

R. ALEMANY

A. DIEGO

**Brève communication. Application de la théorie
des potentiels au projet d'un barrage**

Revue française d'automatique, informatique, recherche opérationnelle. Recherche opérationnelle, tome 6, n° V1 (1972),
p. 87-90

http://www.numdam.org/item?id=RO_1972__6_1_87_0

© AFCET, 1972, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Revue française d'automatique, informatique, recherche opérationnelle. Recherche opérationnelle » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Brèves communications

APPLICATION DE LA THEORIE DES POTENTIELS AU PROJET D'UN BARRAGE

par R. ALEMANY et A. DIEGO ⁽¹⁾

Résumé. — *La détermination de la capacité minimum d'un barrage et des paramètres associés qui règlent les livraisons périodiques d'eau, a été étudiée sous la forme d'un problème de programmation linéaire. Pour le résoudre, nous utilisons les résultats de la théorie des potentiels dans les graphes.*

1. Présentation du problème

Le problème de la détermination de la capacité minimum d'un barrage et des paramètres associés qui règlent les livraisons périodiques d'eau, a été étudié sous la forme d'un problème de programmation linéaire (voir [1]) du type suivant.

Minimiser y , en respectant les contraintes sur les variables $y, x_0, x_1, \dots, x_n$:

$$a) \quad p_i \leq x_i - x_{i-1} \leq q_i \quad , \quad x_0 = x_n \quad (1 \leq i \leq n),$$

$$b) \quad a_i + \alpha y \leq x_i \leq b_i + y \quad , \quad (0 \leq i \leq n);$$

$$c) \quad a'_0 + \beta y \leq x_0 \leq b'_0 + \beta y.$$

Dans cette formulation, y signifie la capacité du barrage, et les livraisons correspondantes à l'intervalle $(i-1, i)$ sont données par la différence entre le volume à l'instant $i-1$ et la quantité x_i ; l'année hydrologique étant divisée en n intervalles. D'autre part p_i, q_i ($1 \leq i \leq n$) a_i, b_i ($0 \leq i \leq n, a_0 = a_n, b_0 = b_n$) α, β ($0 < \alpha < \beta < 1$) et a'_0, b'_0 sont des constantes fixées par les conditions physiques et économiques du projet.

Pour résoudre un problème de ce type qui nous a été posé par le Département de Génie Civil de l'Université Nationale du Sud, nous avons utilisé certains résultats de la théorie des potentiels dans les graphes, dus principalement à B. Roy.

(1) Universidad del Sur, Argentina.

2. Solution du problème

Nous pouvons penser chaque $x = (x_0, x_1, \dots, x_n)$, avec $x_0 = x_0$ comme un potentiel dans un circuit de sommets $0, 1, 2, \dots, n-1$. Nous noterons S l'ensemble des potentiels qui vérifient a). Nous supposons $S \neq \emptyset$ c'est-à-dire, que la condition de consistance est vérifiée ([2]). Dans ce cas elle est simplement : $\sum_1^n p_i \leq 0 \leq \sum_1^n q_i$. Nous savons que S est un réticulé ([2]), qu'il existe parmi tous les potentiels $x \in S$ tels que $x \leq c$ (resp. $x \geq c$) un potentiel maximum Ec (resp. un potentiel minimum Fc), et que $E(c + \lambda e) = Ec + \lambda e$, $F(c + \lambda e) = Fc + \lambda e$, avec $e = (1, 1, \dots, 1)$. Voir [3].

D'après ce qui précède, si x satisfait a) et b) pour y fixée, alors

$$a + f(y)e \leq Fa + f(y)e \leq Eb + g(y)e \leq b + g(y)e \quad (1)$$

Ici nous substituons à αy et y respectivement $f(y)$, $g(y)$, parce que le raisonnement qui suit est valable pour les fonctions continues quelconques d'argument y réel.

D'ailleurs, si $Fa + f(y)e \leq Eb + g(y)e$, le système a), b) est compatible pour la valeur de y fixée.

Il s'en suit que le système a), b) a des solutions x pour la valeur y fixée si et seulement si

$$K = \max_{0 \leq i \leq n-1} \{ (Fa)_i - (Eb)_i \} \leq g(y) - f(y). \quad (2)$$

Dans ce cas, $Fa + f(y)e$, $Eb + g(y)e$ sont respectivement les solutions minimum et maximum associées à la valeur y donnée.

En conséquence, la valeur minimum de y cherchée est :

$$\bar{y} = \min \{ y \mid g(y) - f(y) \geq K \}. \quad (3)$$

Pour $f(y) = \alpha y$, $g(y) = y$, on obtient immédiatement :

$$\bar{y} = \frac{K}{1 - \alpha}, \quad (4)$$

et les deux solutions extrêmes :

$$\underline{x} = Fa + \frac{K \cdot \alpha}{1 - \alpha} \cdot e, \quad \bar{x} = Eb + \frac{K}{1 - \alpha} \cdot e. \quad (5)$$

Il nous reste à examiner la compatibilité des solutions obtenues avec la condition c).

Pour ceci, considérons les intervalles

$$A = [a'_0 + \beta \bar{y}, b'_0 + \beta \bar{y}] \quad \text{et} \quad B = [\underline{x}_0, \bar{x}_0].$$

i) Si $A \cap B \neq \emptyset$, il existe des solutions de $a)$, $b)$, $c)$ avec le même $y = \bar{y}$. Ainsi, si $\underline{x}_0 \in A$, alors $(\underline{x}, \bar{y})$ est solution; de même si $\bar{x}_0 \in A$, $(\bar{x}, \bar{y})$ est solution. Dans le cas $A \subset B$, $\underline{x}_0, \bar{x}_0 \notin A$, $x = \lambda \underline{x}_0 + (1 - \lambda)\bar{x}_0$, avec λ telle que $0 \leq \lambda \leq 1$, $x_0 \in A$ détermine des solutions $(x, \bar{y})$.

ii) Si $A \cap B = \emptyset$, ou $b'_0 + \beta \bar{y} < \underline{x}_0$ ou $\bar{x}_0 < a'_0 + \beta \bar{y}$. Dans le premier cas, on obtient immédiatement y minimum égal à

$$\bar{y}_1 = \frac{(Fa)_0 - b'_0}{\beta - \alpha} \text{ et } x = Fa + \alpha \bar{y}_1 e.$$

dans le deuxième cas $\bar{y}_2 = \frac{a'_0 - (Eb)_0}{1 - \beta}$, $x = Ea + \bar{y}_2 e$.

3. Calculs

On peut faire le calcul de Eb et Fa par des méthodes générales, comme celle de Cruon-Hervé [4] ou bien de la façon suivante :

Pour $b = (b_0, b_1, \dots, b_n)$, nous définirons $Lb = b'$, $Rb = b''$ et Mb par :

i) $b'_n = b_n$, et récursivement

$$b'_k = \min \{b_k, b'_{k+1} - p_{k+1}\} \text{ pour } k \text{ décroissant, } 0 \leq k < n.$$

ii) $b''_0 = b_0$, et récursivement

$$b''_k = \min \{b_k, b''_{k-1} + q_k\} \text{ pour } k \text{ croissant, } 0 < k \leq n.$$

iii) $Mb = (\min(b_0, b_n), b_1, b_2, \dots, b_{n-1}, \min(b_0, b_n))$

Il n'est pas difficile de voir que

$$Eb = RLMRLb. \quad (6)$$

La détermination de Fa est analogue et l'on peut la déduire facilement de l'égalité :

$$Fa = -E'(-a) \quad (7)$$

ou $E'a$ a la même signification que E mais avec $p' = -q$, $q' = -p$.

Des expressions alternatives de (6) sont :

$$Eb = RMRLMLb = \min(RMRb, LMLb).$$

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Ch. REVELLE, E. JOERES and W. KIRBY, « The linear decision rule in reservoir management and design », *Water Resources Research*, vol. 5, n° 4 (1969), p. 767.
- [2] B. ROY, « Cheminement et connexité dans les graphes : application aux problèmes d'ordonnancement », *Metra*, série spéciale, n° 1 (1962).
- [3] B. ROY, *Algèbre Moderne et Théorie des Graphes*, Dunod, Paris (1970).
- [4] R. CRUON et Ph. HERVÉ, « Quelques résultats relatifs à une structure algébrique et à son application au problème central de l'ordonnancement », *Revue Française de Recherche Opérationnelle*, n° 34 (1965), pp. 3-19.