Recherche Coopérative sur Programme nº 25

Gilles Lebeau

Diffusion pour l'équation des ondes dans un domaine extérieur

Les rencontres physiciens-mathématiciens de Strasbourg - RCP25, 1983, tome 33
« Conférences de : M. Nagasawa, J.-E. Bjork, J. Ecalle, K. Gawedzki, G. Lebeau, A. Martin », , exp. nº 5, p. 103-116

<http://www.numdam.org/item?id=RCP25_1983__33__103_0>

© Université Louis Pasteur (Strasbourg), 1983, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Recherche Coopérative sur Programme nº 25 » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

DIFFUSION POUR L'EQUATION DES ONDES DANS UN DOMAINE EXTERIEUR

Gilles LEBEAU

1. Introduction.

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ($n \geq 3$ impair) une sous variété à bord, connexe, non bornée, de bord $\partial\Omega$ analytique compact. Dans $\mathbb{R}_t \times \Omega$ on considère le problème mixte pour l'équation des ondes :

$$(1)\qquad \begin{aligned} &(\partial_t^2 - \Delta_x)u(t,x) = 0 \quad \text{dans} \quad \mathbb{R}_t \times \Omega_x \\ &u(t,x) = 0 \qquad\qquad \text{dans} \quad \mathbb{R}_t \times \partial\Omega_x \\ &u(0,x) = u_0(x) \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = u_1(x) \ . \end{aligned}$$

On note $\underline{u}(t)$ les données de Cauchy à l'instant t :

$$\underline{u}(t) = \left(u(t,x)\ , \frac{\partial u}{\partial t}(t,x)\right) = (u_0(t), u_1(t))$$

et $H(\Omega) = \overset{\circ}{H}_1(\Omega) \oplus L^2(\Omega)$ l'espace de Hilbert fermeture de $C_0^\infty(\Omega) \times C_0^\infty(\Omega)$ pour la norme énergie :

$$(2)\qquad |(u_0,u_1)|_E^\Omega = \left[\int_\Omega \left(|\nabla_x u_0|^2 + |u_1|^2\right)\right]^{\frac{1}{2}} .$$

Si $\underline{u}(0) \in H(\Omega)$ la solution de (1) est unique, $\underline{u}(t) \in H(\Omega)$ pour tout t et on a

$$\underline{u}(t) = U(t)\underline{u}(0)$$

où $U(t)$ est le groupe unitaire e^{tA}, avec

$$A = \begin{pmatrix} 0 & I \\ \Delta & 0 \end{pmatrix} \qquad (A^* = -A) \ .$$

Pour étudier le comportement des solutions de (1) Lax-Phillips [8] introduisent les sous espaces de $H(\Omega)$ suivant : Soit $\rho > 0$ tel que le bord $\partial\Omega$ soit contenu dans la boule de $\mathbb{R}^n$ centrée à l'origine et de rayon ρ ; on pose

$D^\rho_\pm = \{\underline{u}(0) \in H(\Omega)$, tels que la solution $u(t,x)$ de (1) avec donnée initiale $\underline{u}(0)$ vérifie $u(t,x) = 0$ pour $|x| < \pm t + \rho$ dans $\pm t > 0\}$.

Les éléments de D^ρ_+ (resp. D^ρ_-) sont appelés solutions sortantes (resp. rentrantes) du problème mixte, et les sous-espaces D^ρ_+ et D^ρ_- sont <u>orthogonaux</u> dans $H(\Omega)$. (comme la dimension est impaire $D^\rho_\pm$ ne sont pas réduits à zéro.)

Maintenant le point fondamental est que D^ρ_+ est un sous-espace <u>sortant</u> (au sens de [8]) pour l'action du groupe unitaire $U(t)$ sur $H(\Omega)$, c'est-à-dire qu'on a :

$$\text{(3)} \qquad \begin{aligned} &\text{i)} \quad U(t)D^\rho_+ \subset D^\rho_+ \quad \text{pour} \quad t > 0 \\ &\text{ii)} \quad \bigcap_{t \in R} U(t)D^\rho_+ = \{0\} \\ &\text{iii)} \quad \overline{\Big(\bigcup_{t \in R} U(t)D^\rho_+ \Big)} = H(\Omega) \end{aligned}$$

[bien sûr, D^ρ_- est un espace <u>entrant</u>, avec la définition évidente).

Dans (3) les points i) et ii) sont des banalités, par contre iii) est un résultat profond, qui est équivalent à la décroissance de l'énergie locale pour les solutions de (1), i.e. si $G \subset \Omega$ est <u>borné</u> alors :

$$\text{(4)} \qquad \forall\, \underline{u}(0) \in H \quad \lim_{t \to +\infty} |U(t)\underline{u}(0)|^G_E = 0$$

où $(|\underline{u}|^G_E)^2$ est l'énergie contenue dans le domaine G :

$$(|\underline{u}|^G_E)^2 = \int_G |\nabla u_o|^2 + |u_1|^2 \ .$$

On introduit alors le supplémentaire orthogonal K de $D^\rho_+ \oplus D^\rho_-$ dans $H(\Omega)$:

$$H(\Omega) = D^\rho_+ \oplus K \oplus D^\rho_-$$

ainsi que les projecteurs orthogonaux $P^\rho_\pm$ sur $(D^\rho_\pm)^\perp$ et on pose pour $t \geq 0$:

$$\text{(5)} \qquad Z(t) = P^\rho_+ U(t) P^\rho_- \ .$$

Alors $Z(t)$ est un semi-groupe de contractions sur K , de générateur infinitésimal B :

$$Z(t) = e^{tB} .$$

Le semi-groupe $Z(t)$ décrit le comportement local pour $t>0$ de la solution : en effet si $\underline{u}(0)$ est à support dans $|x|<\rho$ on a :

$$(Z(t)\underline{u}(0))(x) = \underline{u}(t)(x) \quad \text{pour} \quad t \geq 0 , \ |x|<\rho .$$

Il est prouvé dans [8] que le spectre $\sigma(B)$ de B est purement ponctuel, et que la résolvante $(\mu Id-B)^{-1}$ est méromorphe dans $\mathbf{C}$, et holomorphe dans $Re\mu \geq 0$. Sans entrer dans la théorie de Lax. Phillips, rappelons que $\omega \in \mathbf{C}$ est un pôle de la matrice S de scattering si et seulement si $i\omega \in \sigma(B)$ et qu'on a la caractérisation suivante du spectre :

(6)
$\mu \in \sigma(B)$ si et seulement s'il existe $f(x)$ non nulle vérifiant

1) $\Delta f = \mu^2 f$ dans Ω

2) $f \equiv 0$ sur $\partial\Omega$

3) f est μ. sortante i.e. il existe une fonction $g(y)$ définie sur $\partial\Omega$ telle que

$$f(x) = \int_{\partial\Omega} e_\mu(x-y)g(y)d\sigma(y)$$

où e_μ est la solution élémentaire sortante de $\Delta-\mu^2$:

$$e_\mu(x) = C_n(\mu^2-\Delta)^{\frac{n-1}{2}} \left(\frac{e^{-\mu|x|}}{\mu}\right) .$$

Ainsi le spectre $\sigma(B)$ correspond aux "valeurs propres" (associées à des fonctions propres généralisées) du Laplacien dans Ω avec condition de Dirichlet, et le problème général qu'on se pose est d'obtenir de l'information sur ce spectre.

On se limitera essentiellement ici aux résultats qui se déduisent des théorèmes de propagation de singularités pour les solutions du problème mixte, et qui relient le spectre à la géométrie de l'obstacle. Néanmoins, pour terminer cette introduction, on donne deux résultats abstraits : d'une part le spectre est infini [9] (donc non vide, ce qui n'est pas évident a priori), d'autre part il

n'est pas trop gros [14] : le résultat annoncé par Melrose est le suivant :

(7) $$\begin{cases} \text{Il existe } C,N>0 \text{ tels que} \\ \qquad \#\{\mu \in \sigma(B)\,,\ |\mu| \le \lambda\} \le C(1+\lambda)^N\,. \end{cases}$$

(La méthode de R. Melrose ne permet pas de connaître le meilleur N).

2. Géométrie microlocale.

Soient $T^*(\mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}_t)$ le fibré cotangent, π la projection de ce fibré sur sa base $\mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}_t$, $M = \bar{\Omega} \times \mathbb{R}_t$, $\overset{\circ}{M} = \Omega \times \mathbb{R}_t$, $\partial M = \partial\Omega \times \mathbb{R}_t$, $T^*M = \pi^{-1}(M)$ et $T^*_{\partial M}$ le fibré conormal à ∂M dans $\mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}_t$.

Soit bM l'espace topologique construit à partir de $(T^*M\backslash 0) \setminus T^*_{\partial M}$ en identifiant les points de $\pi^{-1}(\partial M)$ qui ont même projection dans $T^*(\partial M) \setminus 0$. Alors bM s'identifie à $(T^{*\circ}M\backslash 0) \cup (T^*(\partial M) \setminus 0)$ et on a une projection canonique b de $(T^*M\backslash 0) \setminus T^*_{\partial M}$ sur bM.

Soit Σ la variété caractéristique de l'équation des ondes

$$\Sigma = \{(x,t,\xi,\tau) \in T^*(\mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}_t)\,,\ \tau^2 = |\xi|^2\}\,.$$

On note

(8) $$\Sigma_b = b(\Sigma \cap T^*M\backslash 0)$$

et on pose

$$\Sigma_b^o = \Sigma_b \cap T^{*\circ}M\backslash 0\ ;\ \Sigma_b^{[1]} = \Sigma_b \cap T^*(\partial M) \setminus 0\,.$$

Au dessus d'un point $\gamma \in \Sigma_b^{[1]}$; il existe deux points $\gamma^{\pm}$ dans Σ tels que $b(\gamma^{\pm}) = \gamma$. On note alors

$$\Sigma_b^1 = \{\gamma \in \Sigma_b^{[1]} \text{ où } \gamma^+ \neq \gamma^-\} \quad \text{(région hyperbolique du bord)}$$

$$\Sigma_b^{[2]} = \{\gamma \in \Sigma_b^{[1]} \text{ où } \gamma^+ = \gamma^-\}$$

Si $\gamma \in \Sigma_b^{[2]}$, alors la bicaractéristique D_γ de l'équation des ondes passant par $\gamma^+ = \gamma^-$ est tangente à $\pi^{-1}(\partial M)$ (ou, ce qui est équivalent, sa projection

sur la base qui est une droite est tangente à ∂M). On note alors :

$$\Sigma_b^k = \{\gamma \in \Sigma_b^{[2]} \text{ tel que } D_\gamma \text{ a un contact d'ordre } k \geq 2 \text{ exactement avec } \pi^{-1}(\partial M)\}$$

$$\Sigma_b^{2,-} = \{\gamma \in \Sigma_b^2 \text{ tel que } D_\gamma \text{ soit contenu dans } \pi^{-1}(M) \text{ près de } \gamma_+ = \gamma_-\}$$

$$\Sigma_b^{2,+} = \Sigma_b^2 - \Sigma_b^{2,-} .$$

On appelle $\Sigma_b^{2,-}$ les points diffractifs du bord.

Comme on a supposé $\partial\Omega$ analytique, Σ_b^k est vide pour k assez grand et lorsque, par exemple, $\partial\Omega$ est strictement convexe, on a $\Sigma_b^{[2]} = \Sigma_b^{2,-}$.

Près d'un point $x_o \in \partial\Omega$ on peut choisir un système de coordonnées locales $y = (y_1, y_n)$ tel que Ω soit défini par $y_n > 0$ et tel que le symbole de l'équation des ondes se transforme en :

$$\tau^2 - |\xi|^2 = \tau^2 - [\eta_n^2 + r(y,\eta')] \qquad (\eta = (\eta', \eta_n)) .$$

On a alors en posant $r_o(y',\eta') = r(y',0;\eta')$

$$\Sigma_b^1 = \{\tau^2 > r_o(y',\eta')\}$$

$$\Sigma_b^{[2]} = \{\tau^2 = r_o(y',\eta')\}$$

$$\Sigma_b^{2,\mp} = \{\tau^2 = r_o(y',\Sigma') \ , \ \frac{\partial r}{\partial y_n}(0,y',\eta') \gtrless 0\} .$$

(9) Définition : Un rayon est une courbe continue $I \ni s \to \gamma(s) \in \Sigma_b$ (I intervalle de $\mathbb{R}$) telle que :

- Si $\gamma(s_o) \in \Sigma_b^o$, alors $\gamma(s)$ est une bicaractéristique de l'équation des ondes pour s près de s_o, i.e. $\dot\gamma(s) = H_{\tau^2-\xi^2}(\gamma(s))$ (où H est le champ hamiltonien).

- Si $\gamma(s_o) \in \Sigma_b^1$ alors $\gamma(s) \in \Sigma_b^o$ pour $s \neq s_o$ près de s_o (un rayon transverse au bord se réfléchit selon les lois de l'optique).

- Si $\gamma(s_o) \in \Sigma_b^{[2]}$, alors dans un système de coordonnées locales, on a $\gamma(s) = b[y(s),\eta(s),t(s),\tau(s)]$, $y(s)$, $\eta'(s)$, $t(s)$, $\tau(s)$ sont dérivables en s_o et

$$\overset{\circ}{t}(s_o) = 2\tau(s_o) \qquad \overset{\circ}{\tau}(s_o) = 0$$

$$\overset{\circ}{\eta}'(s_o) = + \frac{\partial r_o}{\partial y'}(y'(s_o),\eta'(s_o)) \qquad \overset{\circ}{y}'(s_o) = - \frac{\partial r_o}{\partial \eta'}(y'(s_o),\eta'(s_o))$$

$$\overset{\circ}{y}_n(s_o) = 0 \ .$$

Sur un rayon on a toujours $\tau = C^{te}$, $t = 2\tau s$ et les projections sur $\bar{\Omega}$ des rayons pour lesquels $\tau = \frac{1}{2}$ sont les géodésiques (généralisées) de la variété à bord $\bar{\Omega}$, paramétrées par la longueur t .

La terminologie suivante sera justifiée par la suite

(9) Définition : Un rayon - C^∞ est un rayon qui vérifie de plus : si $\gamma(s_o) \in \Sigma_b^{2,-}$ $\gamma(s) \in \Sigma_b^o$ pour $s \neq s_o$ près de s_o .

(De façon imagée un rayon $-C^\infty$ est un rayon qui reste le moins de temps possible dans le bord).

(10) Lemme [16] : Pour tout $\rho \in \Sigma_b$ il existe un unique rayon $-C^\infty$ maximal passant par ρ .

(11) Définition : On dit que Ω est "non-trapping" s'il existe $R > 0$ tel que tout rayon $-C^\infty$ contenu dans la boule $|x| \leq \rho$, (sur lequel $\tau = \frac{1}{2}$) , est de longueur inférieure à R ; Ω est dit trapping dans le cas contraire. [On dit aussi non-captif, ou captif].

Par exemple, lorsque Ω est le complémentaire d'un convexe fermé, Ω est non-trapping ; lorsque Ω est le complémentaire de la réunion de deux convexes disjoints, Ω est trapping.

On a illustré sur la fig. 1 la différence entre un rayon quelconque et un rayon $-C^\infty$

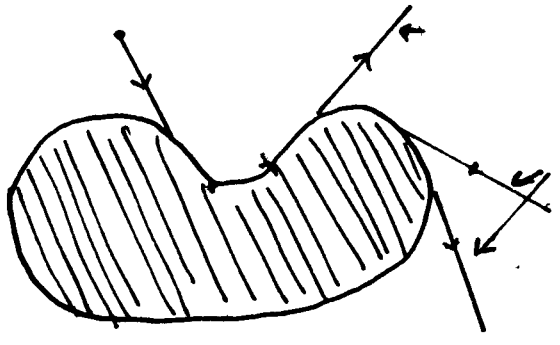

Fig. 1

3. Propagation des singularités. Application à la localisation des pôles dans le cas non-trapping.

Pour une solution $u(t,x)$ de (1) , on peut définir (cf [16]) de façon intrinsèque un ensemble fermé conique $WF_b(u)$, contenu dans Σ_b et qui coïncide avec le front d'onde C^∞ de Hörmander [4] dans $T^{*o}M\setminus 0$, et on a le résultat de propagation des singularités suivant :

(12) Théorème : [16] $WF_b(u)$ est réunion de rayons C^∞ .

Aux points de Σ_b^o , c'est le résultat de propagation des singularités à l'intérieur de Hörmander [4] , aux points de Σ_b^1 , c'est le théorème sur la réflexion transversale des singularités ([3], [7]). Le cas des points de $\Sigma_b^{[2]}$ est traité dans [16] ; on y utilise les résultats de [13] aux points de $\Sigma_b^{2,-}$ (diffractifs).

Une conséquence importante du théorème précédent est la décroissance exponentielle uniforme de l'énergie dans le cas non-trapping ("conjecture de Lax-Phillips", voir aussi Morawetz-Ralston - Strauss [17]).

(13) Théorème : [14]. Supposons que Ω soit non-trapping et soit $R>0$ et G borné dans Ω . Alors il existe $C,\alpha>0$ tels que pour tout $\underline{u}(0)$ dans $H(\Omega)$

à support dans $|x| \leq R$ on ait :

$$|\underline{u}(t)|_E^G \leq Ce^{-\alpha t}|\underline{u}(0)|_E^\Omega .$$

En effet on déduit de (12) que pour t assez grand $Z(t)$ est un opérateur compact ; il en résulte alors la décroissance exponentielle du semi-groupe $Z(t)$ (cf [8]) :

$$\|Z(t)\| \leq Ce^{-\alpha t}$$

d'où la décroissance exponentielle de l'énergie locale.

Toujours dans le cas non-trapping, on déduit de (12) qu'il existe $a,b>0$ tels que (voir aussi [10])

(14) $$\sigma(B) \subset \{Re\mu \leq -a \operatorname{Log}|\mu| + b\} .$$

Pour améliorer ce résultat, on reprend le problème de propagation des singularités en s'intéressant cette fois aux singularités Gevrey de u, et non plus aux singularités C^∞.

Rappelons que pour $f(x) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$, le spectre G^σ $(1 \leq \sigma < +\infty)$ de f, qu'on note ici $SS^\sigma(u)$ est défini par :

$T^*\mathbb{R}^N \setminus 0 \ni (x_o, \xi^o) \notin SS^\sigma(f)$ ssi il existe une décomposition $f(x) = f_o(x) + f_1(x)$ près de x_o, telle que $(x_o, \xi^o) \notin SS(f_o)$ (le spectre analytique de Sato de f_o, [21]) et $f_1(x)$ est une fonction C^∞ de classe de Gevrey σ près de x_o, c'est-à-dire qu'il existe W voisinage de x_o, $A,B>0$ tels que

$$\forall\, \alpha \in \mathbb{N}^N \quad \sup_{X \in W} |\partial_x^\alpha f| \leq AB^{|\alpha|}(\alpha!)^\sigma .$$

Le cas $\sigma = 1$ correspond au spectre analytique et on a toujours

$$WF(f) \subset SS^\sigma(f) \subset SS^{\sigma'}(f) \qquad (\sigma' < \sigma) .$$

On peut alors définir $SS_b^\sigma(u) \subset \Sigma_b$ pour $u(t,x)$ solution de (1) et on a :

(15) Théorème : Pour tout $\sigma \geq 3$, $SS_b^\sigma(u)$ est réunion des rayons C^∞.

(Le même résultat est faux pour $1 \leq \sigma < 3$ comme le montre l'étude de Friedlander-Melrose [12]).

Du résultat précédent, on déduit que si la donnée de Cauchy $\underline{u}(0)$ est à support dans la boule de rayon R et Ω non-trapping, alors pour $t \geq t_o$ assez grand, $u(t,x)$ est une fonction Gevrey-3 (jusqu'au bord $\partial\Omega$) dans $|x| < R$ et on montre [2] qu'il existe $C_1 > 0$, $T_o > 0$ tels que

$$\forall\ \ell \geq 0 \quad \|B^\ell Z(T_o)\| \leq C_1^{\ell+1}(\ell!)^3$$

d'où il résulte :

Si Ω est non-trapping, il existe $C_o > 0$ tel que

$$\sigma(B) \subset \{\mathrm{Re}\mu \leq -C_o(1+|\mu|^{1/3})\} \ . \tag{16}$$

Le théorème (15) est une conséquence purement géométrique des résultats suivants : d'une part un théorème de propagation abstrait dans toutes les classes de Gevrey, dû à J. Sjöstrand (cf [20] pour la preuve dans le cas analytique $\sigma = 1$, qui s'adapte à toutes les valeurs de σ) :

(17) Théorème : Pour tout $\sigma \geq 1$, $SS^\sigma_b(u)$ est réunion de rayons.

D'autre part le résultat de régularité aux points diffractifs $(\Sigma^{2,-}_b)$ [11] :

(18) Théorème : Soit u solution de (1), $\gamma = b(\bar{\gamma})$ dans $\Sigma^{2,-}_b$, $\sigma \geq 3$. Alors si $\exp s H_{\tau^2-|\xi|^2}(\bar{\gamma}) \notin SS^\sigma_b(u)$ pour $s<0$ on a $\gamma \notin SS^\sigma_b(u)$

qui se déduit de la construction d'une paramétrix asymptotique, aux points diffractifs. L'indice critique $\sigma = 3$ provient des propriétés de la fonction d'Airy. (Dans le cas $\sigma > 3$, on doit pouvoir aussi déduire le résultat d'un argument d'équivalence pour les hyper surfaces Glancing).

4. Quelques résultats dans le cas trapping.

Lorsque Ω est trapping, il existe des rayons - C^∞ piégés par l'obstacle (rayons - C^∞ de longueur infinie qui restent dans un borné de Ω) et on ne peut espérer une décroissance uniforme exponentielle de l'énergie locale. Dans les "bons cas" trapping (il suffit qu'il existe un rayon - C^∞ captif, jamais tangent à $\partial\Omega$) [cf [19]] Ralston a démontré qu'on n'a aucun taux de décroissance uniforme pour l'énergie locale : en choisissant un rayon R_o assez grand, on a :

(19) $\begin{cases} \text{Pour tout } \varepsilon>0 \text{ , et tout } T>0 \text{ , il existe } u(t,x) \text{ solution de (1) tel} \\ \text{que} \\ \qquad |\underline{u}(0)|_E^{\Omega} = 1 \quad \text{et} \quad |\underline{u}(T)|_E^{|x|<R_o} \geq 1-\varepsilon \text{ .} \end{cases}$

Néanmoins ce résultat n'implique pas qu'il existe toujours une suite de pôles $-i\mu_n$ $(\mu_n \in \sigma(B))$ de la matrice de diffusion S qui tendent vers l'axe réel quand $n \to +\infty$. Le cas le plus simple d'obstacle trapping, lorsque Ω est le complémentaire de la réunion de deux convexes stricts disjoints $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$, a été étudié par Ikawa [5][6] ; dans ce cas, il existe un unique (à homogénéité près) rayon -C^∞ piégé dont la projection sur Ω est le segment de plus courte distance entre $\mathcal{O}_1$ et $\mathcal{O}_2$. La description du spectre $\sigma(B)$ qu'obtient Ikawa est la suivante :

(20) $\begin{cases} \text{Il existe } C, C_o, C_1 >0 \text{ , tels qu'on posant } \mu_j = -C_o + i\,\frac{\pi}{d}\,j \text{ , } j \in \mathbb{Z} \text{ ,} \\ d = \text{distance } (\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2) \text{ , } D_j = \text{disque de centre } \mu_j \text{ et de rayon } C(1+|j|)^{-\frac{1}{2}} \end{cases}$

$\begin{cases} \text{on ait} \\ 1)\ \ \sigma(B) \cap \{\mathrm{Re}\mu > - c_o - c_1\} \subset \bigcup_{j \in \mathbb{Z}} D_j \text{ .} \\ 2)\ \text{Dans chaque disque } D_j \text{ , il existe au moins un } \widetilde{\mu}_j \text{ appartenant au} \\ \quad \text{spectre (pour } j \text{ assez grand).} \end{cases}$

De plus si les données de Cauchy sont assez régulières (5 dérivées pour $u_o(x)$,

4 pour $u_1(x)$) , on récupère la décroissance exponentielle pour l'énergie locale.

(21) Si G est un borné de Ω , il existe $C,\alpha>0$ tels que

$$|u(t)|_E^G \leq C[\|u_0\|_5 + \|u_1\|_4] e^{-\alpha t} .$$

Toujours dans le cas trapping, on peut utiliser une formule de trace pour obtenir de l'information sur le spectre : Dans [15], Melrose a démontré le résultat :

(22) Théorème : Soit $E(t,x,y)$ la solution fondamentale de :

$$\begin{cases} (\partial_t^2 - \Delta_x) E(t,x,y) = 0 \quad \text{dans} \quad R_t \times \Omega \times \Omega \\ E(0,x,y) = 0 \quad D_t E(0,x,y) = \delta(x-y) \\ E(t,x,y) = 0 \quad \text{pour} \quad x \in \partial\Omega . \end{cases}$$

Alors pour tout $\varphi(t) \in C_o^\infty(R_+^*)$ on a

$$\int \varphi(t) E(t,x,y)\, dt \in C^\infty(\bar{\Omega} \times \bar{\Omega})$$

et

$$2 \int_\Omega < \varphi(.), E(.,x,x) > dx = \sum_{\mu_j \in \sigma(B)} \hat{\varphi}(i\mu_j) .$$

Il en résulte que :

(23) $$\sigma(t) = \sum_{\mu_j \in \sigma(B)} e^{\mu_j t}$$

est une distribution sur l'intervalle ouvert $]0,+\infty[$, de plus on sait (voir [1]) que le support singulier de $\sigma(t)$ est contenu dans l'union des périodes des rayons C^∞ périodiques. En étudiant les singularités de $\sigma(t)$, on peut alors prouver l'existence de spectre dans certaines régions du plan complexe : Petkov [18]. a obtenu le résultat suivant (à comparer à (14) et (16)).

(24) S'il existe dans Ω au moins un rayon $-C^\infty$ réflechissant périodique isolé (voir [18], pour la définition), alors pour tout $\varepsilon>0$, il existe une infinité de valeurs spzctrales μ_j dans la région

$$-\varepsilon \operatorname{Log}|\mu| < \operatorname{Re}\mu < 0 .$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] C. BARDOS, J.C. GUILLOT, J. RALSTON : La relation de Poisson pour l'équation des ondes dans un ouvert non borné. Application à la théorie de la diffusion. Comm. in Partial Differential Equations 7 (1982) 905-958.

[2] C. BARDOS, G. LEBEAU, J. RAUCH : en préparation.

[3] J. CHAZARAIN : Construction de la paramétrix du problème mixte hyperbolique pour l'équation des ondes ; CRAS PARIS 276 (1973) 1213-1215.

[4] L. HÖRMANDER : On the existence and regularity of solutions of linear pseudo-differential equations. Enseignement Math. (1971) 99-163.

[5] M. IKAWA : On the poles of the scattering matrix for two strictly convex obstacles. J. Math. Kyoto Univ. Vol. 23 n° 1, 1983.

[6] M. IKAWA : Decay of solutions of the wave equation in the exterior of two convex obstacles. Osaka Jour. of Maths (19) 1982.

[7] LAX. NIRENBERG : Lecture on linear partial differential equations AMS Regional Conference Series 17 (1973).

[8] P. LAX, R. PHILLIPS : Scattering theory, Academic Press 1967.

[9] P. LAX, R. PHILLIPS : Decaying modes for the wave equation in the exterior of an obstacle Comm. Pure Appl. Math. 22 (1969) 737-787.

[10] P. LAX, R. PHILLIPS : A logarithmic bound on the location of the poles of the scattering matrix ; Arch. Rat. Mech. and Anal, 40 (1971) 268-280.

[11] G. LEBEAU : Régularité Gevrey 3 pour la diffraction. Preprint.

[12] F.G. FRIEDLANDER, R.B. MELROSE : The wave front set of the solution of a simple initial-boundary value problem with glancing rays. II. Math. Proc. Camb. Phil. Soc. (1977) 81 97.120.

[13] R.B. MELROSE : Microlocal parametrices for diffractive boundary value problems Duke Math. Journal 42 (1975) 605-635.

[14] R.B. MELROSE : Singularities and energy decay in acoustical scattering. Duke Math. Journal 46 (1979) 43-59.

[15] R.B. MELROSE : Polynomial bound on the number of scattering poles. J. of Fonct. Anal. 53 (1983) 287-303.

[16] R.B. MELROSE, J. SJÖSTRAND : Singularities of boundary value problems I. C.P.A.M. 31 (1978) 593-617.

[17] C. MORAWETZ, J. RALSTON, W. STRAUSS Decay of solutions of the wave equations outside non trapping obstacles C.P.A.M. 30 (1977) 447-508.

[18] V.M. PETKOV : La distribution des pôles de la matrice de diffusion. Sem. Goulaouic - Meyer - Schwartz 1982-1983 exposé n° 7.

[19] J. RALSTON : Solutions of the wave equation with localized energy. C.P.A.M. 22 (1969) 207, 223.

[20] SJÖSTRAND : Propagation of analytic singularities for second order Dirichlet problems, Com. in P.D.E. 5 (1) (1980) 41-94.

[21] M. SATO T. KAWAÏ, M. KASHIWARA : Hyperfonctions and Pseudo-Differential Equations ; Lect. Notes n° 287, Springer.

ECOLE NORMALE SUPERIEURE
45, rue d'Ulm
75230 PARIS CEDEX 05