$A_p^0 = 0 \quad A_p^1 = 1 \\ A_p^n = p(A_p^{n-1} + A_p^{n-2}) \quad n = 2, 3, \dots$$

Ce calcul montre que cette méthode est toujours moins efficace que celle du nombre d'or et que son efficacité décroît lorsque le nombre d'essais simultanés augmente. Il faut donc n'utiliser cette méthode par blocs successifs d'essais simultanés que lorsqu'on y est contraint, ce qui peut arriver lorsque les essais sont de vraies expériences longues à dépouiller et qu'il faut prévoir plusieurs campagnes d'essais.

IV. UNE MÉTHODE BASÉE SUR L'EFFET DE BORD

Ayant détecté l'effet de bord, il est possible d'imaginer une méthode qui en tienne compte :

Pour plus de simplicité, appelons 0 et 1 les bornes de l'intervalle de départ dans lequel on suppose que $P(x^*) = \text{constante}$. La position des deux premiers essais x_1 et x_2 est donné par la résolution du système des conditions suivantes :

$$a) \int_0^{x_1} P(x) dx = \int_{x_2}^1 P(x) dx \quad \text{par raison de symétrie}$$

$$b) \frac{\int_0^{x_2} P(x^*) dx}{\int_0^1 P(x^*) dx} = \frac{\int_0^{x_1} P_1(x^*) dx}{\int_0^{x_2} P_1(x^*) dx} \quad \text{pour que la méthode soit itérative, c'est-}$$

à-dire pour que l'essai restant occupe la même place relative dans l'intervalle réduit que l'essai éliminé dans l'intervalle de départ, en terme de probabilité d'élimination.

Les conditions $a)$ et $b)$ sont analogues à celles de la méthode du nombre d'or, à ceci près qu'ici, dans $b)$, c'est $P(x^*)$ qui figure dans le membre de gauche et $P_1(x^*)$ dans le membre de droite. La valeur de $P_1(x^*)$ donnée au § II devient, avec $a = 0$ et $b = 1$:

$$P_1(x^*) = p \quad \text{si } 0 < x < x_1$$

$$\frac{p}{2} \quad \text{si } x_1 < x < x_2$$

0 ailleurs

En reportant cette valeur dans $b)$, on obtient

$$\frac{x_2}{1} = \frac{px_1}{px_1 + p(x_2 - x_1)/2} = \frac{2x_1}{x_1 + x_2}$$

D'autre part la relation $a)$ entraîne $x_1 + x_2 = 1$

on obtient donc $x_1 = \frac{1}{3}$, $x_2 = \frac{2}{3}$

Le même calcul peut être fait dans l'hypothèse $f(x_1) < f(x_2)$; il conduit, par raison de symétrie, au même résultat pour x_1 et x_2 .

Supposons que $f(x_1) > f(x_2)$, on obtient donc la figure 5 pour $P_1(x^*)$.

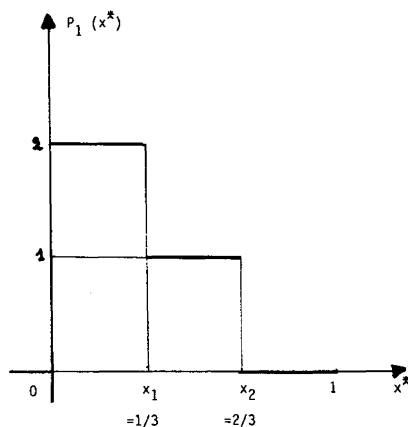


Figure 5.

La position du 3^e essai est évidente, il suffit que

$$\int_0^{x_1} P_1(x^*) dx = \int_{x_3}^{x_2} P_1(x^*) dx \Rightarrow x_3 = \frac{1}{6}$$

Par contre la position du 4^e essai est moins évidente : elle dépend de la valeur de $f(x_3)$.

Si $f(x_3) > f(x_1)$, cas de la figure 6 a, la variation correspondante de $P_2(x^*)$ est représentée figure 6 b et on place x_4 en $1/12$ par le même raisonnement que celui qui a dicté le choix de x_3 .

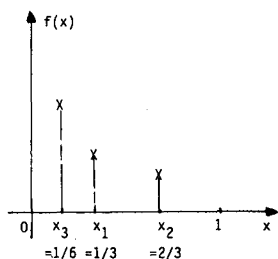


Figure 6 a.

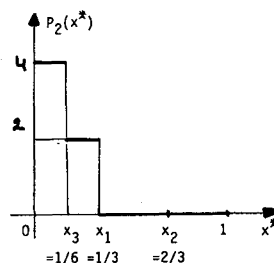


Figure 6 b.

Si $f(x_3) < f(x_1)$, cas de la figure 7 a, on retrouve une densité de probabilité constante (fig. 7 b) ce qui nous conduit naturellement à choisir $x_4 = x_3 + \frac{2}{3}(x_2 - x_3)$ puisque l'on est revenu au problème de départ.

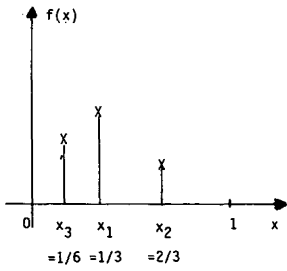


Figure 7 a.

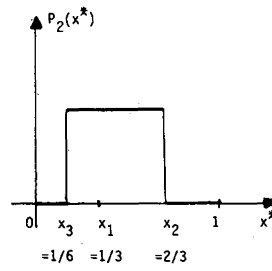


Figure 7 b.

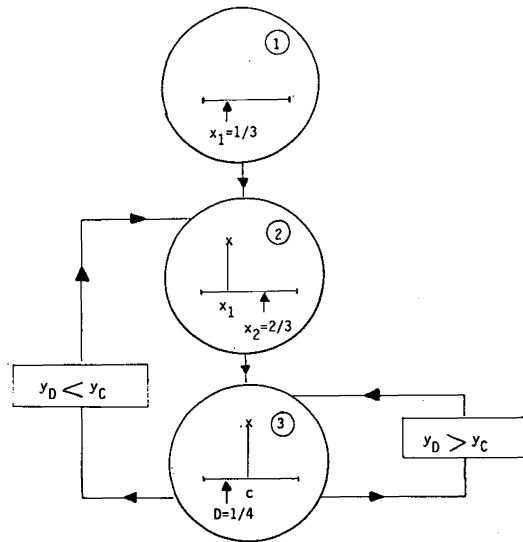


Figure 8.

	1	2	3
1	0	1	0
2	0	0	1
3	0	1/2	1/2

matrice de transition

	1	2	3
1		1	
2			2/3
3		1/2	3/4

matrice de réduction

Figure 9.

La figure 8 représente le graphe de cette méthode considérée comme un automate, les cas semblables à une symétrie près n'ont pas été représentés. La figure 9 donne les matrices de réduction et de transition. Le calcul de l'efficacité moyenne limite donne 0,638, ce qui est légèrement meilleur que la méthode de Gentry, de Berman et de Mignotte mais moins bon que la méthode du nombre d'or.

Il semble utile, à ce point de l'exposé, de mieux préciser les critères permettant de classer les méthodes entre elles :

— le premier critère suggéré a été celui du minimax : on dit qu'une méthode est d'autant meilleure que son intervalle d'incertitude final est plus petit, dans le cas le plus défavorable. Selon ce critère, la méthode du nombre d'or est la plus efficace si n est infini; la méthode de Fibonacci est la plus efficace si n est connu à l'avance; les deux méthodes étant d'ailleurs pratiquement identiques dès que $n > 10$,

— le second critère est celui de l'espérance mathématique de l'intervalle d'incertitude final. C'est évidemment avec ce critère qu'est calculée l'efficacité d'une méthode si on l'assimile à un automate d'état fini.

— Fine [3] a proposé comme critère l'espérance de la somme du coût des essais et d'une fonction $f(z)$ de l'intervalle d'incertitude final z . Il démontre que la méthode de Fibonacci est la meilleure si $f(z) = A|z|^p$ avec $A > 0$ et $p \geq 2$ dans le cas où $P(x^*) = C^{\text{ste}}$.

Nous proposons ci-dessous de « généraliser » la méthode du nombre d'or de façon à ce qu'elle soit optimale au sens du second critère, dans le cas où $P(x^*)$ est connu et non constant.

V. LA MÉTHODE DU NOMBRE D'OR GÉNÉRALISÉ

Il arrive en effet que l'on ait à rechercher le maximum d'une fonction appartenant à un ensemble pour lequel $P(x^*)$ est connu et non constant : c'est assez souvent le cas lorsqu'il s'agit d'ajuster un modèle à des résultats expérimentaux.

Nous avons proposé récemment [6] une méthode simple qui consiste à généraliser la méthode du nombre d'or : si $F(x^*)$ est la fonction de répartition du maximum, on place les essais successifs en des points x_i tels que les valeurs de $F(x_i)$ soient celles de la méthode du nombre d'or :

$$F(x_1) = \frac{1}{\tau^2} \quad , \quad F(x_2) = \frac{1}{\tau} \text{ etc. , ...}$$

Cette méthode a pour effet d'augmenter le nombre d'essais dans la région où le maximum est le plus probable.

Il est évident que son efficacité dépend de la forme de $P(x^*)$ et que le calcul est à faire pour chaque $P(x^*)$. Par exemple, si $P(x^*)$ a la forme donnée figure 10 a :

$$P(x^*) = \begin{cases} 4x & \text{pour } 0 < x < 0,5 \\ 4 - 4x & \text{pour } 0,5 < x < 1 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

$$\text{alors } F(x) = \begin{cases} 2x^2 & \text{pour } 0 < x < 0,5 \\ 4x - 2x^2 - 1 & \text{pour } 0,5 < x < 1 \end{cases}$$

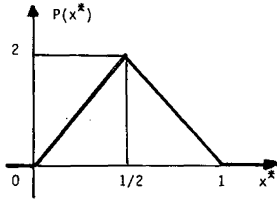


Figure 10 a.

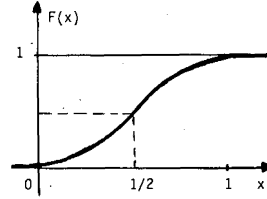


Figure 10 b.

$F(x)$ est représentée sur la figure 10 b et les deux premiers essais sont placés à

$$F(x_1) = \frac{1}{\tau^2} \Rightarrow x_1 = \frac{1}{\tau\sqrt{2}} \sim 0,437$$

$$\text{et } F(x_2) = \frac{1}{\tau} \Rightarrow x_2 \sim 0,563$$

Supposons que $f(x_1) > f(x_2)$, on placera le 3^e essai en x_3 tel que

$$F(x_3) = \frac{1}{\tau^3} \Rightarrow x_3 = \frac{1}{\sqrt{2}\tau^3} \sim 0,344$$

On s'aperçoit que le rapport de réduction après 3 essais est déjà de

$$\frac{1}{2} [(x_2 - x_3) + (x_1 - 0)] \sim \frac{1 - 0,344}{2} = 0,328$$

alors que par la méthode du nombre d'or, le rapport de réduction moyen après 3 essais n'est que $\frac{1}{\tau^2} = 0,382$. On peut montrer que cet avantage se maintient lorsque le nombre d'essais augmente.

Il faut bien noter, ainsi que nous l'avons déjà annoncé en fin de § IV, que cette méthode du nombre d'or généralisée est donc la meilleure uniquement au sens du 2nd critère (espérance mathématique de l'intervalle d'incertitude final), la méthode du nombre d'or restant la meilleure au sens du 1^{er} critère

(minimax). Il semble cependant, et c'est là l'intérêt de cette généralisation, que pour un utilisateur ayant à localiser l'extremum de nombreuses fonctions unimodales, le 2nd critère est le plus intéressant puisque minimiser ce second critère revient, à long terme, à minimiser le nombre total d'essais sur l'ensemble des fonctions. Il est malheureusement impossible de calculer théoriquement l'efficacité globale de la méthode du nombre d'or généralisée puisque son efficacité dépend de la forme de la densité de probabilité dans l'intervalle de départ. On pourrait évidemment calculer numériquement son efficacité sur de nombreuses fonctions avec différentes densités de probabilité que l'on se donnerait à l'avance; le résultat de ce travail coûteux n'aurait que peu d'intérêt pratique dans la mesure où il serait lié aux densités choisies arbitrairement.

Malheureusement cette méthode ne tient pas compte de l'effet de bord. Si on veut en tenir compte, il faut alors « généraliser » la méthode présentée au § IV ci-dessus : les deux premiers essais sont placés aux points x_1 et x_2 tels que $F(x_1) = \frac{1}{3}$ et $F(x_2) = \frac{2}{3}$ etc... Il est évident là encore que l'efficacité de cette méthode dépend de la fonction $P(x^*)$. Reprenons l'exemple ci-dessus : ($P(x^*)$ donné par la figure 10 a) alors :

$$F(x_1) = \frac{1}{3} \Rightarrow x_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} \sim 0,408 \quad \text{et} \quad x_2 \sim 0,592$$

Supposons que $f(x_1) > f(x_2)$ cela entraîne la nouvelle forme (fig. 11) pour $P_1(x^*)$.

$$P_1(x^*) = \begin{cases} k(4x) & \text{pour } 0 < x < \frac{1}{\sqrt{6}} \\ k\left(4x - \frac{2}{\sqrt{6}}\right) & \text{pour } \frac{1}{\sqrt{6}} < x < \frac{1}{2} \\ k\left(4 - \frac{2}{\sqrt{6}} - 4x\right) & \text{pour } \frac{1}{2} < x < 1 - \frac{1}{\sqrt{6}} \end{cases}$$

avec $k = 1/(4/3 - 2/\sqrt{6})$, k est une constante d'intégration pour que

$$\int_0^{1-\frac{1}{\sqrt{6}}} P_1(x^*) dx = 1$$

On place alors le 3^e essai en x_3 tel que $F(x_3) = \frac{1}{6}$ ou, ce qui revient au même:

$F_1(x_3) = \frac{1}{3}$ soit $x_3 = \frac{1}{\sqrt{12}}$. Et le rapport de réduction après ces 3 essais égale :

$$\frac{1}{2} [(x_2 - x_3) + (x_1 - 0)] \cong 0,3557$$

On constate que ce rapport est encore meilleur que celui obtenu par la méthode du nombre d'or après 2 essais (0,382). On peut poursuivre ainsi les calculs théoriques pour un nombre quelconque d'essais.

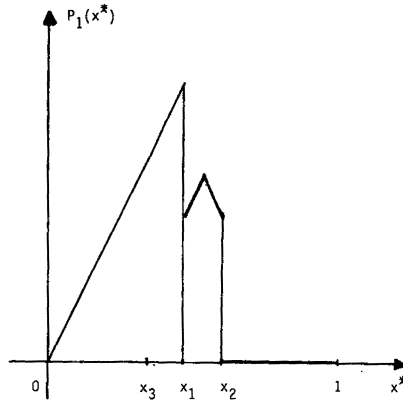


Figure 11.

CONCLUSION

Cette méthode du nombre d'or généralisée avec prise en compte de l'effet de bord (soit $M1$) semble à la fois rigoureuse et plus efficace que la simple méthode du nombre d'or, généralisée ou pas. Néanmoins, il ne faut pas oublier pratiquement que l'intervalle de réduction global demandé est souvent limité à $1/1\ 000$ et que cette valeur est atteinte en 16 essais par la méthode du nombre d'or.

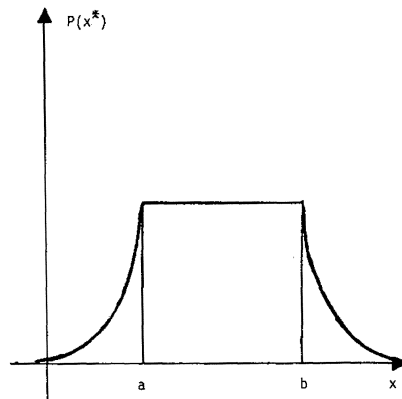


Figure 12.

C'est pourquoi nous ne conseillons pas d'utiliser la méthode *M1* car elle entraîne une complication extrême du calcul des abscisses des essais successifs et rend son utilisation quasiment impossible sur ordinateur. Par contre, nous préconisons l'emploi de la méthode du nombre d'or généralisé, (qui est extrêmement facile à programmer) non seulement pour les 1 ou 2 essais qu'elle fait parfois gagner, mais comme « garde-fou » au cas où l'intervalle de départ pour la recherche du maximum : $[a, b]$ aurait été sous-estimé : il suffit en effet d'ajouter à $P(x^*) = \text{constante}$ entre a et b une exponentielle rapidement décroissante à l'extérieur de l'intervalle $[a, b]$ (fig. 12). Les premiers essais occuperont des positions très voisines de celles qu'elles occupent dans la méthode du nombre d'or; par contre si le maximum se trouve, par exemple, au-delà de b , les abscisses des essais ne seront pas limités à cette valeur et on s'apercevra, au bout d'une dizaine d'essais, que cette valeur est franchie et l'optimum sera localisé en 16 ou 17 essais, alors que l'utilisation de la méthode du nombre d'or aurait nécessité 32 essais : les 16 premiers sur l'intervalle $[a, b]$ auraient donné b comme maximum et une recherche « de précaution » dans $[b, c]$ (c à définir) aurait, après 16 autres essais, conduit au véritable maximum.

Nous avons effectivement mis en œuvre cette méthode du nombre d'or généralisé depuis plusieurs années au centre de calcul de l'École Nationale Supérieure des Industries Chimiques de Nancy pour la résolution de très nombreux problèmes d'ajustement de modèles issus de différents domaines de la physique et de la chimie. Son utilisation est simple et nous pensons pouvoir la conseiller.

Par ailleurs, il est souhaitable que les auteurs de « nouvelles » méthodes basées sur des considérations statistiques n'oublient pas dans leurs calculs de tenir compte de l'effet de bord que nous avons signalé... et qui avait déjà été signalé par Fine en 1966!!

BIBLIOGRAPHIE

1. M. AVRIEL et D. J. WILDE, *Man. Sci.*, 1966, 12, 722.
2. J. BERMAN, *Siam J. of Numer. Anal.*, 1966, 3, 123.
3. T. FINE, *IEEE Trans. on Inf. Theory*, 1966, IT-12, 103.
4. J. W. GENTRY, *Chem. Engg. Sc.*, 1970, 25, 425.
5. J. LEMAIRE et J. P. MALENGÉ, à paraître.
6. J. P. MALENGÉ, 2^e colloque franco-soviétique sur la simulation et la modélisation des processus, Novosibirsk 1975.
7. J. P. MALENGÉ et P. VERNAY, *Chem. Engg. Sc.*, 1972, 27, 1205.
8. O. MIGNOTTE, R.A.I.R.O., 1975, 2, 113.