C. BERGE

Problèmes plaisans et délectables

Revue française d'informatique et de recherche opérationnelle, tome 2, nº V3 (1968), p. 91-92

<http://www.numdam.org/item?id=RO_1968__2_3_91_0>

Problèmes Plaisans et Délectables

Problème 43. Un échiquier 6×6 est recouvert de pièces de dominos de 2×1. Démontrer qu'il se laisse toujours découper d'une ligne verticale ou horizontale sans traverser aucun domino !

Problème 43 bis. Un cube $20 \times 20 \times 20$ est construit avec des briques parallélépipédiques de dimension $1 \times 2 \times 2$. Démontrer qu'on peut le transpercer de part en part avec une aiguille sans traverser aucune des briques !

Nous devons ce problème, qui est inédit, à l'obligeance de son auteur, le professeur J. Mycielski.

Solution du n° 41 : Le problème des jetons noirs et des jetons blancs.

n jetons, alternativement noirs et blancs, sont alignés sans intervalles. A chaque coup, on prend deux jetons consécutifs et on les place sur deux places vides adjacentes ; quel est le nombre minimum de coups $h(n)$ pour obtenir une séquence de jetons noirs et une séquence de jetons blancs réunis?

Ce problème a été posé par Tait pour $n = 8$ (Introductory address to the Edinburgh Math. Soc., 9 nov. 1885), et une solution générale pour n pair, conduisant à $h(2p) = p$, paraît due à Delannoy (cf. Lucas, Récréations mathématiques, Paris 1892, *t.* 3, pp. 145-151).

En dépouillant le courrier de nos lecteurs, il apparaît qu'il y a plus de solutions que nous le supposions. Par exemple, pour le cas $n = 5$, on trouve trois solutions distinctes :

A a B b C	*A a B b C*	*A a B b C*
A a . . C B b	*A . . b C a B*	*A a B . . b C*
A a C B . . b	*A C a b . . B*	*. . B A a b C*
. . C B A a b	*a b A C B*	*. . . . a b C B A*

Ici, les lettres minuscules représentent les jetons blancs, et les lettres majuscules les jetons noirs.

Comme Lucas ne donnait qu'une méthode pour déterminer $h(n)$ quand n est pair, nous avons cru devoir faire appel à nos lecteurs pour comparer les différentes méthodes possibles.

Nous avons reçu des considérations intéressantes par M. P. de Nomazy, et aussi par M. Sbihi Abdelghani. Non, M. de Nomazy, $h(n)$ n'est pas une fonction croissante, puisque $h(3) = 1$ et $h(4) = 0$ (l'exception !).

M. Raymond Queneau envoie une méthode très générale pour $n \geqslant 5$, qui conduit à

$$h(2p - 1) = h(2p) = p,$$

... sauf pour $h(15)$.

Pour $h = 15$, $= (2 \times 8) - 1$, C. Witkowski donne entre autres la solution suivante en 8 mouvements :

A	*a*	*B*	*b*	*C*	*c*	*D*	*d*	*E*	*e*	*F*	*f*	*G*	*g*	*H*		
A	.	.	*b*	*C*	*c*	*D*	*d*	*E*	*e*	*F*	*f*	*G*	*g*	*H*	*a*	*B*
A	*E*	*e*	*b*	*C*	*c*	*D*	*d*	.	.	*F*	*f*	*G*	*g*	*H*	*a*	*B*
A	*E*	*e*	*b*	*C*	*c*	*D*	*d*	*g*	*H*	*F*	*f*	*G*	.	.	*a*	*B*
A	*E*	*e*	*b*	.	.	*D*	*d*	*g*	*H*	*F*	*f*	*G*	*C*	*c*	*a*	*B*
A	*E*	*e*	*b*	*f*	*G*	*D*	*d*	*g*	*H*	*F*	.	.	*C*	*c*	*a*	*B*
A	*E*	*e*	*b*	*f*	.	.	*d*	*g*	*H*	*F*	*G*	*D*	*C*	*c*	*a*	*B*
A	*E*	*e*	*b*	*f*	*c*	*a*	*d*	*g*	*H*	*F*	*G*	*D*	*C*	.	.	*B*
.	.	*e*	*b*	*f*	*c*	*a*	*d*	*g*	*H*	*F*	*G*	*D*	*C*	*A*	*E*	*B*

En numérotant les jetons de 1 à n, les paires à déplacer sont les suivantes :

$$(2, 3) \quad (9, 10) \quad (14, 15) \quad (5, 6) \quad (12, 13) \quad (6, 7) \quad (15, 16) \quad (1, 2)$$

Avec ces notations, et en désignant par m la partie entière de $n/4$, C. Witkowski suggère des méthodes conduisant à $h(2p-1) = h(2p) = p$, et qu'il note de la façon suivante :

$n = 0 \bmod 4$ $(2,3) - (5,6) - (2m+4, 2m+5) - (2m-1, 2m) - (2m+8, 2m+9) - (9,10) \ldots$

$n = 1 \bmod 4$ $(2,3) - (n, n+1) - (n-3, n-2) - (2m-1, 2m) - (n-7, n-6) \ldots$

$n = 2 \bmod 4$ $(2,3) - (2m+3, 2m+4) - (2m, 2m+1) - (4m-1, 4m) - (2m-4, 2m-3) - (4m-5, 4m-4) \ldots$

$n = 3 \bmod 4$ $(2,3) - (2m+3, 2m+4) - (2m+6, 2m+7) - (5,6) - (2m+10, 2m+11) \ldots$

Nous nous bornerons à montrer ici que toute méthode qui conduit à

$$h(2p) = h(2p-1) = p \qquad \text{est la meilleure possible.}$$

Appelons « rencontre » un couple de jetons adjacents de même couleur, c'est-à-dire un couple de deux lettres adjacentes, toutes deux majuscules ou toutes deux minuscules. Au départ, le nombre de rencontres est 0, et à la fin, le nombre de rencontres est $n-2$; si l'on peut créer ces $n-2$ rencontres en k mouvements, et si t_i désigne le nombre de rencontres créées au i-ème mouvement, on a

$$\begin{aligned} & t_1 \leqslant 1 \\ & t_2 \leqslant 2 \\ & \ldots \\ & t_{k-2} \leqslant 2 \\ & t_{k-1} + t_k \leqslant 3. \end{aligned}$$

Donc, en additionnant membre à membre :

$$n - 2 \leqslant 1 + 3 + 2(k-3)$$

ou

$$k \geqslant \frac{n}{2}$$

si $n = 2p$, comme si $n = 2p - 1$, on a donc bien $k \geqslant p$.

C. Berge

Le directeur de la Publication : Georges Dunod. — *Imprimé en France.*
Dépôt légal : 4e trimestre 1968. No 5900.
Imprimerie Nouvelle, Orléans. — No 5740.