Revue française d'informatique et de recherche opérationnelle [Série verte]

G. Th. Guilbaud

Quelques réflexions mathématiques sur les équilibres économiques

Revue française d'informatique et de recherche opérationnelle [Série verte], tome 2, nº V1 (1968), p. 5-39

<http://www.numdam.org/item?id=RO_1968__2_1_5_0>

R.I.R.O.
(2e année, N° 8, 1968, p. 5-39)

QUELQUES REFLEXIONS MATHEMATIQUES SUR LES EQUILIBRES ECONOMIQUES (1)

par G. Th. GUILBAUD (2)

1. LE MODELE D'ISNARD

Selon Schumpeter (*History of Economic Analysis*) le premier auteur qui a tenté une définition mathématique de l'EQUILIBRE est Isnard dans son *Traité des Richesses* (1781) « qui attend encore dans l'histoire de la science économique la situation qui lui est due » (celle de précurseur de Walras).

Il s'agit de montrer comment les VALEURS se constituent à partir des quantités disponibles et des besoins. Dans l'échange entre *deux* agents économiques, c'est clair : si l'on échange tant de litres de vin contre tant de mesures de blé, les termes mêmes de cet échange définissent le rapport en question : un baril de vin « vaut » tant de blé. Ce qui importe c'est la généralisation, pour laquelle l'expression mathématique est nécessaire.

Commençons par un exemple numérique, à la manière ancienne. Trois personnes possèdent respectivement 20 setiers, 25 barils, 30 quintaux (de quoi ? à vous de l'imaginer).

Tableau initial :

$$(Ti) \qquad \begin{array}{c|ccc} & \text{I} & \text{II} & \text{III} \\ \hline S & 20 & — & — \\ B & — & 25 & — \\ Q & — & — & 30 \end{array}$$

(1) Leçons faites à l'Aquila (Italie) en septembre 1965, Centro Internazionale Matematico Estivo, reproduites ici avec l'aimable autorisation de M. Cremonese, éditeur des cours du C.I.M.E.

(2) Directeur d'études à l'École Pratique des Hautes Études, Paris.

Imaginons qu'un échange préalable d'informations, et un débat, conduisent les trois personnes à souhaiter (tels sont les « besoins ») la réalisation du tableau final :

(Tf)

	I	II	III
S	9	6	5
B	7	15	3
Q	2	4	24

Alors sont déterminés des prix, non pas comme des nombres absolus, mais des rapports au sens arithmétique du mot.

Soient en effet s, b, q, des valeurs *unitaires* pour les trois marchandises il suffit d'écrire la *balance* des comptes :

$$\begin{aligned} 20s &= 9s + 7b + 2q \\ 25b &= 6s + 15b + 4q \\ 30q &= 5s + 3b + 24q \end{aligned}$$

Système de trois équations qu'on « résoudra », même sans grandes connaissances d'algèbre, et l'on trouve :

$$\frac{s}{12} = \frac{b}{14} = \frac{q}{17}$$

ce qui donne les proportions désirées entre les « valeurs ».

Deux données : (Ti) et (Tf), c'est-à-dire la répartition des marchandises avant et après l'échange. C'est d'ailleurs seulement ce qu'on peut appeler leur différence $(Tf - Ti)$ qui intervient :

-11	$+7$	$+2$
$+6$	-10	$+4$
$+5$	$+3$	-6

$(\mathrm{d}T = Tf - Ti)$

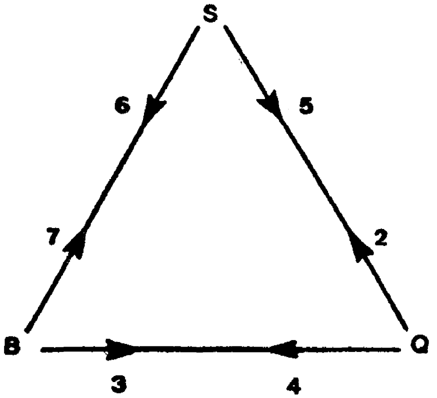

Figure 1. — Le réseau des échanges

et qui permet d'écrire l'équilibre des valeurs :

$$\begin{cases} 11s = 7b + 2q \\ 10b = 6s + 4q \\ 6q = 5s + 3b \end{cases}$$

Comptabilité en valeur (fig. 1) :

$$\begin{cases} 6s + 5s = 7b + 2q \\ 7b + 3b = 6s + 4q \\ 4q + 2q = 5s + 3b \end{cases}$$

Le fait mathématique à mettre en évidence : cette procédure réussit ! Réussit-elle toujours ?

D'abord le dire abstraitement : un tableau carré de nombres positifs (entiers dans notre exemple, en tous cas rationnels), complété dans la diagonale par des nombres négatifs calculés par l'addition en colonne. Des équations s'en déduisent. Donnent-elles toujours une solution acceptable ?

Existence de multiplicateurs (positifs) qu'on puisse interpréter comme des *prix.*

Quelqu'un qui ne sait pas la démonstration comprend-il la thèse économique ? et qui sait des mathématiques comprend-il mieux les phénomènes économiques ?

Description mathématique du problème posé.

On donne deux tableaux carrés, indiquant l'un la répartition initiale, l'autre la finale. Par exemple :

$$\boxed{\begin{matrix} 11 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{matrix}} \rightarrow \boxed{\begin{matrix} 0 & 7 & 2 \\ 6 & 0 & 4 \\ 5 & 3 & 0 \end{matrix}}$$

et l'on demande de trouver des multiplicateurs (qui seront interprétés comme des *prix*) :

$$a,\ b,\ c,\ \ldots$$

tels que :

$$\begin{aligned} 11a &= \phantom{6a +{}} 7b + 2c \\ 10b &= 6a + + 4c \\ 6c &= 5a + 3b \end{aligned}$$

qu'on écrira plus commodément sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} 11 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 7 & 2 \\ 6 & 0 & 4 \\ 5 & 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

On demande, non pas seulement de résoudre, c'est-à-dire calculer effectivement, mais d'étudier en général la possibilité d'un tel calcul, en accordant une attention toute particulière au fait que, dans notre interprétation économique, les multiplicateurs seront des prix et doivent être positifs.

Le langage vectoriel est le plus commode ; il s'agit de trouver des multiplicateurs (scalaires) a, b, c, ..., tels que :

$$a\begin{pmatrix} -11 \\ +6 \\ +5 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} +7 \\ -10 \\ +3 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} +2 \\ +4 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Le problème général est donc le suivant : étant donné un ensemble de vecteurs, existe-t-il une combinaison linéaire à coefficients positifs qui soit égale au vecteur zéro ?

2. ESPACES VECTORIELS ET CONES

Les colonnes de nombres (rationnels) que manipule notre comptabilité sont des vecteurs, c'est-à-dire des objets qui obéissent aux axiomes bien connus des espaces vectoriels (il y a un vecteur zéro, on sait additionner deux vecteurs, cette addition constitue l'ensemble en groupe abélien, il y a des homothéties qui constituent un corps). Dans les cas qui nous intéressent le corps sera celui des Réels ou des Rationnels : donc *ordonné*. Étant donnée une collection quelconque (ici elle sera toujours *finie*) de vecteurs d'un tel espace, l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires de ces vecteurs constitue un sous-espace vectoriel (ou variété linéaire). Si parmi les combinaisons linéaires ou sélectionne celles dont aucun coefficient n'est négatif on obtient une partie du susdit sous-espace, partie que l'on nomme *cône*.

Ainsi à partir d'une famille de vecteurs telle que : V_1, V_2, ..., V- on constitue deux ensembles :

$L(V_1, V_2, ..., V_n)$ ou $L(V_i)$ = *espace* engendré linéairement par les V_i

$K(V_1, V_2, ..., V_n)$ ou $K(V_i)$ = *cône* engendré positivement par les V_i

On a évidemment : $K \subset L$, tout cône est une partie de l'espace correspondant.

Mais il peut arriver qu'un cône soit, non pas une vraie partie d'espace, mais un espace tout entier. Il est facile de construire des exemples. Ainsi les vecteurs :

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

engendrent linéairement un espace. Adjoignons à ces trois vecteurs, un quatrième :

$$\begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\end{pmatrix}$$

Alors tout vecteur de l'espace peut être écrit comme combinaison linéaire positive de ces quatre vecteurs. Si les trois coordonnées sont positives, les trois premiers suffisent. Sinon, comme par exemple :

$$\begin{pmatrix}2\\-3\\4\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

on effectue le remplacement :

$$\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = -\begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

ce qui donne :

$$\begin{pmatrix}2\\-3\\4\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$= 5\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + 7\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\end{pmatrix}$$

dont tous les coefficients sont positifs.

Établissons, en général, la proposition suivante :

Tout espace est un Cône

Soit L l'espace engendré linéairement par les vecteurs $X_1, X_2, ..., X_n$. Adjoignons le vecteur X_0 défini par :

$$X_0 + X_1 + X_2 + ... + X_n = \text{Zéro}$$

Ce vecteur appartient évidemment à l'espace L. Nommons K le cône engendré par $X_0, X_1, ..., X_n$. Il est clair que : $K \subset L$. Mais on a aussi : $L \subset K$. Soit en effet X un vecteur quelconque de L. $X \in L$: signifie qu'il existe des coefficients P_i tels que :

$$X = \Sigma P_i X_i$$

Si tous les P_i sont positifs, on a $X \in K$. Sinon écrivons :

$$X = X + P_0(X_0 + X_1 + X_2 + ... + X_n)$$

ou bien :

$$X = P_0X_0 + (P_1 + P_0)X_1 + ... + (P_n + P_0)X_n$$

Or, en choisissant convenablement P_0, on pourra rendre positifs tous les coefficients de cette combinaison linéaire.

Il suffit pour cela qu'on aie : $P_i + P_0 \geqslant 0$ (pour tous les i). On pendra donc le plus petit des P_i, mettons que ce soit P_3, et l'on peut prendre : $P_0 > -P_3$. On voit donc que n'importe quel X peut s'écrire comme combinaison positive, c'est dire que $X \in K$.

On verra sans peine qu'on aurait pu remplacer la somme X_0 par une combinaison linéaire quelconque à coefficients négatifs (et non forcément tous égaux à -1) pourvu qu'aucun ne soit nul. Inversement, si un espace est positivement engendré par une collection de vecteurs, tout vecteur X de cet espace est égal à une combinaison positive (à coefficients non tous nuls) et il en est de même du vecteur $-X$, donc également de leur somme $X - X =$ Zéro. Ainsi le vecteur Zéro peut être représenté comme combinaison linéaire *positive* (à coefficients non nuls). Ainsi :

La condition nécessaire et suffisante pour que le cône K engendré positivement par une collection de vecteurs soit identique à l'espace engendré linéairement est qu'il existe une combinaison linéaire *positive* (aucun coefficient ne doit être nul) qui soit égale au vecteur Zéro.

Nous retouvons ici notre modèle d'Isnard : on donne une collection de vecteurs, existe-t-il une combinaison linéaire positive qui soit identiquement nulle ? Et rappelons la signification « comptable » : étant donné un schéma d'échanges de biens, existe-t-il des prix (positifs) assurant la balance des comptes (un équilibre en « valeur ») ?

Il sera commode d'appeler « Cône aplati » un cône identique au sous-espace engendré.

Notons au passage qu'il existe des cônes, qui sans être aplatis, *contiennent* des sous-espaces linéaires : on les nomme des « Coins » (anglais : wedges). Un demi-plan, un angle dièdre en fournissent des illustrations élémentaires. Pour un coin il existe aussi une combinaison positive identiquement nulle, mais certains coefficients sont nuls. Enfin notons que parmi les coins figurent, comme cas extrêmes, les demi-espaces.

(Un cône qui n'est pas un coin peut être dit « saillant ».)

Il peut être intéressant de présenter un algorithme permettant de décider si un système de vecteurs engendre positivement un vrai cône, ou bien s'il engendre tout l'espace.

Dans le premier cas, les théorèmes de séparation bien connus affirment l'existence d'un opérateur linéaire f tel que :

$$f(x_i) > 0$$

pour chacun des vecteurs x_i donnés.

Étant donné des vecteurs $x_1, x_2, \ldots, x_n$, proposons-nous de chercher par *tâtonnements* une forme f pour laquelle tous les résultats soient positifs.

Du même coup nous résoudrons un problème utile : classification de vecteurs en deux classes.

Des vecteurs x, une forme f : les fx sont des scalaires ; les vecteurs seront classés selon que fx est positif ou négatif. Si l'on donne deux classes, les vecteurs x et les vecteurs y, il s'agit de trouver une forme f telle que les fx soient positifs et les fy négatifs.

Il revient au même (à cause de la linéarité) de chercher une $\boldsymbol{f}$ telle que $\boldsymbol{fx}$ soit toujours positif en rassemblant dans une même classe $\boldsymbol{z}$: les $(\boldsymbol{x})$ et les $(-\boldsymbol{y})$.

Notre problème principal sera donc :

Étant donné un ensemble de vecteurs, trouver une forme qui, appliquée à ces vecteurs donne des scalaires tous positifs.

Schéma d'un algorithme : on essaie un f, s'il ne convient pas, c'est-à-dire s'il donne un résultat scalaire négatif pour quelqu'un des vecteurs soumis à l'épreuve, on doit modifier f. Cette modification sera, bien entendu, fonction du vecteur rebelle : il faut donc établir une correspondance entre vecteurs x et corrections Df, c'est-à-dire entre deux espaces vectoriels en dualité. Le plus simple sera de choisir une correspondance linéaire : mais faire correspondre linéairement à tout vecteur x une forme Df (c'est-à-dire une opération qui transforme tout vecteur v en un scalaire s), c'est finalement faire correspondre à une paire de vecteurs (x, v) un scalaire s. Et cette correspondance doit être bilinéaire, c'est-à-dire linéaire pour x comme pour v.

On va donc travailler dans un espace vectoriel muni d'une opération bilinéaire qui à toute paire de vecteurs fait correspondre un scalaire. Lorsque cette opération est symétrique et positive, on peut l'appeler « produit scalaire » et elle donne à l'espace vectoriel une structure géométrique (« euclidienne » ou « préhilbertienne ») ; on y trouve des longueurs (ou normes) par les carrés scalaires et des cosinus (ou coefficients de corrélation) grâce à la célèbre inégalité (de Cauchy, Schwarz et Buniakovski) qui s'écrit :

$$(x \cdot y)(x \cdot y) \leqslant (x \cdot x)(y \cdot y)$$

Décrivons maintenant, sur un exemple très rudimentaire (choisi pour pouvoir effectuer tous les calculs à la main en peu de temps), un algorithme particulièrement simple.

3. ALGORITHME

Vecteurs donnés :

$$\begin{cases} x = (0, 1, 0, 1) \\ y = (1, \bar{1}, \bar{1}, 1) \\ z = (\bar{1}, 0, 0, \bar{1}) \\ w = (0, \bar{1}, \bar{1}, 1) \end{cases}$$

Critère : (si Tv est positif, conserver l'opérateur T, sinon remplacer T par $T + v$).

	Essai	*Réponse*	*Opérateur*	*Vecteurs acceptés*
	—	—	—	—
$A = (0, 0, 0, 0)$	$Ax = 0$	non	$A + x = B$	—
$B = (0, 1, 0, 1)$	$By = 0$	non	$B + y = C$	—
$C = (1, 0, \bar{1}, 2)$	$Cz = \bar{3}$	non	$C + z = D$	—
$D = (0, 0, \bar{1}, 1)$	$Dw = 2$	oui	D	w
	$Dx = 1$	oui	D	w, x
	$Dy = 2$	oui	D	w, x, y
	$Dz = \bar{1}$	non	$D + z = E$	—
$E = (\bar{1}, 0, \bar{1}, 0)$	$Ew = 1$	oui		w
	$Ex = 0$	non	$E + x = F$	—
$F = (\bar{1}, 1, \bar{1}, 1)$	$Fy = 0$	non	$F + y = G$	—
$G = (0, 0, \bar{2}, 2)$	$Gz = \bar{2}$	non	$G + z = H$	—
$H = (\bar{1}, 0, \bar{2}, 1)$	$Hw = 3$	oui		w
	$Hx = 1$	oui		w, x
	$Hy = 2$	oui		w, x, y
	$Hz = 0$	non	$H + z = J$	—
$J = (\bar{2}, 0, \bar{2}, 0)$	$Jw = 2$	oui		w
	$Jx = 0$	non	$J + x = K$	—
$K = (\bar{2}, 1, \bar{2}, 1)$	$Ky = 0$	non	$K + y = L$	—
$L = (\bar{1}, 0, \bar{3}, 2)$	$Lz = \bar{1}$	non	$L + z = M$	—
$M = (\bar{2}, 0, \bar{3}, 1)$	$Mw = 4$	oui		w
	$Mx = 1$	oui		w, x
	$My = 2$	oui		w, x, y
	$Mz = 1$	oui		w, x, y, z (arrêt)

En récapitulant, on ne conservera que les étapes au cours desquelles l'opérateur a été modifié.

(Pour le dernier opérateur : $M = L + z$ tous les produits scalaires sont positifs.)

Opérateurs	*Résultat de l'essai*	
—	—	
$A = 0$		
$B = A + x$	$(x) \cdot y$	$= 0$
$C = B + y$	$(x + y) \cdot z$	$= \bar{3}$
$D = C + z$	$(x + y + z) \cdot z$	$= \bar{1}$
$E = D + z$	$(x + y + z + z) \cdot x$	$= 0$
$F = E + x$	$(x + y + z + z + x) \cdot y$	$= 0$
$G = F + y$	$(x + y + z + z + x + y) \cdot z$	$= \bar{2}$
$H = G + z$	$(x + y + z + z + x + y + z) \cdot z$	$= 0$
$J = H + z$	$(x + y + z + z + x + y + z + z) \cdot x$	$= 0$
$K = J + x$	$(x + y + z + z + x + y + z + z + x) \cdot y$	$= 0$
$L = K + y$	$(x + y + z + z + x + y + z + z + x + y) \cdot z$	$= \bar{1}$

(Pour le dernier opérateur : $M = L + z$ tons les produits scalaires sont positifs).

On a donc sélectionné une suite de vecteurs qu'on peut noter :

$$\begin{array}{l} a \\ a + b \\ a + b + c \\ \dots\dots\dots\dots \end{array}$$

les vecteurs a, b, c, d, ... étant choisis (avec répétitions éventuelles) parmi les vecteurs donnés x, y, z, w (en nombre fini : ici quatre).

Et la suite calculée pour les essais est :

$$\begin{array}{l} a \cdot b \\ a + b \cdot c \\ a + b + c \cdot d \\ \text{etc.} \end{array}$$

Et aucun de ces scalaires n'est positif.

Mais l'on a :

$$2(a \cdot b) = (a + b)^2 - a^2 - b^2$$

$$2(a + b \cdot c) = (a + b + c)^2 - (a + b)^2 - c^2$$

$$2(a + b + c \cdot d) = (a + b + c + d)^2 - (a + b + c)^2 - d^2$$

etc.

il en résulte, en additionnant, que :

$$(a + b + c \dots)^2 - (a^2 + b^2 + c^2 + \dots) \leqslant 0$$

Donc la suite sélectionnée est telle que :

(1) carré de la somme $\leqslant$ somme des carrés.

On va voir que cela implique que la somme en question ne peut contenir une infinité de termes.

Soit S le vecteur somme en question $S = a + b + c + \dots$ et F un opérateur linéaire quelconque (ou covecteur). D'après l'inégalité de Cauchy et consorts :

$$(F \cdot S)(F \cdot S) \leqslant (F \cdot F)(S \cdot S)$$

Mais : $\quad F \cdot S = F \cdot a + F \cdot b + F \cdot c + \& C$

et d'après (1) : α $\quad$ et $S \cdot S \leqslant a \cdot a + b \cdot b + c \cdot c + \& C$

Donc : $\quad (Fa + Fb + \dots)^2 \leqslant (F \cdot F)(a \cdot a + b \cdot b + \dots)$

S'il existe un F tel que tous les produits Fa, Fb, ... soient positifs, c'est qu'il existe une borne inférieure h

$$Fa \geqslant h > 0$$
$$Fb \geqslant h > 0$$
etc.

donc

$$(Fa + Fb + \dots)^2 \geqslant n^2h^2$$

(n étant le nombre de terme de la somme).

D'autre part $a \cdot a$, $b \cdot b$, ... carrés scalaires sont positifs et puisque a, b, ... sont choisis dans un ensemble fini, ils sont bornés supérieurement

$$a \cdot a \leqslant k \quad , \quad b \cdot b \leqslant k \quad \text{etc.}$$

Finalement : $\quad n^2h^2 \leqslant F^2 \cdot nK$

$$n^2h^2 \leqslant F^2 \cdot nk \quad \text{ou bien :} \quad n \leqslant F^2 \cdot \frac{k}{h^2}$$

ce qui montre que n est borné.

A titre de vérification : dans notre exemple numérique, on avait :

$$x \cdot x = 2, \quad y \cdot y = 4, \quad z \cdot z = 2, \quad w \cdot w = 3$$

on peut donc prendre : $k = 4$.

D'autre part on peut prendre pour F, le dernier vecteur obtenu (M) et l'on a

$$Mx = 1, \quad My = 2, \quad Mz = 1, \quad Mw = 4$$

on peut prendre $h = 1$.

Enfin $M \cdot M = 14$.

On est donc assuré que : $n \leqslant 56$.

En fait, selon la procédure adoptée le nombre de vecteurs de la dernière étape (L) était seulement 10.

En tous cas on peut être sûr que *s'il existe un plan séparateur* (défini par F) (c'est-à-dire si nos vecteurs engendrent un cône qui n'est pas aplati) l'algorithme en trouvera un au bout d'un nombre d'opérations inférieur à $n_0 =$ entier de $\left(F^2 \cdot \frac{k}{h^2}\right)$

Pour montrer ce qui se passe dans le cas contraire, c'est-à-dire s'il existe une combinaison linéaire à coefficients tous positifs qui soit égale à zéro, on va, pour terminer, traiter un exemple simple. Avec quatre vecteurs :

$$\begin{aligned} a &= (-2, 0, 1) \\ b &= (0, 2, -1) \\ c &= (0, -2, -3) \\ d &= (1, 0, +3) \end{aligned}$$

$O = (0, 0, 0)$	$a = (-2, 0, 1)$	$Oa = 0$	$O + a = P$
$P = (-2, 0, 1)$	$b = (0, 2, -1)$	$Pb = -1$	$P + b = Q$
$Q = (-2, 2, 0)$	$c = (0, -2, -3)$	$Qc = -4$	$Q + c = R$
$R = (-2, 0, -3)$	$d = (1, 0, 3)$	$Rd = -11$	$R + d = S$

$S = (-1, 0, 0)$	$a = (-2, 0, 1)$	$Sa = +2$	$S \quad = S$
idem	$b = (0, 2, -1)$	$Sb = 0$	$S + b = T$
$T = (-1, 2, -1)$	$c = (0, -2, -3)$	$Tc = -1$	$T + c = U$
$U = (-1, 0, -4)$	$d = (1, 0, 3)$	$Ud = -13$	$U + d = V$

$V = (0, 0, -1)$	$a = (-2, 0, 1)$	$Va = -1$	$V + a = W$
$W = (-2, 0, 0)$	$b = (0, 2, -1)$	$Wb = 0$	$W + b = X$
$X = (-2, 2, -1)$	$c = (0, -2, -3)$	$Xc = 0$	$X + c = Y$
$Y = (-2, 0, -4)$	$d = (1, 0, 3)$	$Yd = -14$	$Y + d = Z$

$Z = (-1, 0, -1)$	$a = (-2, 0, 1)$	$Za = 1$	$Z \quad = Z$
idem	$b = (0, 2, -1)$	$Zb = 1$	$Z \quad = Z$
idem	$c = (0, 2, -3)$	$Zc = 3$	$Z \quad = Z$
idem	$d = (1, 0, 3)$	$Zd = -4$	$Z + d = A$

$A = (0, 0, 2)$	$a = (-2, 0, 1)$	$Aa = -2$	$A \quad = A$
idem	$b = (0, 2, -1)$	$Ab = -2$	$A + b = B$
$B = (0, 2, 1)$	$c = (0, -2, -3)$	$Bc = -7$	$B + c = C$
$C = (0, 0, -2)$	$d = (1, 0, 3)$	$Cd = -6$	$C + d = D$

$D = (1, 0, 1)$	$a = (-2, 0, 1)$	$Da = -1$	$D + a = E$
$E = (-1, 0, 2)$	$b = (0, 2, -1)$	$Eb = -2$	$E + b = F$
$F = (-1, 2, 1)$	$c = (0, -2, -3)$	$Fc = -7$	$F + c = G$
$G = (-1, 0, -2)$	$d = (1, 0, 3)$	$Gd = -7$	$G + d = H$
$H = (0,0,\ 1)$	$a = (-2, 0, 1)$	$Ha = 1$	$H \quad = H$
idem	$b = (0, 2, -1)$	$Hb = -1$	$H + b = I$
$I = (0, 2, 0)$	$c = (0, -2, -3)$	$Ic = -4$	$I + c = J$
$J = (0, 0, -3)$	$d = (1, 0, 3)$	$Jd = -9$	$J + d = K$
$K = (1, 0, 0)$	$a = (-2, 0, 1)$	$Ka = -2$	$K + a = L$
$L = (-1, 0, 1)$	$b = (0, 2, -1)$	$Lb = -1$	$L + b = M$
$M = (-1, 2, 0)$	$c = (0, -2, -3)$	$Mc = -4$	$M + c = N$
$N = (-1, 0, -3)$	$d = (1, 0, 3)$	$Nd = -10$	$N + d = O$

et la procédure va recommencer.

Puisque chacun des opérateurs P, Q, R, ..., N est une combination linéaire à coefficients entiers des vecteurs donnés, la dernière équation :

$$\vec{N} + d = \vec{O}$$

fournit une relation :

$$4a + 7b + 7c + 8d = 0$$

Le caractère cyclique est évidemment dû ici à l'emploi des entiers (et au fait que ces entiers soient bornés).

Ainsi notre algorithme, ou bien fournit une forme F telle que $Fx > 0$ pour chacun des vecteurs x donnés, ou bien, si une telle forme n'existe pas, fournit en quelque sorte la raison de l'impossibilité : à savoir une combinaison linéaire positive égale au vecteur zéro.

4. TATONNEMENTS

Reprenons un schéma d'échanges :

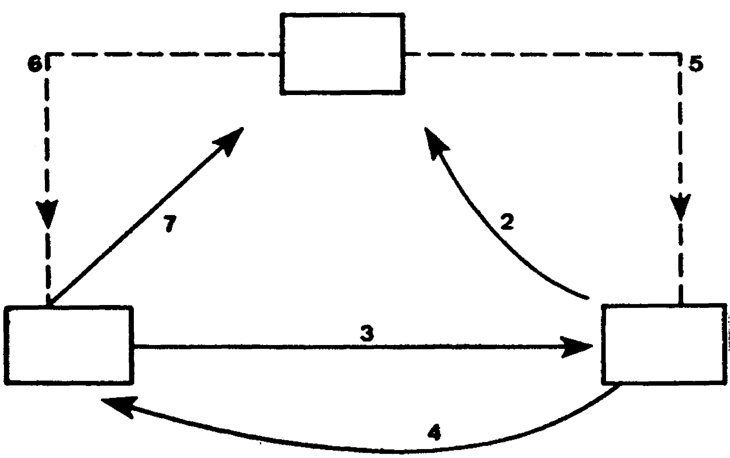

Figure 2

Les quantités sont notées sur le diagramme ; on n'oubliera pas qu'elles sont de nature variée (ce qui est symbolisé par les trois espèces de flèches).

Il s'agit d'associer à un tel schéma de circulation des biens, un autre schéma de circulation « monétaire » (ou plutôt en « valeur »).

Ce nouveau schéma a même forme mais :

1° Les flèches vont en sens contraires (le paiement est la contre-partie d'une livraison) ;

2° elles sont toutes de même nature ;

3° les valeurs numériques sont liées aux quantités par une loi de proportionnalité.

Voici donc, dans notre exemple, le schéma de la circulation des valeurs :

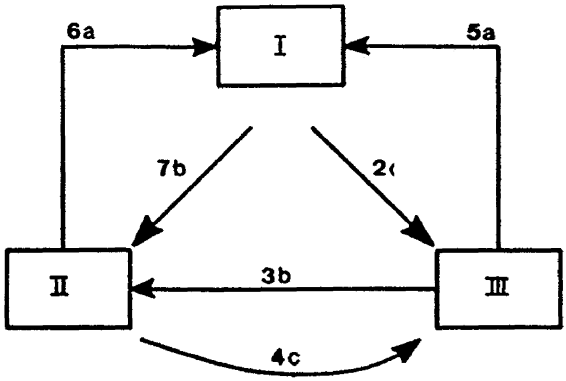

Figure 3

Une première étude a consisté à chercher quels sont les coefficients (a, b, c) — c'est-à-dire quel est le système des prix — qui assure la balance des comptes :

	Recettes		Dépenses
	—		—
I)	$6a + 5a$	$=$	$7b + 2c$
II)	$7b + 3b$	$=$	$6a + 4c$
III)	$2c + 4c$	$=$	$5a + 3b$

Mais on peut imaginer des « tâtonnements » walrasiens : on commence par choisir des prix d'achat (a_0, b_0, c_0) qui déterminent les dépenses puis, chercher quels doivent être les prix de vente (a_1, b_1, c_1) qui assureraient les recettes adéquates, et recommencer.

$$\left|\begin{aligned} 11a_1 &= 7b_0 + 2c_0 \\ 10b_1 &= 6a_0 + 4c_0 \\ 6c_1 &= 5a_0 + 3b_0 \end{aligned}\right.$$

ce qui s'écrit aussi :

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 7/11 & 2/11 \\ 6/10 & 0 & 4/10 \\ 5/6 & 3/6 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix}$$

Le problème mathématique est donc le suivant : on effectue une transformation linéaire du vecteur des prix :

$$P_1 = T(P_0)$$

Que se passe-t-il si l'on réitère la transformation, c'est-à-dire si l'on prend les prix de vente P_1 comme nouveaux prix d'achat ?

Par exemple $P_0 = (1, 1, 1)$ donnera : $P_1 = (9/11, 10/10, 8/6)$ ou bien (puisqu'il suffit de connaître les rapports de prix) $P_1 = (27, 33, 44)$ qui conduit à $P_2 = (145, 169, 195)$.

Si l'on part de $P_3 = (14, 17, 19)$, voisin de P_2, on trouve (approximativement) $P_4 = (14, 16, 20)$. Et l'on vérifie qu'on s'approche (mais asymptotiquement) de l'équilibre :

$$P_* = (12, 15, 17),$$

pour lequel on a

$$P_* = T(P_*)$$

(point fixe).

5. MODELES MARKOVIENS

Un autre modèle de circulation monétaire conduit aux mêmes problèmes, sous une forme encore plus proche des premiers modèles de A. A. Markov.

Imaginons plusieurs agents économiques qui établissent leur plan de dépense selon le revenu de la période antérieure et des proportions fixes (dites : propensions à dépenser).

Soit pour fixer les idées, trois agents et les proportions suivantes :

	de A	de B	de C
vers A	0,40	0,10	0,05
vers B	0,15	0,30	0,70
vers C	0,45	0,60	0,25

Partons des revenus :

Sujet :	A	B	C
Revenu :	100	300	200

ce qui donne les dépenses :

40	30	10
15	90	140
45	180	50

Mais chaque dépense est une recette pour le partenaire. En additionnant les lignes on trouve pour revenus de la période suivante :

A	B	C
80	245	275

qui se transforme par un calcul analogue en :

70,25	278,00	251,75

et en recommençant :

68,49	270,16	261,35

puis encore :

67,48	274,27	258,25
67,33	273,18	259,49
67,22	273,70	259,08
etc.		

En cherchant d'autre part une distribution qui serait invariante (ou « fixe ») on trouve :

67,20	273,60	259,20

Nous sommes encore en présence de même schéma : un vecteur V est transformé par un opérateur linéaire que nous noterons encore T

$$V_1 = TV_0$$

$$V_2 = TV_1$$

$$V_3 = TV_2, \text{ etc.}$$

et l'on constate :

1° il existe un vecteur fixe

$$V_* = TV_*$$

2° V_n est d'autant plus voisin de V_* que n est grand

$$\lim (V_n) = V_*$$

Il s'agit alors de savoir quels sont les caractères de l'opérateur T susceptibles d'assurer une telle convergence.

Markoff lui-même avait commencé l'étude de type algébrique. On commence par noter que l'on peut écrire :

$$V_n = T^n(V_0)$$

et l'on concentre l'attention sur la transformation composée T^n. En écrivant $T^{n+1} = T^n \cdot T$, on vérifie que les lignes de la matrice $(n+1)$ sont obtenues en calculant des *moyennes* sur les lignes de la matrice (n).

On utilise alors le lemme des moyennes itérées pour montrer que chaque ligne de T^n tend vers l'uniformité.

Lemme des moyennes : Soit un vecteur x de coordonnées x_i et une moyenne calculée avec les pondérations P_i. On écrira :

$$m(x) = \Sigma P_i x_i \qquad \text{avec} \qquad \Sigma P_i = 1$$

Prenons une autre moyenne m' avec des coefficients P'_i.

$$m(x) - m'(x) = \Sigma(P_i - P'_i)x_i$$

Or :

$$\Sigma P_i = \Sigma P'_i = 1$$

donc les $(P_i - P'_i)$ ont une somme nulle ; séparons alors les termes positifs et les négatifs :

$$m(x) - m'(x) = \Sigma a_j^+ x_j - \Sigma b_k^- x_k$$

avec :

$$\Sigma a_j^+ = \Sigma b_k^-$$

Désignons cette somme par e

$$e = \Sigma a^+ = \Sigma b^-$$

on a aussi bien :

$$e = \frac{1}{2}(\Sigma a^+ + \Sigma b^-)$$

donc :

$$e = \frac{1}{2}\Sigma\,|P_i - P'_i|$$

C'est un indicateur de l'écart entre les deux covecteurs P et P', ou, si l'on préfère, un indicateur de l'écart entre les deux opérations de moyennes m et m'.

On a donc :

$$m(x) - m'(x) = e \cdot \frac{\Sigma a^+ x}{\Sigma a^+} - \frac{\Sigma b^- x}{\Sigma b^-}$$

c'est-à-dire :

$$m - m' = e \cdot [\text{une différence entre deux moyennes}]$$

Mais si nous appelons d le diamètre de l'ensemble des x_i (c'est-à-dire la plus grande différence), toute différence de moyennes est inférieure à d, en valeur absolue.

Finalement :

$$|m - m'| \leqslant e \cdot d$$

Si maintenant, comme dans le cas markovien on prend n moyennes des coordonnées d'un même vecteur (ligne d'une matrice), et si l'on appelle d' le nouveau diamètre, on aura :

$$d' \leqslant d \cdot E$$

E étant le plus grand écart.

Dans le cas des moyennes : $E \leqslant 1$.

Si $E < 1$, on est sûr qu'en répétant l'opération, d tendra vers zéro. C.Q.F.D.

Dans l'exemple numérique cité plus haut, les pondérations sont :

P	P'	P''
0,40	0,10	0,05
0,15	0,30	0,70
0,45	0,60	0,25

l'écart entre P et P' se calcule en faisant d'abord la différence :

$$\begin{pmatrix} +30 \\ -15 \\ -15 \end{pmatrix} \qquad \text{d'où : } e_1 = 0{,}30$$

On calculera de même $e_2 = 0{,}40$, $e_3 = 0{,}55$.

Le plus grand écart $E = 0{,}55$.

On peut donc affirmer que le diamètre décroît selon la loi :

$$\mathrm{d}_{n+1} \leqslant (0{,}55)\, \mathrm{d}_n$$

c'est-à-dire

$$\mathrm{d}_n \leqslant (0{,}55)^n \cdot \mathrm{d}_0$$

ce qui est fort rapide.

6. ANALYSE SPECTRALE

La méthode précédente apparaît comme assez spéciale. Il convient d'élargir les points de vue et de rattacher l'étude de T^n à l'analyse spectrale.

L'ensemble des opérateurs à étudier :

$$(T^0 = \text{identité}, T^1 = T, T^2, T^3, \ldots, T^n, \ldots)$$

est aussi un ensemble de vecteurs ; il est naturel d'envisager l'espace engendré, c'est-à-dire toutes les combinaisons telles que :

$$a_0T^0 + a_1T^1 + a_2T^2 + \ldots + a_nT^n$$

c'est-à-dire finalement les polynômes en T.

D'autre part, on élargira la recherche en étudiant non seulement les vecteurs invariants pour T, mais tous les espaces invariants. Soit un sous-espace à 1 dimension. Dire qu'il est invariant c'est dire qu'un vecteur x de cet espace est transformé en un vecteur de même espace c'est-à-dire homothétique :

$$Tx = \lambda x$$

ou encore

$$(T^1 - \lambda T^0)x = 0$$

Soit un sous-espace invariant de dimension deux. Un vecteur quelconque x de cet espace devient $Tx = y$, mais le transformé Ty étant dans le même espace on peut écrire :

$$Ty = \lambda y + \mu x$$

en éliminant y il vient :

$$T^2x = \lambda Tx + \mu x$$

c'est-à-dire :

$$(T^2 - \lambda T - \mu T^0)x = 0$$

On généralise sans peine : à tout sous-espace de dimension d est associé un polynôme de degré d annulateur de tout vecteur de l'espace.

D'autre part la correspondance entre sous-espaces invariants et polynômes annulateurs se précise par : la relation d'inclusion entre sous-espaces se traduit par la relation de divisibilité entre polynômes.

Le polynôme correspondant à l'espace total est celui du théorème de Cayley-Hamilton parfois nommé caractéristique.

On est donc ramené à un problème d'algèbre concernant la décomposition d'un polynôme en produit. Dans le corps des complexes, la réduction est complète et chacun des facteurs

$$T - sT^0$$

donne une valeur spectrale s.

Dans le cas markovien, une valeur spectrale est égale à l'unité (on a donc des vecteurs invariants) et les autres ont un module inférieur à l'unité. Bien entendu de telles analyses peuvent être étendues à des opérateurs de dimension infinie, moyennant les conditions de compacité traditionnelles. (Voir à ce sujet : Bourbaki, *Espaces vectoriels topologiques*, appendice du chapitre 2 : Théorème de Markoff et Kakutani, fascicule XV, page 114.)

7. EQUILIBRES A LA COURNOT

En matière de théorie économique (en forme mathématique) le cadre linéaire n'est pas le mieux représenté au XIXe siècle. Bien au contraire on a introduit très tôt (sans doute le premier fut Cournot) des fonctions « quelconques » (mais bien entendu continues et dérivables, et représentables par une « courbe »). Déjà chez Cournot de nombreux équilibres sont déterminés « par l'intersection de deux courbes » ; et plus tard on usera et abusera (après Marshall) de l'intersection de l'offre et de demande.

Pendant assez longtemps (jusqu'à l'époque de C. Jordan) on se contentait d'une « évidence » visuelle. Ainsi en joignant deux points pris chacun sur deux côtés opposés d'un carré, et ce par une courbe continue, il était « clair » que cette courbe devait rencontrer la diagonale. C'était dire que l'équation $x = f(x)$ a au moins une solution quand $f(0)$ et $f(1)$ sont compris entre 0 et 1. De telles propositions sont « vraies », mais il faut les *démontrer*, pour comprendre comment elles sont vraies.

Étant donnée une application continue d'un espace E en lui-même

$$E \xrightarrow{f} E$$

à quelles conditions peut-on assurer qu'il existe au moins un point invariant ou fixe :

$$x \in E, \qquad x = f(x)$$

L'exemple précédemment donné fournit une image intuitive du cas où E est un segment réel : $(0 \leqslant x \leqslant 1)$.

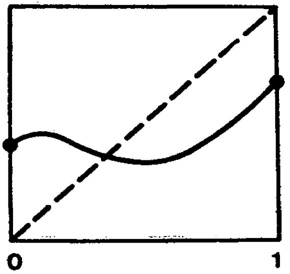

Figure 4

C'est Brouwer qui a montré qu'on peut affirmer le même résultat pour un simplexe de dimension quelconque.

Les divers problèmes évoqués précédemment sont des cas particuliers : ainsi dans un processus markovien, on a une transformation T qui transforme une distribution p $(p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1,\ p_i \geqslant 0)$ en une distribution q $(\Sigma q_i = 1,\ q_i \geqslant 0)$. C'est bien une application d'un simplexe en lui-même. Bien sûr, dans les modèles markoviens, T est linéaire : mais l'assertion de Brouwer nous indique en quelque sorte que ce n'est pas la linéarité qui importe le plus. On peut se demander à quoi bon chercher de si larges généralisations. L'important n'est-il pas de pouvoir calculer ?

C'est encore Cournot qu'il faut lire à ce sujet. Dans la préface de ses célèbres *Recherches sur les principes mathématiques de la théorie des richesses* (1838) il demande qu'on remarque « dans l'exposé des premières notions sur la concurrence et le concours des producteurs, certaines relations assez curieuses à les envisager sous le point de vue purement abstrait ». Cournot avait certainement conscience d'avoir ouvert une voie nouvelle vers une théorie générale des actions humaines conjointes (concertées, concurrentes, etc.).

Il s'agit de deux, puis d'un nombre quelconque d'agents économiques dont les buts sont donnés (chacun, *de son côté*, cherche à rendre son revenu le plus grand possible). Par exemple le marchand de cuivre fixe le prix P_1 de son cuivre, le marchand de zinc fixe le prix P_2 du zinc, il en résulte une demande de cuivre *et* de zinc de la part des fabricants de laiton, qui, compte tenu des prix offerts par les deux fournisseurs peuvent calculer leur prix de revient, prévoir leurs ventes et passer les commandes en conséquence. Ainsi les ventes du cuivre dépendent des décisions des fabricants d'alliage, lesquelles à leur tour dépendent *à la fois* des décisions concernant le cuivre et le laiton. Le bénéfice B_1 des marchands de cuivre sera fonction des deux prix :

$$B_1 = f(P_1, P_2)$$

et de même :

$$B_2 = g(P_1, P_2)$$

Chercher le maximum de B_1, en agissant seulement sur P_1, n'a de sens que si P_2 est connu. Mais inversement le calcul économique pour le zinc (maximum de B_2 en agissant sur P_2) suppose la connaissance de P_1. C'est le cercle logique typique dans les situations de ce genre : chacune des décisions dépend de l'autre. Mais c'est justement à ce point que l'analyse mathématique (celle qui n'a pas seulement pour objet le calcul numérique, précise Cournot), servira la recherche.

A chaque valeur éventuelle de P_2 correspondra, de par la finalité du premier agent, une valeur optimale de P_1 :

$$\widehat{P}_1 = \varphi(P_2)$$

et de même les intentions du second agent s'interprètent par une liaison :

$$\widehat{P}_2 = \psi(P_1)$$

D'où il suit, conclut (un peu brièvement) Cournot, que les valeurs *définitives* (c'est-à-dire d'équilibre) de P_1 et P_2 seront déterminées au moyen du système d'équations qui exprime les deux relations fonctionnelles précédentes.

En utilisant la figuration cartésienne dans laquelle toute situation possible (P_1, P_2) est figurée par un point, nous aurons deux courbes de réaction φ et ψ. Il s'agit de savoir si et comment ces deux courbes « se coupent ».

Bien entendu Cournot suppose φ et ψ continues et se contente d'une évidence pré-jordanienne. Après Cournot (citons par exemple : A. Marshall, Stackelberg) le nombre de modèles économiques dans lesquels un « équilibre » est défini par une intersection, est devenu considérable.

Mais il a fallu attendre le célèbre mémoire de VON NEUMANN (*Uber ein okonomisches gleichungsystem und eine Verallgemeinerung des Brou-*

wer'schen Fixpunktsatzes, 1935 ; trad. Italienne : *L'industria,* 1952, n° 1, pp. 1-28) pour songer à établir avec toute la rigueur topologique souhaitable l'existence de tels équilibres.

A quoi bon l'existence dira-t-on si l'on n'a point d'algorithme ? C'est que dans la pensée de Cournot, comme de ses continuateurs, l'analyse purement « qualitative » joue un rôle fondamental dans la théorie des phénomènes sociaux.

Une classification des jeux par exemple selon l'existence ou non de l'équilibre est essentielle (voir *Stratégies et décisions économiques,* Paris, C.N.R.S., 1954, pp. III-14 et suivantes).

8. TOPOLOGIE DES POINTS FIXES

1. Commençons par un cas fort simple : application d'un segment en lui-même.

Soit une fonction $y = f(x)$ qui applique le segment fermé :

$$[0 \leqslant x \leqslant 1]$$

en lui même.

L'intuition (graphique) conduit sans peine à distinguer trois classes de valeurs pour x :

1) tous les x tels que $0 < x < f(x)$ (ainsi que $x = 0$, si $f(0) > 0$) ;

2) $x < f(x) < 1$ (ainsi que $x = 1$, si $f(1) < 1$) ;

3) $x = f(x)$; c'est-à-dire les points fixes ;

il s'agit de montrer que si la classe (3) est vide, alors f ne peut être continue.

Cette classification est en effet équivalente à une application de : « l'ensemble $0 \leqslant x \leqslant 1$ *sauf* les points fixes » dans l'ensemble constitué par les deux points 0 et 1. Appelons ce dernier ensemble : le *bord B* du segment E. Nous avons donc une classification K :

$$E^* \xrightarrow{\quad K \quad} B$$

$$E^* = E - \{\text{ fixes }\}$$

Supposons un instant qu'il n'y ait pas de points fixes, alors :

$$K : E \rightarrow B$$

Or il est facile de voir que si f est continue, la fonction K l'est aussi. Mais il est impossible de trouver une fonction continue définie sur E tout entier et qui ne prenne que deux valeurs. Donc E^* n'est pas E, c'est-à-dire que l'ensemble de points fixes n'est pas vide.

On pourrait donner une illustration géométrique de cette méthode de démonstration. Mais il faut bien comprendre qu'une telle figuration deviendra impossible pour les généralisations ultérieures. Voici cette illustration cependant :

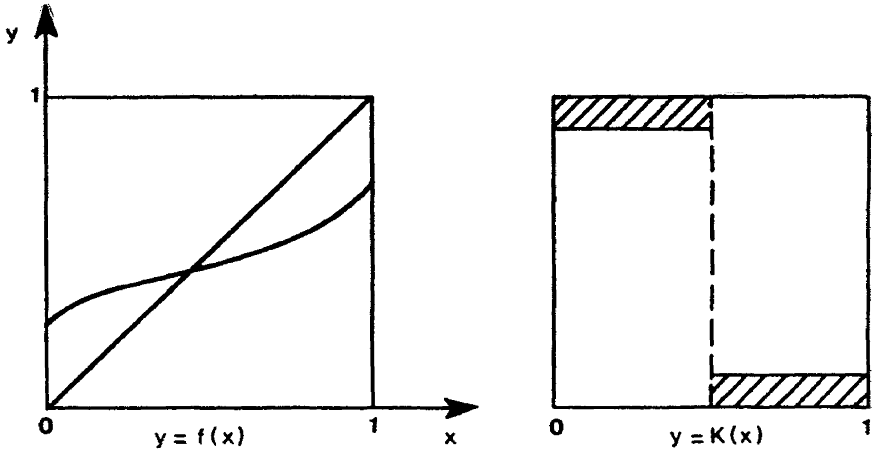

Figure 5

On classe les points x selon que la courbe $f(x)$ est au-dessus ou bien au-dessous de la diagonale. On remplace donc f par K qui est une fonction étagée, à deux valeurs ; et la discontinuité est alors visiblement nécessaire.

2. Passons au cas de deux dimensions et prenons un fragment E du plan $R \times R$. Ce pourra être un disque, un carré, un simplexe, etc...

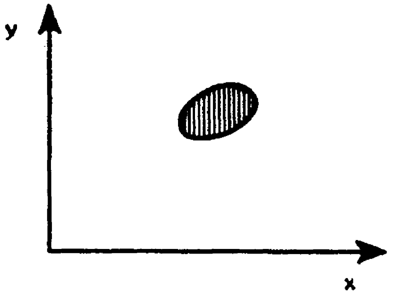

Figure 6

L'important est l'existence, ici encore, d'un *Bord*, qu'on nommera B.

Si l'on a une fonction f :

$$E \xrightarrow{f} E$$

qui à tout $x \in E$ fait correspondre $f(x) \in E$, on peut ici encore construire une « classification » K qui rattache chaque point x de E à un point $K(x)$ du bord.

Par exemple dans un espace affine, on cherche le point $K(x)$ du bord tel que x est situé *entre* $K(x)$ et $f(x)$. C'est déjà ce que nous avons fait pour le cas où E était un segment et B l'ensemble de ses deux points extrêmes. Dans le cas affine, la convexité de E, par exemple assurera l'unicité de $K(x)$. Dans d'autres cas, on pourra trouver d'autres façons de faire.

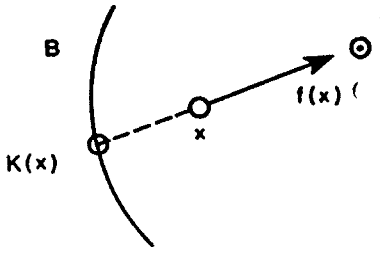

Figure 7

Il n'est pas inutile de noter que la fonction $K(x)$ n'est pas seulement un artifice logique : dans de nombreuses applications, où la fonction f possède une signification concrète, la fonction K elle-même voudra dire quelque chose : c'est en somme un indicateur de la *Tendance* ou la *Direction* qui oriente le mouvement de x vers $f(x)$. Dans le cas du segment il n'y avait que deux sortes de déplacement (gauche ou droite). Ici il y en a une infinité. En empruntant à la topographie, on pourrait dire : le gisement, l'azimut, le cap, etc.

On notera que pour les points fixes, x et $f(x)$ étant confondus, le cap K n'est plus défini. Ainsi la fonction K déduite de f, n'est définie que sur : E^* = l'espace E, *sauf* les points fixes, s'il y en a.

3. On comprend sans peine que la construction de l'application K peut être étendue à un nombre quelconque de dimensions. A titre d'exercice, signalons le cas d'un simplexe :

$$x = (x_1 x_2 \dots x_n) \quad , \quad \Sigma x_i = 1 \quad , \quad x_i \geqslant 0$$

et une fonction linéaire : $y = Fx$, (F = matrice, telle que celles qu'on a vu dans nos premiers exemples, paragraphe 5 ci-dessus).

Le bord d'un simplexe est constitué par les points $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ qui ont au moins une coordonnée nulle. Étant donné deux points, x et Fx, on peut calculer un point Kx du bord tel que x soit une moyenne (donc intermédiaire) entre Fx et Kx. On pourra examiner d'une façon analogue le cas d'une boule, soit $\Sigma x^2 = 1$, soit $\Sigma\, |x| = 1$, etc.

4. A toute fonction continue f qui applique l'espace E dans lui-même, on fait donc correspondre, comme il vient d'être dit une application, continue elle aussi K, de E^* dans le bord B.

Il s'agit de montrer que E^* est nécessairement distinct de E (c'est-à-dire qu'il y a des points fixes).

Pour cela on va montrer qu'il n'existe pas d'application

$$K : E \to B$$

satisfaisant aux conditions requises. Ces conditions sont : 1° la continuité, 2° si le point x est pris sur le bord B, lequel est une partie de E, alors K le laisse immobile.

On a déjà compris ce qui se passe pour un E de dimension un : on ne peut appliquer un segment sur son bord, formé de deux points, sans quelque déchirure. Peut-être imaginera-t-on aussi facilement cette impossibilité dans le cas d'un disque : il n'existe pas, sauf à faire un trou, de « rétraction » du disque sur son bord.

Pour étayer ces intuitions plus ou moins naïves par de véritables démonstrations, il faut quelques échaufaudages logico-algébriques. En voici une esquisse.

5. L'application $K : E \rightarrow B$ est continue, comme toutes celles dont on aura l'occasion de parler dans le paragraphe. Mais de plus, l'effet de K sur le bord B est connu : les points du bord restent immobiles. Ou comme on dit encore : la restriction de K à la partie B de E n'est autre que l'identité.

Une façon plus commode (plus algébrique) de l'exprimer sera de considérer la fonction d'inclusion

$$i : B \longrightarrow E$$

qui à tout point x du bord fait correspondre le point y de E qui est confondu avec x (c'est une technique qui apparaît peut-être comme artificielle mais que la pratique rendra vite familière : considérer comme deux objets distincts le même point selon qu'il appartient à un ensemble E ou à une partie B).

Alors notre condition se traduira par

$$B \xrightarrow{i} E \xrightarrow{K} B = B \xrightarrow{Id.} B \qquad (1)$$

($Id.$ étant l'application identique).

On écrit aussi, plus brièvement :

$$K_0 i = Id. \qquad (1\ bis)$$

En second lieu, l'impossibilité d'une rétraction (application continue conservant le bord) est liée à la structure topologique (la connexité de l'espace E : le problème ne serait évidemment pas le même pour un disque ou pour un anneau, etc. Or c'est une idée qui remonte au moins à l'Analysis Situs de Poincaré que de détecter la structure de E en y cheminant de toutes les façons possibles, et en particulier en examinant l'ensemble des circuits (courbes fermées) qu'on peut tracer dans E ; par exemple l'intuition saisit immédiatement la différence entre un disque plein et un disque percé d'un trou : dans le cas plein tous les circuits se laissent déformer les uns dans les autres, mais s'il y a un trou, ils se répartissent en classes selon le nombre de tours autour du trou, etc. Or un circuit dans un disque n'est autre chose que l'image du bord : on va donc examiner l'ensemble des fonctions continues : $C : B \to E$. Cela revient à replacer la condition (1) dans le cadre plus général :

$$B \xrightarrow{C} E \xrightarrow{K} B = B \xrightarrow{T} B \qquad (2)$$

$$T = K \cdot C \qquad (2\ bis)$$

C est un « circuit » et la composée de C et K, soit T est une « circulation sur le bord ».

Si nous appelons γ l'ensemble des C et θ l'ensemble des T nous avons :

$$\theta \xrightarrow{i} \gamma \xrightarrow{k} \theta = \theta \xrightarrow{Id} \theta \qquad (3)$$

où i désigne l'inclusion (car θ est une partie de γ, toute circulation au bord est un cas particulier de circuit) k désigne la correspondance définie par K : par k tout circuit est « projeté » sur le bord. Enfin Id. est l'identité. Et (3) est une simple traduction de (1).

Les choses semblent se compliquer : elles vont maintenant se simplifier. Car l'ensemble γ de tous les circuits (c'est-à-dire l'ensemble des C : $B \to E$) est peu maniable. Il est préférable d'en faire une classification (passer au quotient, comme on dit, en y instaurant une relation d'équivalence). Il s'agit de l'homotopie, qui traduit l'idée naïve de déformation continue.

Deux fonctions $C_0 : B \to E$ et $C_1 : B \to E$ seront homotopes (les deux circuits appartiennent à la même classe) si l'on peut « passer de l'un à l'autre » c'est-à-dire interpoler par : $C_t : B \to E$, t variant de 0 à 1. Et la correspondance étant, bien entendu continue.

On notera $\pi(B \to B)$ ou $\pi(\theta)$ et $\pi(B \to E)$ ou $\pi(\gamma)$ les ensembles des classes ainsi définis. On remarquera qu'il est possible de donner à π une structure de groupe (en définissant l'addition de deux classes de circuits). Par exemple $\pi(B \to E)$ pour un disque est réduit à un seul élément (le neutre) tandis que $\pi(B \to E^*)$ avec un trou, est le groupe Z des entiers, et Z^n s'il y a n trous.

Quant à $\pi(B \to B)$ c'est le groupe Z des entiers (nombre de tours complets effectués sur le bord).

Voici alors l'avant-dernière étape : la relation (3) a pour conséquence

$$\pi(\theta) \xrightarrow{i} \pi(\gamma) \xrightarrow{k} \pi(\theta) = (\theta) \xrightarrow{Id} (\theta) \qquad (4)$$

où i et Id ont toujours la même signification, et où k^* est une application respectueuse de la structure, qui est devenue algébrique : partant des applications continues on arrive aux homomorphismes.

Or (4) est facile à traduire : elle dit que $\pi(B \to B)$ ou $\pi(\theta)$, est un sous-groupe de $\pi(\gamma)$.

Il reste alors à examiner si, pour l'espace E, le groupe $\pi(\theta)$ des circulations au bord est susceptible d'être sous-groupe du groupe $\pi(\gamma)$ des circuits. Dans le cas du disque le premier est Z et le second est réduit à son élément neutre : c'est impossible. On se donnera le plaisir de vérifier l'impossibilité pour une boule.

Et l'on se reportera à quelque bon manuel de topologie algébrique (1).

9. CATEGORIES ORDINALES

En ce qui concerne la théorie générale du calcul économique (et des équilibres), on doit à Cournot une première libération : l'idée de fonction quelconque (dont le statut mathématique n'a été défini qu'au début du XIXe siècle) permet de se libérer de l'étude du calcul numérique : et Cournot lui-même souligne l'importance de cette libération. Toutefois, comme il était normal, les fonctions employées sont encore des applications de l'ensemble $\mathbf{R}$ des nombres réels (ou bien de $\mathbf{R}^n$) en lui-même. L'écriture $y = f(x)$ signifie (sans qu'on le dise toujours) ce que nous écririons aujourd'hui :

$$\mathbf{R} \xrightarrow{f} \mathbf{R}$$

Avec Pareto commence une seconde libération. Pareto en effet s'intéresse non seulement à l'action des hommes, mais au moteur de cette action, à savoir leurs intérêts, leurs « préférences ». Et la notion de préférence renvoie à la notion mathématique d'ordre (ou plus précisément de *préordre*).

L'utilité s'est spontanément présentée sous forme numérique ; soit que, avec Daniel Bernoulli on s'occupe de la décision qui est commandée par un calcul monétaire ; soit que, avec Bentham, on justifie les analogies d'un calcul monétaire et de cette maturation de la décision qu'on appelle encore « calcul » par le fait qu'il s'agit de comparer ce qui est susceptible de « plus » et de « moins ». De même encore pour Dupuit, ou Gossen, ou Walras.

Mais Pareto a bien vu qu'un mouvement de repli était possible, qu'il suffisait, revenant à une position aristotelicienne, d'apercevoir une forme commune à toutes les délibérations d'un agent, et que cette forme commune était la *préférence* (mettre ceci *avant* cela) : tout intérêt (individuel ou autre) sera donc censé être représenté par un système *cohérent* de relations (binaires) de préférence. La cohérence requise étant celle d'une ordination (qui organise le superlatif à partir du comparatif) c'est-à-dire pour le logicien, une *transitivité*. Ainsi la notion d'ordre fournit une image mathématique de l'intérêt, moteur de tout choix ; si l'on appelle ordre toute relation binaire transitive.

Mais la notion d'ordre n'implique pas celle de nombre. C'est le contraire : les divers ensembles numériques, produits par l'activité mathématicienne (naturels, entiers, rationnels, réels) sont ordonnés, mais possèdent en plus des structures algébriques particulières (groupe abé-

(1) Voir par exemple : M. GREENBERG, *Lectures an algebraic topology*, Benjamin inc., New York, 1967, p. 16 et p. 62.

lien, anneau, corps). On peut donc souhaiter une description des phénomènes indépendante de toute représentation numérique. Pareto n'y a jamais réussi complètement (comparer le « Manuale » et le « Corso » avec l'article de l'« Encyclopédie mathématique », pour saisir le développement de la pensée parétienne).

Aujourd'hui la chose est devenue beaucoup plus claire. On part de l'ordre total : s'il n'est pas strict (alors, avec Bourbaki, on le nommera pré-ordre) on peut définir des classes d'équivalence (ou d'indifférence) qui, elles, sont totalement et strictement ordonnés. C'est-à-dire constituent ce qu'on peut appeler une *échelle.* Mais on sait bien, depuis Cantor, qu'il existe une grande diversité des échelles. Rappelons sommairement quelques notions essentielles.

L'échelle la plus simple est constituée par une échelle finie qui « range des objets dans un certain ordre » :

$$a < b < c < \dots < z$$

Il y a des « intervalles » ouverts et vides : rien entre a et b. C'est le caractère « discret » de l'ordre. Il existe des échelles infinies discrètes : leur prototype est celle que Cantor nomme ζ (initiale de Zahlen) parce qu'elle est représentée par le système des entiers :

$$\dots < -2 < -1 < 0 < +1 < +2 < \dots$$

Les problèmes concernant le superlatif et le comparatif sont d'une grande simplicité avec de telles échelles : il n'y a presque rien à en dire qui dépasse l'intuition et le sens communs. Mais, dans bien des cas, s'impose la nécessité d'interpoler, d'avoir des nuances. On considérera donc des échelles possédant la propriété contraire de celle d'être « discrètes » (« dichte » disait Cantor ; en français on pourrait parler d'un ordre « dru », « fitto » en italien) : entre deux éléments quelconques il en existe toujours un troisième distinct de ces deux-là. Si $a < b$, l'intervalle ouvert c'est-à-dire l'ensemble $\{x \mid a < x < b\}$ n'est jamais vide.

Il est possible de construire une échelle d'ordre possédant cette propriété en utilisant une écriture de type numérique, c'est-à-dire un alphabet fini et par conséquent un ensemble dénombrable. Cantor a même démontré l'unicité de la solution, qui n'est autre que le type d'ordre η que possède l'échelle des nombres rationnels.

Mais cet ordre possède aussi une curieuse propriété, parfois gênante dans les applications (chaque fois qu'il faut faire des approximations), et qu'on peut nommer selon la topologie (tout ordre total induit une topologie construite à partir des intervalles ouverts) : on peut dire que l'échelle des rationnels n'est pas *compacte.* Cela signifie qu'il existe des sections qui ne sont pas des *intervalles* : traditionnellement on donnera l'exemple des rationnels dont le carré est inférieur à 2 ; non seulement aucun de ces nombres n'est supérieur à tous les autres ; mais dans l'ensemble complémentaire aucun n'est inférieur à tous les autres.

En d'autres termes, le *superlatif* ne fonctionne plus du tout comme dans les échelles finies.

Il existe par contre (mais non plus dénombrables) des échelles qui sont compactes ; alors pour toute partie d'un tel ensemble, il existe un supremum (le plus petit majorant) et un infimum. Un segment réel est une telle échelle ; mais il y en a d'autres. Et l'on devra choisir, en connaissance de cause, le type d'ordre dont on pense qu'il est un modèle correct (ou le moins mauvais possible) des préférences considérées.

Chez Pareto, Edgeworth et plusieurs émules, ces exigences axiomatiques sont absentes : et le modèle des nombres réels semble s'imposer comme une loi de nature.

10. EQUILIBRES A LA PARETO

Revenons à l'idée d'équilibre chez Pareto : c'est essentiellement une confrontation de deux ou plusieurs ordres de préférence. Le prototype semble bien avoir été l'équilibre du consommateur.

L'état du consommateur étant le plus souvent figuré par un vecteur $x = (x_1 x_2 \dots x_n)$ dans un espace convenablement choisi, la délibération du sujet porte sur deux aspects des choses :

1° les coûts : c'est d'abord un calcul linéaire qui s'écrit

$$p(x) = \Sigma p_i x_i$$

d'où résulte un ordre : $p(x) < p(y)$, qu'on lit : x est moins cher que y ;

2° les goûts : ici au contraire c'est un ordre qui est donné d'abord (et la question se pose de savoir si, et comment, on peut le ramener à un calcul).

On dit x est plus agréable (ou utile) que y et on écrira : (utilité ou ophélimité)

$$u(x) > u(y)$$

Dans un cas fini et discret le problème est simple ; soient quatre états a, b, c, d que le consommateur considère possibles et qu'il veut comparer. Supposons que les goûts soient :

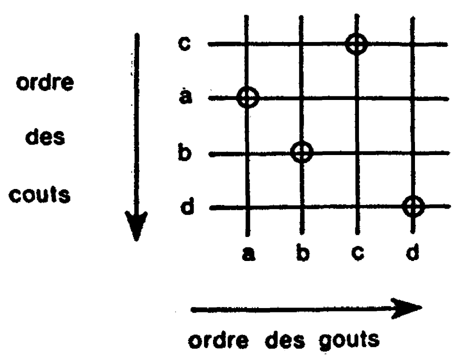

Figure 8

a moins utile que b qui est moins utile que c ; lui-même enfin moins utile que d ;

utilités : $a < b < c < d$

et les coûts :

c moins cher que ***a***, moins que ***b***, moins que ***d*** ;

coûts : $c < a < b < d$.

Alors la comparaison se fait par le produit logique des deux ordres de préférence.

Il est clair qu'on obtient un ordre partiel :

c est plus utile et moins cher que ***a***, donc préférable à tous points de vue ;

ordre des coûts ordre des goûts

par contre pour comparer ***c*** à ***d*** :

c est moins cher que ***d*** mais moins utile ;

il faudra un arbitrage.

On sait que dans le schéma paretien, une limitation supérieure des coûts est donnée (sous forme de revenu disponible) et le problème est alors de trouver l'optimum (selon l'utilité) lorsque le coût est fixé. On connaît aussi la forme traditionnelle des variétés d'indifférence et des variétés linéaires de dépense, symbolisées par la figure classique :

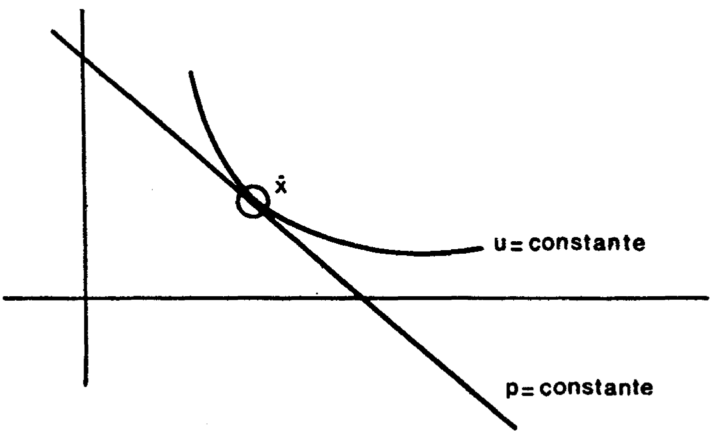

Figure 9

Il est alors intéressant de se demander quelles sont les hypothèses introduites (parfois, chez les anciens auteurs, implicitement) pour assurer la régularité des conclusions dont on aura besoin.

(Renvoyons par exemple à Debreu, *Théorie de la valeur*, Paris, Dunod, 1966, pp. 59 et suiv.)

Un seul exercice :

assurer l'optimum à coût constant, c'est trouver un équilibre tel que :

(1) pas plus cher que $\hat{x} \Rightarrow$ pas plus utile que $\hat{x}$

c'est-à-dire $p(x) \leqslant p(\hat{x}) \Rightarrow u(x) \leqslant u(\hat{x})$

Mais il est intéressant de se demander alors si l'on obtient le même résultat (dualité) en cherchant l'optimum (moindre coût) à l'utilité donnée. C'est-à-dire savoir si l'on a :

(2) pas moins utile $\Rightarrow$ pas moins cher

c'est-à-dire : $u(x') \geqslant u(\hat{x}) \Rightarrow p(x') \geqslant p(\hat{x})$

Il est facile de voir que (1) et (2) ne sont pas équivalents en général. Parmi les hypothèses qui assurent que l'on a : (1) $\Rightarrow$ (2), on retient tout spécialement celle de continuité :

L'espace est topologisé et l'on pose que : au voisinage de x il existe toujours des y qui sont plus utiles (et aussi des y qui sont moins chers : mais cela est assuré par la linéarité) ; (voir Debreu, *loc. cit.*).

La confrontation d'ordres de préférence provenant de points de vue différents, va servir à Pareto dans sa construction d'un équilibre social.

Commençons par un schéma, plus proche d'Edgworth que de Pareto, mais en fait universel. C'est le problème du partage.

Deux biens, deux individus.

Un programme de partage c'est un ensemble de quatre nombres positifs :

$$x_1 + x_2 = \text{donné}$$
$$y_1 + y_2 = \text{donné}$$

qui disent les parts respectives de Primus (1) et Secundus (2) dans le bien X et les parts en Y. On peut figurer par un point dans un rectangle (plus généralement ce serait un produit cartésien de simplexes).

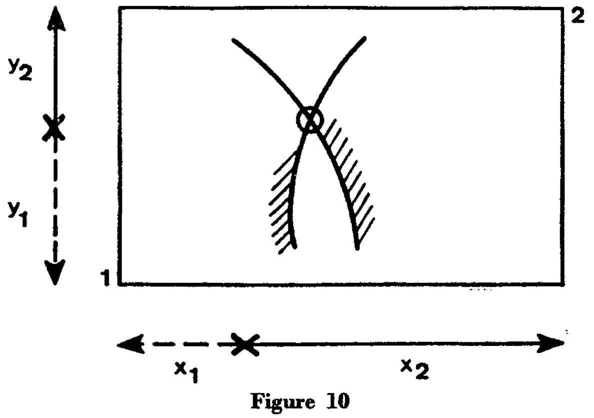

Figure 10

Étant donné un point quelconque (x_1, x_2, y_1, y_2) il faut le comparer à *tous* les autres du domaine, et en particulier rechercher s'il n'existe pas un autre partage qui serait préféré à celui-là à la fois par les deux partenaires.

Seuls seront déclarés « admissibles » ceux pour lesquels il est impossible de trouver une modification avantageuse à la fois pour les deux. Ce sont les « équilibres » au sens de Pareto.

Edgeworth les construisait comme l'ensemble des points de *contact* de deux lignes d'indifférence,

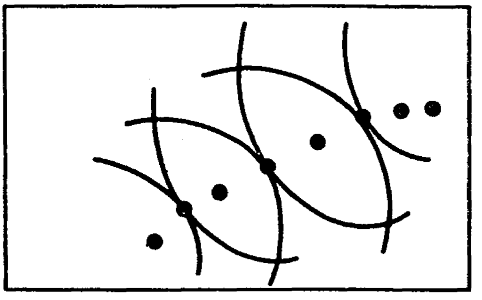

Figure 11

et cet ensemble est la *Contract Curve* de notre auteur. Bien entendu pour affirmer que c'est une « courbe », il faudra quelques hypothèses sur les lignes d'indifférence.

Notons un cas singulier dans lequel les indifférences seraient des variétés linéaires, c'est-à-dire que les utilisés seraient calculées par :

$$u(x) = u_1x_1 + u_2x_2$$

(pour chacun des partenaires, mais avec des coefficients différents pour l'un et l'autre).

Alors il est immédiat, c'est le rudiment de la programmation linéaire, de prouver que les points admissibles se trouvent sur la frontière du domaine :

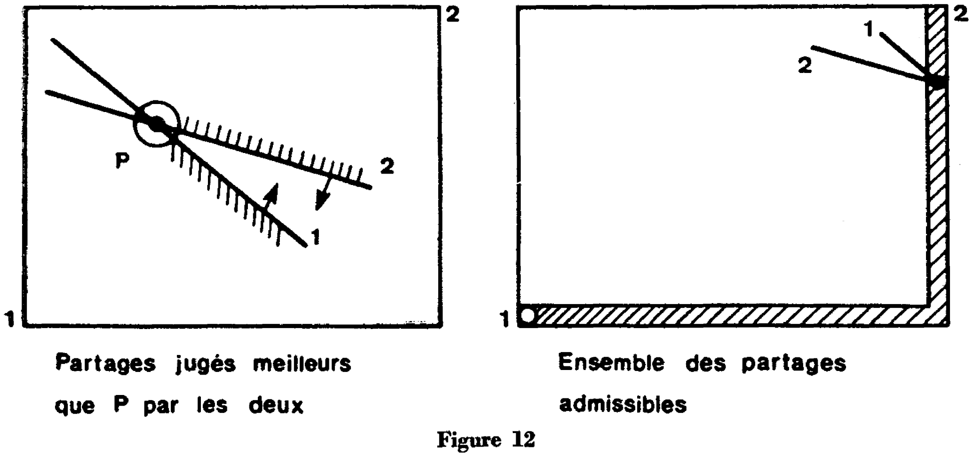

Figure 12

Ce modèle a été utilisé par Ricardo dans sa célèbre théorie du commerce international : les seules situations admissibles conduisent à la spécialisation (au moins l'une des deux quantités x_i, y_i est nulle).

11. LA CONTESTATION

Cette propriété à laquelle Pareto attache tant d'importance, nous pourrons la qualifier d'optimum paretien, tout en notant que l'unicité d'un tel point n'est pas la règle, bien au contraire. Ainsi dans le problème de partage, selon Edgeworth, c'est tout un ensemble, formant l'ensemble (courbe) des contrats qu'on peut raisonnablement débattre.

Mais on devra souvent introduire quelques conditions supplémentaires que nous rangerons sous le vocable de *Contestation.* Ainsi dans le partage, s'il y a une situation initiale : Primus « possède » :

$$x_1 = a \qquad y_1 = 0$$

et Secundus possède :

$$y_1 = 0 \qquad y_2 = b$$

Alors on accordera à chacun d'eux le droit de contester toute proposition qui n'améliore pas son état initial.

Sera dans ce cas admissible seulement la partie PQ de la courbe des contrats située entre les deux indifférences passant par la situation initiale (fig. 13).

Mais il reste encore une indétermination dont la discussion, interminable, a constitué ce qu'on appelait naguère la théorie du monopole bilatéral — théorie oubliée, non sans raisons.

Von Neumann et Morgenstern ont proposé dans leur *Theory of Games*, un mode de contestation assez particulier, en introduisant de surcroît l'idée féconde de coalition.

La forme générale en est la suivante. [Je me permets de renvoyer, pour quelques détails à : *Éléments de théorie mathématique des jeux*, Paris, Dunod (monographie AFIRO), 1968].

Pour préférer une situation A à une situation B, un certain nombre d'agents économiques peuvent être d'accord : chacun trouve quelque avantage à passer de B en A.

Selon Pareto doivent seulement être prises en compte les préférences unanimes. Mais en fait, on sait bien que dans une *société*, les choses ne se passent pas toujours ainsi, et que les *pouvoirs de contestation* ne sont pas uniformément répartis.

Soient alors un ensemble N d'individus (en nombre n), et une partie K de cet ensemble :

$$K \subset N$$

nous appellerons K une coalition.

Pour Pareto la seule coalition intéressante est $K = N$. Edgeworth ajoute qu'il faut tenir compte, en sus, des opinions individuelles (c'est-à-dire des « coalitions », si l'on peut dire, formées d'un seul individu) mais jusqu'à un certain point seulement : un individu ne peut imposer sa préférence de A à B que si B est inférieure à sa situation initiale.

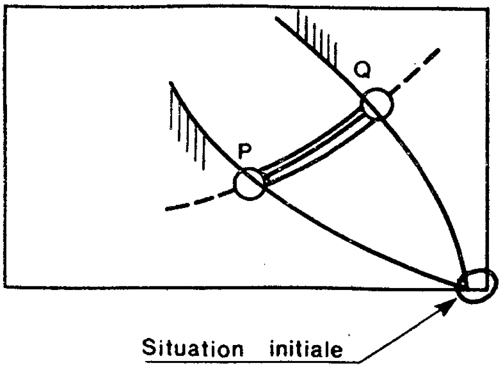

Figure 13

Von Neumann et Morgenstern généraliseront cette idée en introduisant les préférences *efficaces*.

Une préférence unanime (coalition N) est toujours prise en compte. Mais les préférences d'une coalition K « A est préféré par K à B » peuvent l'être aussi certaines conditions : cette préférence est efficace si B appartient à un domaine donné (dépendant de K).

Les auteurs cités n'ont étudié les conséquences de cette idée que dans le cas du partage d'une somme d'argent (jeux). Et l'on constate, en ce cas, la diversité considérable des équilibres. Au point qu'on a désespéré depuis de donner des conclusions générales assez précises. Mais on peut prendre le problème d'une façon légèrement différente et aboutir au moins à une conclusion intéressante.

Représentons les situations initiales de n agents économiques par n vecteurs choisis dans un espace convenable.

Soient $\vec{a}_1 \vec{a}_2 \dots \vec{a}_n$ ces situations initiales.

Proposons une redistribution définie elle aussi par n vecteurs :

$$\vec{x}_1 \vec{x}_2 \dots \vec{x}_n$$

Une telle redistribution est *possible* (en anglais : *feasible*) sans apport extérieur, et par simple échange si :

$$\Sigma x_i = \Sigma a_i \qquad (1)$$

Peut-elle être contestée ?

1° Soit un sous-ensemble d'individus, que nous appellerons coalition K.

$$K \subset \{ 1, 2, \dots, n \}$$

Supposons qu'ils puissent se mettre d'accord pour présenter un contre-projet de partage : une suite de vecteurs y_i, telle que chacun d'eux préfère y_i à x_i $(i \in K)$ et telle aussi que :

$$\sum_{i \in K} y_i = \sum_{i \in K} a_i$$

c'est-à-dire que la modification soit réalisable par la coalition K toute seule (sans faire appel aux autres individus).

Alors nous pouvons, c'est notre postulat, ou si l'on préfère une définition de l'efficacité, déclarer que nous avons une contestation efficace du projet (x) par la coalition K.

Il suffit de traiter quelques exemples simples pour voir que l'ensemble des projets incontestables peut être fort compliqué à calculer, quand il existe. Mais on va faire un pas de plus.

2° Il n'est pas déraisonnable de contester un projet, non seulement par la critique de ce qu'il réaliserait, mais encore par les principes qu'il suppose. Un individu, par exemple, peut plaider sa cause d'abord en s'associant avec ceux dont la situation est voisine de la sienne, mais aussi bien en élevant son cas particulier au niveau d'une règle générale. Il dira par exemple : si je n'étais pas seul dans la situation où je suis (ou bien si nous n'étions pas si peu nombreux) nous pourrions faire entendre notre point de vue.

Essayons de traduire cela en termes mathématiques.

Prenons une coalition K et imaginons une coalition hypothétique K^* formée d'un nombre quelconque de répliques de chacun des membres. Soit une situation y jugée par chacun des membres de K meilleure que la situation x. Nous admettrons la contestation si l'on a :

$$\sum_{i \in K} n_i \vec{y}_i = \sum_{i \in K} n_i \vec{a}_i$$

quels que soient les entiers positifs n_i.

On peut écrire la même chose en parlant de moyennes pondérées :

$$\frac{\Sigma ny}{\Sigma n} = \frac{\Sigma na}{\Sigma n}$$

Qu'arrive-t-il alors pour un projet *incontestable* c'est-à-dire qui ne peut être efficacement contesté par aucune coalition ?

Pour pouvoir répondre il faudra faire encore quelques hypothèses supplémentaires.

Ici se présente assez naturellement celle-ci :

L'ensemble des $\vec{y}_i$ préférés à $\vec{x}_i$ est un ensemble *convexe*. On y adjoindra la continuité des préférences (voir ci-dessus).

Si l'on considère alors divers domaines :

$\vec{y}_i$ préféré (par i) à $\vec{x}_i$

aucune moyenne de plusieurs $\vec{y}_i$ ne peut être égale à la moyenne correspondante des $\vec{a}_i$ (sinon il y aurait contestation efficace de x). Il en résulte alors une séparation entre la situation initiale (les $\vec{a}_i$) et la fermeture convexe des partages préférés (les $\vec{y}_i$) c'est-à-dire un opérateur linéaire p tel que :

$$y_i \text{ préféré à } x_i \Rightarrow p(y_i) \geqslant p(a_i)$$

On en déduit $p(x_i) \geqslant p(a_i)$ et comme $\Sigma x_i = \Sigma a_i$, on a même

$$p(x_i) = p(a_i)$$

On retrouve un équilibre par un système de prix.

Inversement on peut montrer qu'un équilibre par les prix, c'est-à-dire un choix, pour chaque individu i, effectué à la manière du consommateur paretien d'une situation nouvelle $\hat{x}_i$ la meilleure parmi celles qui vérifient

$$p(x_i) = p(a_i)$$

un tel équilibre est incontestable.

En effet tout ce qui est plus utile (préférable) est trop cher :

$$y_i \text{ préféré par } i \text{ à } x_i \Rightarrow p(y_i) > p(x_i) = p(a_i)$$

Donc :

$$\Sigma p(y_i) \geqslant \Sigma p(a_i)$$

ou bien :

$$p(\Sigma y_i) \geqslant p(\Sigma a_i)$$

(linéarité)

et il est impossible d'avoir la condition :

$$\Sigma y_i = \Sigma a_i$$

qui permettrait la contestation.

On peut compliquer le modèle sans difficulté (voir Debreu, *Intern. Éco. Rev.*, sept. 1963, p. 235) en introduisant ce que la théorie appellera des producteurs. Mais il convient surtout de réfléchir à la signification du raisonnement.

On retrouve l'équilibre par les prix, chaque fois que l'on peut ériger en règle générale une situation particulière. C'est le sens même du calcul linéaire : fixer le prix d'une transaction, ce n'est pas seulement dire que tant de tonnes de blé seront échangées contre tant de monnaie, c'est donner en même temps tout un ensemble de transactions proportionnelles entre une quantité q et une somme pq (q varie, p reste fixe).

Bien entendu cela n'épuise pas la question. La contestation envisagée s'appuie sur la situation initiale, considérée comme une sorte de « droit de propriété », elle est donc très conservatrice. A l'égal du schéma paretien qui rejette à plus tard le problème de la répartition du revenu. Et comme on ne le sait que trop, cela ne résout rien de faire du travail une marchandise « comme les autres ».

Mais, comme on dit, c'est là une autre histoire.