

RECHERCHE COOPÉRATIVE SUR PROGRAMME N° 25

A. DOUADY

J. H. HUBBARD

Dynamique des applications à allure polynomiale

Les rencontres physiciens-mathématiciens de Strasbourg - RCP25, 1983, tome 32
« Conférences de : V. Guillemin, A. Douady, P. Lelong et F. Pham », , exp. n° 2, p. 17-39

http://www.numdam.org/item?id=RCP25_1983__32__17_0

© Université Louis Pasteur (Strasbourg), 1983, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Recherche Coopérative sur Programme n° 25 » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

DYNAMIQUE DES APPLICATIONS
A ALLURE POLYNOMIALE

par

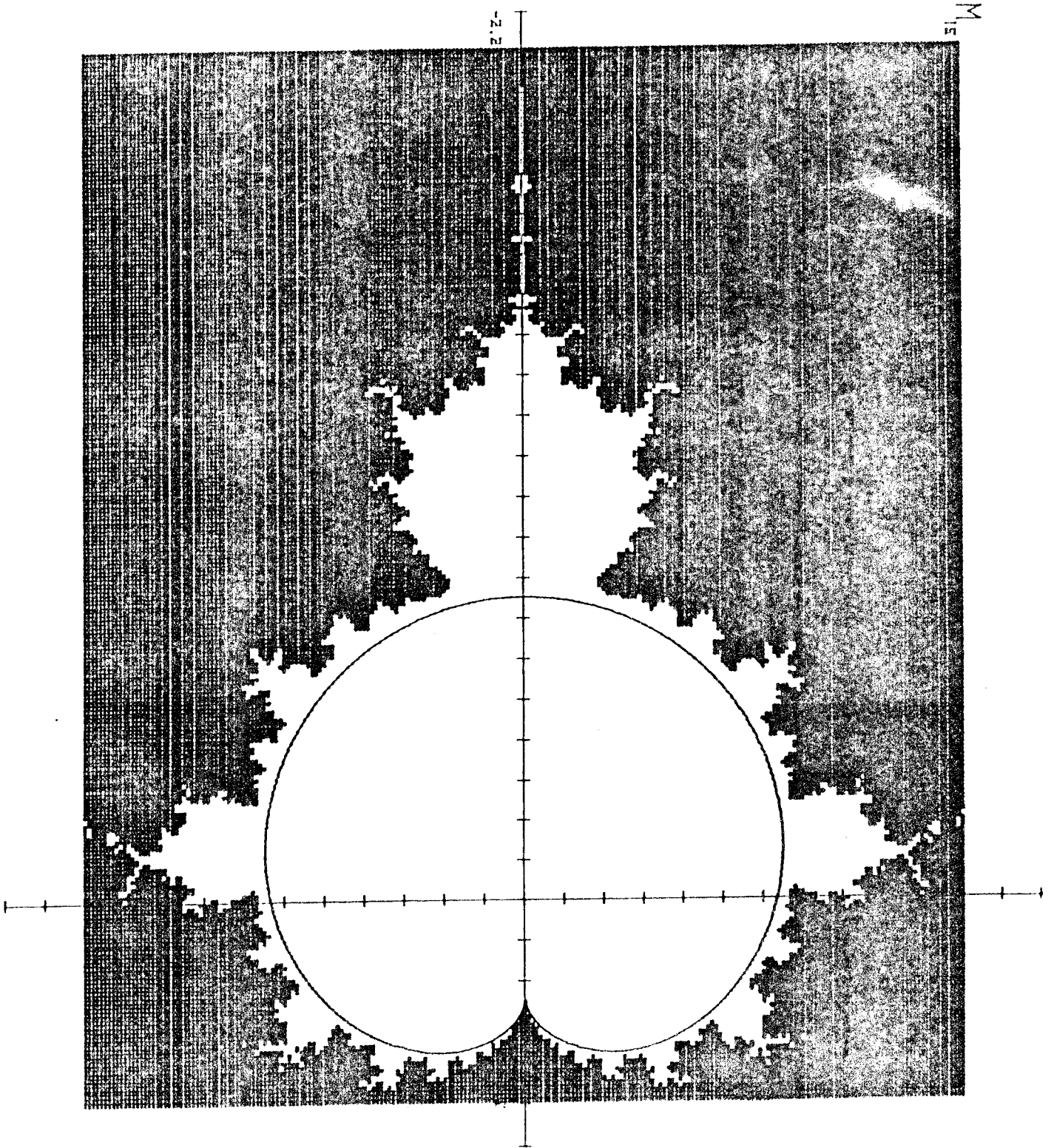
A. DOUADY et J.H. HUBBARD

Ce texte est un extrait d'un article à paraître de A. Douady et J.H. Hubbard, couvrant et développant une partie de l'exposé fait par A. Douady à Strasbourg en novembre 1982.

0 . INTRODUCTION

La figure 1 représente l'ensemble de Mandelbrot standard M . Il est défini de la façon suivante à partir de la famille de fonctions $P_c : z \mapsto z^2 + c$. Pour chaque $c \in \mathbb{C}$, on note K_c l'ensemble des points $z \in \mathbb{C}$ tels que $P_c^n(z) = P_c(P_c(\dots(z)\dots))$ reste borné quand n tend vers ∞ . On sait depuis 1919 (Fatou, Julia) que K_c est connexe si $0 \in K_c$, et est un Cantor sinon (le point 0 joue un rôle particulier car c'est le point critique). L'ensemble M est l'ensemble des valeurs de c pour lesquelles K_c est connexe.

Figure 1 :



Quand on étudie une famille quelconque (f_λ) de polynômes ou de fractions rationnelles, de degré constant arbitraire, dépendant analytiquement d'un paramètre $\lambda \in \underline{\mathbb{C}}$, et que l'on classe les valeurs de λ suivant les propriétés dynamiques de f , souvent on voit apparaître une copie de M . L'ensemble M lui-même contient une infinité de petites copies de lui-même, comme B. Mandelbrot - il aime à le rappeler - l'a observé. Le but de ce travail est d'essayer de comprendre ce phénomène.

I . APPLICATIONS A ALLURE POLYNOMIALE

1. Définition .

De même qu'une grande partie des résultats obtenus pour les polynômes $x \mapsto x^2 + c$ avec c réel s'étendent aux fonctions convexes à dérivée schwarziennne négative, de même on est frappé, quand on étudie d'un point de vue dynamique les polynômes ou fractions rationnelles complexes, de voir que si on utilise à chaque instant les propriétés des fonctions holomorphes, on utilise fort peu la rigidité des polynômes (sauf pour la démonstration de la non-errance de Sullivan). On a donc cherché un cadre plus "mou".

Soient $P : \underline{\mathbb{C}} \rightarrow \underline{\mathbb{C}}$ un polynôme de degré d et $U = D_R$ un disque de rayon assez grand. Alors $U' = P^{-1}(U)$ est relativement compact dans U et homéomorphe à un disque, et P induit une application analytique, propre de degré d , de U' sur U .

DÉFINITION.- On appelle application à allure polynomiale de degré d un triplet (U, U', f) où U et U' sont des ouverts de $\underline{\mathbb{C}}$ isomorphes au disque, avec U' relativement compact dans U , et f une application holomorphe, propre de degré d , de U' dans U .

Si $\underline{f} = (U, U', f)$ est une application à allure polynomiale, on note $K_{\underline{f}}$ ou simplement K_f l'ensemble des $z \in U'$ tels que $f^n(z)$ soit défini et appartienne à U' pour tout n .

De nombreuses propriétés dynamiques s'étendent aux applications à allure polynomiale. Souvent, la démonstration peut se recopier dans ce cadre. C'est le cas pour les propriétés suivantes, dûes dans le cas des polynômes à Fatou ou Julia :

Proposition 1.- Tout cycle attractif a au moins un point critique dans son bassin immédiat.

Proposition 2.- Si tous les points critiques appartiennent à K_f , l'ensemble K_f est connexe. Si aucun point critique n'appartient à K_f , c'est un Cantor.

Proposition 3.- Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) Tout point critique de f appartenant à K_f est attiré par un cycle attractif ;

(ii) Il existe une métrique riemannienne sur un voisinage de $J_f = \partial K_f$ et un $\lambda > 1$ tels que, pour tout $x \in J_f$ et tout vecteur tangent t en x , on ait $\|T_x f(t)\|_{f(x)} \geq \lambda \|t\|_x$.

Le procédé qui consiste à copier la démonstration du cas des polynômes échoue pour étendre les deux résultats suivants :

a) La densité des points périodiques répulsifs dans J_f , démontrée pour les polynômes et les fractions rationnelles par Fatou, en utilisant le théorème de Picard ;

b) La non errance des composantes connexes de $\overset{\circ}{K}_f$, démontrée par Sullivan en utilisant le fait qu'un polynôme (ou une fraction rationnelle) ne dépend que d'un nombre fini de paramètres.

Le Théorème 1 ci-dessous permet d'"accrocher la casserole au clou", de déduire certaines propriétés dynamiques des applications à allure polynomiale des propriétés similaires des polynômes. Ceci s'applique notamment aux deux énoncés (a) et (b) ci-dessus.

2. Le théorème de redressement .

Soient $f : U' \rightarrow U$ et $g : V' \rightarrow V$ des applications à allure polynomiale. On dit que f et g sont topologiquement équivalentes et on écrit $f \sim_{\text{top}} g$ s'il existe un homéomorphisme φ d'un voisinage de K_f sur un voisinage de K_g tel que $\varphi \circ f = g \circ \varphi$ au voisinage de K_f . Si φ est quasi-conforme (resp. holomorphe), on écrit $f \sim_{\text{qc}} g$ (resp. $f \sim_{\text{hol}} g$). Nous dirons que f et g sont hybridement équivalents et nous écrirons $f \sim_{\text{hb}} g$ si φ est quasi-conforme avec $\tilde{\alpha}\varphi = 0$ presque partout sur K_f . On a donc $f \sim_{\text{hol}} g \Rightarrow f \sim_{\text{hb}} g \Rightarrow f \sim_{\text{qc}} g \Rightarrow f \sim_{\text{top}} g$. Si $J_f = \partial K_f$ est de mesure nulle (et on

ignore s'il y a des f pour lesquelles ce n'est pas le cas), la condition $\bar{\partial}\varphi = 0$ p.p. sur K_f équivaut à dire que φ est holomorphe sur $\overset{\circ}{K}_f$.

THEOREME 1 - a) Toute application à allure polynomiale f de degré d est hybridement équivalente à un polynôme P de degré d .

b) Si K_f est connexe, P est unique à conjugaison affine près.

Démonstration de la partie (a) :

Soit $A \subset U$ une pièce à bord C^1 , homéomorphe à \bar{D} , telle que $K_f \subset \overset{\circ}{A}$, que $A' = f^{-1}(A)$ soit homéomorphe à \bar{D} et $A' \subset \overset{\circ}{A}$. Soit $r > 1$, posons $Q = A - \overset{\circ}{A}'$, $Q_r = \bar{D}_{rd} - D_r$ et soit ψ un difféomorphisme de Q sur Q_r tel que $\psi(f(z)) = (\psi(z))^d$ pour $z \in \partial A'$. Notons σ_0 la structure complexe standard sur \underline{C} et σ la structure $\psi^*\sigma_0$ sur Q . Prolongeons σ à $U - f^{-n}(Q) = A - K_f$ en la transportant par f , et à A par σ_0 sur K_f . On obtient sur $\overset{\circ}{A}$ une structure presque-complexe, quasi conforme à σ_0 , donc intégrable et vérifiant $f^*\sigma = \sigma$. En collant $(\overset{\circ}{A}, \sigma)$ et $\Sigma - D_r$ suivant ψ , on obtient une surface de Riemann X ; l'application f et $z \mapsto z^d$ se recollent en une application analytique $g : X \rightarrow X$, avec $g^{-1}(\infty) = \infty$. Il existe un isomorphisme $\varphi : X \rightarrow \Sigma$ tel que $\varphi(\infty) = \infty$. Alors $P = \varphi \circ g \circ \varphi^{-1}$ est un polynôme de degré d et la restriction de φ à $\overset{\circ}{A}$ est une équivalence de f sur ce polynôme, cqfd.

Nous ne donnons pas ici la démonstration de la partie (b), mais nous en indiquons deux variantes en degré 2 :

Proposition 4.- Soient c_1 et c_2 dans \underline{C} avec $c_1 \in \partial M$. Si les polynômes $z^2 + c_1$ et $z^2 + c_2$ sont quasi-conformément équivalents, on a $c_1 = c_2$.

Proposition 5.- Soient $f : U' \rightarrow U$ et $g : V' \rightarrow V$ deux applications à allure polynomiale de degré 2. On suppose que $f \underset{hb}{\sim} g$, que K_f et K_g sont connexes, et qu'il existe un isomorphisme \underline{C} -analytique φ de $U - K_f$ sur $V - K_g$ tel que $\varphi \circ f = g \circ \varphi$ sur $U' - K_f$. Alors f et g sont holomorphiquement équivalentes.

II Redressement avec paramètres.

1. Familles analytiques d'applications à allure polynomiale.

Une famille analytique, paramétrée par une variété Λ , d'applications à allure polynomiale est un triplet $(\underline{U}, \underline{U}', f)$ où \underline{U} et \underline{U}' sont des ouverts de $\Lambda \times \underline{\mathbb{C}}$ homéomorphes au-dessus de Λ à $\Lambda \times D$, avec $\underline{U}' \cap (L \times \underline{\mathbb{C}})$ relativement compact dans \underline{U} pour tout compact L de Λ , et $f : \underline{U}' \rightarrow \underline{U}$ application au-dessus de Λ , analytique et propre.

Etant donné une telle famille, le degré d de f_λ est indépendant de λ si Λ est connexe. On note \underline{K} l'ensemble des (λ, z) tels que $z \in K_\lambda = K_{f_\lambda}$; la projection $\pi : \underline{K} \rightarrow \Lambda$ est propre. On note M_f l'ensemble des λ pour lesquels K_λ est connexe.

En vertu du Théorème 1, pour chaque λ on peut trouver un polynôme P de degré d et un homéomorphisme $\psi_\lambda : V_\lambda \rightarrow W_\lambda$, où V_λ et W_λ sont des voisinages de K_λ et K_P respectivement, définissant une équivalence hybride entre f_λ et P_λ . La question de savoir si on peut choisir P_λ et ψ_λ dépendant continûment de λ est l'objet de ce paragraphe.

PROPOSITION 6.- On suppose Λ contractile. On peut trouver dans \underline{U} une pièce \underline{A} difféomorphe au dessus de Λ à $\Lambda \times \bar{D}$, telle que $\underline{K} \subset \overset{\circ}{\underline{A}}$, $\underline{A}' = f^{-1}(\underline{A}) \subset \overset{\circ}{\underline{A}}$ et \underline{A}' difféomorphe au dessus de Λ à $\Lambda \times \bar{D}$, et un difféomorphisme ψ de $\underline{Q} = \underline{A} - \overset{\circ}{\underline{A}}$ sur $\Lambda \times \underline{Q}_r$ au dessus de Λ , tel que $\psi_\lambda(f_\lambda(z)) = (\psi_\lambda(z))^d$ pour $(\lambda, z) \in \partial \underline{A}'$.

Remarque: en utilisant un théorème de Cerf, on peut remplacer l'hypothèse " Λ contractile" par " Λ simplement connexe", et même la supprimer si $d = 2$.

Nous ne donnons pas ici la démonstration de cette proposition.

Etant donné un difféomorphisme ψ satisfaisant aux conditions de la Prop. 6, on peut pour chaque λ effectuer la construction décrite dans la démonstration du Th. 1 du § I. Jusqu'au n° 4, pour chaque λ on notera P_λ et φ_λ le polynôme et l'équivalence hybride ainsi obtenus.

2. La décomposition de Sullivan-Sad-Mañé.

On dit que f_{λ_0} a en x_0 un point périodique indifférent persistant s'il existe une application analytique $\lambda \mapsto x(\lambda)$ définie au voisinage de λ_0 telle que $x(\lambda)$ soit un point périodique indifférent de f_λ pour tout λ et $x(\lambda_0) = x_0$. Notons Λ l'ensemble des λ pour lesquels f_λ admet un point périodique indifférent non persistant, \underline{E} son adhérence et \underline{R} l'ouvert $\Lambda - \underline{E}$.

PROPOSITION 7.- a) L'ouvert \underline{R} est dense dans Λ .

b) Soit $\lambda_0 \in \underline{R}$. Il existe un voisinage W de λ_0 dans \underline{R} , un voisinage V_0 de K_{λ_0} dans U_{λ_0} et un plongement τ de $W \times (V_0 - K_{\lambda_0}^0)$ dans U au dessus de W , vérifiant les propriétés suivantes:

(i) $\tau(\lambda, z)$ est holomorphe en λ , et quasi-conforme en z avec rapport d'ellipticité borné indépendamment de λ .

(ii) L'image de τ est de la forme $\underline{V} - \underline{K}|_W$, où \underline{V} est un voisinage de $\underline{K}|_W$ dans $\underline{U}|_W$.

Il s'agit de résultats de Sullivan-Sad-Mañé, qui s'adaptent avec leur démonstration au cadre des applications à allure polynomiale.

PROPOSITION 8.- Supposons Λ contractile. Alors φ_λ et P_λ dépendent continûment de λ sur l'ouvert \underline{R} .

Pour chaque λ ,

Démonstration:/soit μ_λ la forme de Beltrami définissant la structure complexe σ_λ intervenant dans la démonstration du Th. 1. Il est clair que $\|\mu_\lambda\|_\infty$ est bornée sur tout compact de Λ par une constante < 1 . En vertu des théorèmes de dépendance par rapport à un paramètre dans le théorème de Morrey-Ahlfors-Bers, il s'agit de montrer que μ_λ dépend de façon continue de λ sur \underline{R} pour la norme L^1 .

Posons $A_{n,\lambda} = f_\lambda^{-n}(A_\lambda)$. Pour tout $\lambda \in \Lambda$, on a $\mu_\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \hat{\mu}_{n,\lambda}$, où $\hat{\mu}_{n,\lambda} = \mu_\lambda$ sur $A_\lambda - A_{n+1,\lambda}$ et 0 sur $A_{n+1,\lambda}$. Il est clair que pour chaque n la forme $\hat{\mu}_{n,\lambda}$ dépend continûment de λ pour la norme L^1 . Il suffit donc de montrer que $\hat{\mu}_{n,\lambda}$ converge vers μ_λ en norme L^1 uniformément sur tout compact de \underline{R} , autrement dit que l'aire $\underline{m}_n(\lambda)$ de $A_{n,\lambda} - K_\lambda$ tend vers 0 quand $n \rightarrow \infty$ uniformément sur tout compact de \underline{R} .

Remarquons que c'est faux au voisinage des points de \underline{E} . En effet l'aire de $A_{n,\lambda}$ dépend continûment de λ pour chaque n , mais pas celle de K_λ .

La propriété à démontrer ne dépend pas du choix de \underline{A} . Au voisinage d'un point donné de \underline{R} , on peut prendre les A_λ constants dans la trivialisatation de Sullivan-Sad-Mane, d'où un homéomorphisme quasi-conforme $\tau : A_{\lambda_0} - K_{\lambda_0} \rightarrow A_\lambda - K_\lambda$ dépendant de façon holomorphe de λ . On a

$$\underline{m}_n(\lambda) = \int_{A_{n,\lambda_0} - K_{\lambda_0}} \text{Jac}(\tau_\lambda) ;$$

posons
$$\underline{n}_n(\lambda) = \int_{A_{n,\lambda_0} - K_{\lambda_0}} \|D\tau_\lambda\|^2 .$$

Les fonctions \underline{n}_n forment une suite décroissante de fonctions pluri-sous-harmoniques. Sur un compact contenu dans une composante connexe de \underline{R} , on a des inégalités $a \underline{n}_n(\lambda) \leq \underline{m}_n(\lambda) \leq b \underline{n}_n(\lambda)$ avec a et b indépendants de

λ et de n et $a > 0$. Par suite

$$\underline{m}_n(\lambda) \xrightarrow{\text{simpt}} 0 \implies \underline{n}_n(\lambda) \xrightarrow{\text{simpt}} 0 \implies \underline{n}_n(\lambda) \xrightarrow{\text{unift}} 0 \implies \underline{m}_n(\lambda) \xrightarrow{\text{unift}} 0$$

cqfd.

3. Limites quand λ tend vers un point de F .

PROPOSITION 9.- Soit $\lambda_0 \in \Lambda$. De toute suite (λ_n) dans Λ tendant vers λ_0 , on peut extraire une suite (λ_{n_k}) telle que les $P_{\lambda_{n_k}}$ tendent vers un polynôme \tilde{P} et que les $\varphi_{\lambda_{n_k}}$ tendent vers une équivalence quasi-conforme $\tilde{\varphi}$ de f_{λ_0} avec \tilde{P} .

Remarques: 1) Si $\lambda_0 \in R$, la conclusion de la Prop. 9 est contenue dans celle de la Prop. 8.

2) Pour $\lambda_0 \in E$, on n'a pas nécessairement $J\tilde{\varphi} = 0$ sur K_{λ_0} , et si $d \geq 3$ le polynôme \tilde{P} n'est pas nécessairement hybridement équivalent à f_{λ_0} . Nous verrons des exemples.

Démonstration de la Prop. 9: Les φ_{λ_n} sont quasi-conformes, avec un rapport d'ellipticité indépendant de n . Ils forment donc une famille équicontinue. La proposition résulte alors du Théorème d'Ascoli.

4. Continuité de $\lambda \mapsto P_\lambda$ en degré 2.

THEOREME 2.- Supposons $d = 2$ et mettons P_λ sous la forme $z \mapsto z^2 + \chi(\lambda)$.

a) La fonction $\chi: \Lambda \rightarrow \mathbb{C}$ est continue.

b) Elle est holomorphe sur $\chi^{-1}(M)$.

Démonstration: a): La continuité sur \underline{R} résulte de la Prop. 8. Il suffit donc de montrer que, pour $\lambda_0 \in \underline{E}$, de toute suite (λ_n) de points de Λ tendant vers λ_0 , on peut extraire une suite (λ_{n_k}) telle que les $\chi(\lambda_{n_k})$ tendent vers $\chi(\lambda_0)$. Mettons P_{λ_0} sous la forme $z \mapsto z^2 + c_0$ et montrons d'abord que $c_0 \in \partial M$. Soit (λ'_n) une suite de points de \underline{I} tendant vers λ_0 . D'après la Prop. 9 on peut en extraire une suite (λ'_{n_k}) telle que les $P_{\lambda'_{n_k}}$ tendent vers un $\tilde{P}' = (z \mapsto z^2 + c')$ quasi-conformément conjugué à P_{λ_0} . Pour tout n , le point $c'_n = \chi(\lambda'_{n_k})$ appartient à ∂M car $f_{\lambda'_n}$ admet un point périodique indifférent; par suite $\tilde{c}' = \lim c'_n \in \partial M$. On a $c_0 = \tilde{c}'$ en vertu de la Prop. 4, d'où $c_0 \in \partial M$.

Soit maintenant (λ_n) une suite quelconque de points de Λ tendant vers λ_0 . D'après la Prop. 9 on peut en extraire une suite (λ_{n_k}) telle que les $P_{\lambda_{n_k}}$ tendent vers un \tilde{P} de la forme $z \mapsto z^2 + \tilde{c}$ quasi-conformément conjugué à P_{λ_0} . On a alors $\tilde{c} = c_0$ d'après la Prop. 4, autrement dit $\chi(\lambda_{n_k}) \rightarrow \chi(\lambda_0)$.

b) L'ouvert $\overset{\circ}{M}$ est réunion de deux ouverts disjoints (dont l'un est vraisemblablement vide) M' et M'' :

- L'ouvert M' est l'ensemble des c tels que $z \mapsto z^2 + c$ ait un cycle attractif. Ses composantes connexes sont appelées les composantes hyperboliques de $\overset{\circ}{M}$.

- L'ouvert M'' , vraisemblablement vide, est la réunion des composantes non hyperboliques, ou composantes farfelues, de $\overset{\circ}{M}$. On sait montrer que, pour $c \in M''$, le compact K_c est d'intérieur vide et de mesure > 0 .

Soit $\lambda_0 \in \chi^{-1}(\overset{\circ}{M})$. Nous allons montrer que χ est holomorphe au voisinage de λ_0 en donnant des démonstrations différentes suivant que $c_0 = \chi(\lambda_0)$ appartient à M' ou à M'' .

$\alpha) \lambda_0 \in M'$: Soit W un voisinage connexe de c_0 dans M' et posons $W' = \chi^{-1}(W)$. Pour $c \in W$ notons $\rho(c)$ la valeur propre du cycle attractif de $z \mapsto z^2 + c$. On définit ainsi une application holomorphe

$\rho: W \rightarrow \mathbb{D}$. Pour $\lambda \in W'$, la valeur propre du cycle attractif de f_λ est $\rho(\chi(\lambda))$ puisque la conjuguante φ_λ est holomorphe au voisinage de ce cycle. Par suite $\rho \circ \chi$ est holomorphe sur W' . Comme ρ est holomorphe non constante et que χ est continue, χ est holomorphe.

$\beta) \lambda_0 \in M''$: Soit W (resp. W') un voisinage connexe de c_0 (resp. λ_0) dans M'' admettant une trivialisation de Sullivan-Sad-Mane τ (resp. τ'). On suppose que $W' \subset \chi^{-1}(W)$. Pour $\lambda \in W'$, posons $c = \chi(\lambda)$ et considérons le diagramme

$$\begin{array}{ccc} V'_0 & \xrightarrow{\tau'_\lambda} & V'_\lambda \\ \varphi_{\lambda_0} \downarrow & & \downarrow \varphi_\lambda \\ V_0 & \xrightarrow{\tau_c} & V_\lambda \end{array}$$

où V_0 et V'_0 sont des voisinages de K_{c_0} et K_{λ_0} respectivement (ici $\overset{\circ}{K}_{c_0}$ et $\overset{\circ}{K}_{\lambda_0}$ sont vides). Ce diagramme est commutatif sur les points périodiques de f_{λ_0} puisque ces points ne peuvent aller que sur des points périodiques de même période, que W' est connexe et que la commutativité a lieu pour $\lambda = \lambda_0$. Par suite il est commutatif sur K_{λ_0} . Comme les applications de ce diagramme sont quasi-conformes et que $\bar{\partial} \varphi_\lambda = 0$ sur K_λ , la forme de Beltrami $\theta'_\lambda = \bar{\partial} \tau'_\lambda / \partial \tau'_\lambda$ coïncide presque partout sur K_{λ_0} avec $\psi_{\lambda_0}^* \theta_c$ où $\theta_c = \bar{\partial} \tau_c / \partial \tau_c$. Dans le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \lambda & & \\ \downarrow \chi & \searrow & \\ c & \xrightarrow{\psi_{\lambda_0}^*} & \theta_c|_{K_0} \end{array}$$

la flèche horizontale est holomorphe non constante et la flèche oblique est holomorphe, comme χ est continue il en résulte que χ est holomorphe, cqfd.

5. Non-continuité de $\lambda \mapsto \varphi_\lambda$ en degré 2.

Soit $(f_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ une famille analytique d'applications à allure polynomiale de degré 2. On suppose que Λ est un voisinage de 0 dans \mathbb{C} , et que U'_λ et U_λ sont symétriques par rapport à \mathbb{R} avec $f_\lambda(\bar{z}) = \overline{f_\lambda(z)}$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$. On choisit pour tout λ une équivalence hybride $\varphi_\lambda: V_\lambda \rightarrow \mathbb{C}$, de f_λ avec un polynôme $P_\lambda: z \mapsto z^2 + \chi(\lambda)$, de façon que les φ_λ soient quasi-conformes avec un rapport borné au voisinage de 0, que V_λ contienne un voisinage fixe de K_0 pour λ voisin de 0, avec V_λ symétrique par rapport à \mathbb{R} et $\varphi_\lambda(\bar{z}) = \overline{\varphi_\lambda(z)}$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$. (Ici on ne suppose pas nécessairement les φ_λ obtenus par applications de la Proposition 6). De toute suite (λ_n) tendant vers 0, on peut extraire une suite (λ_{n_k}) telle que les $\varphi_{\lambda_{n_k}}$ aient une limite $\tilde{\varphi}$, équivalence quasi-conforme de f_0 avec un polynôme $\tilde{P}: z \mapsto z^2 + \tilde{c}$.

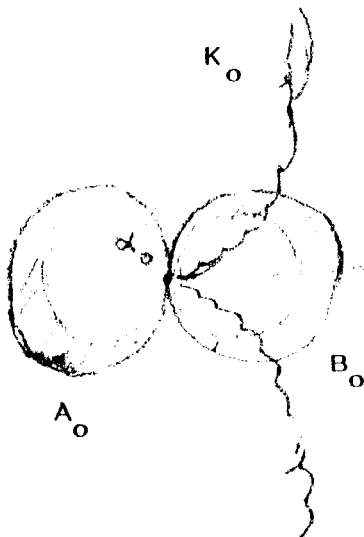
On suppose que f_0 a un point fixe α_0 avec $f'_0(\alpha_0) = 1$, et que pour $\lambda > 0$ l'application f admet 2 points fixes conjugués α_λ et $\bar{\alpha}_\lambda$, nécessairement répulsifs. Alors $\chi(0) = 1/4$, $\chi(\lambda) > 1/4$ pour $\lambda > 0$, et $\tilde{c} = 1/4$ d'après la Prop. 4.

PROPOSITION 10. - Dans les conditions ci-dessus, on a $\tilde{\varphi} \neq \varphi_0$ si $\lambda_n > 0$ pour tout n , à moins que f_0 ne soit holomorphiquement équivalente à $z \mapsto z^2 + 1/4$.

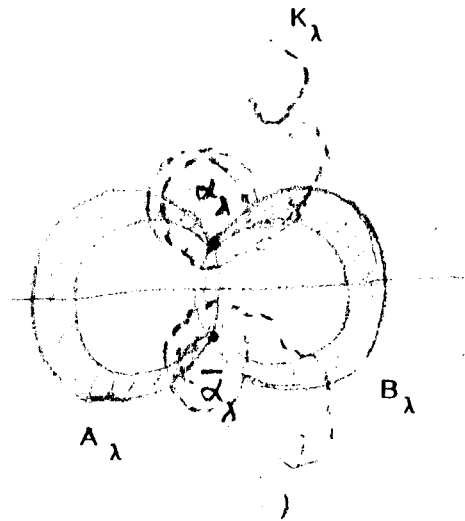
Démonstration: Si $A \subset U_\lambda$ est un ouvert, on notera A/f_λ le quotient de A par la relation d'équivalence identifiant x à $f_\lambda(x)$ si x et $f_\lambda(x)$ appartiennent à A . Soit $u > 0$. Pour $\lambda \geq 0$, notons A_λ (resp. B_λ) le disque ouvert centré en $\text{Ré}(\alpha_\lambda) - u$ (resp. $\text{Ré}(\alpha_\lambda) + u$) dont le bord passe par α_λ et $\bar{\alpha}_\lambda$, posons $X_\lambda = A_\lambda/f_\lambda$ et $Y_\lambda = B_\lambda/f_\lambda$. Si u et λ sont assez petits, X_λ et Y_λ sont isomorphes au cylindre \mathbb{C}/\mathbb{Z} . Pour $\lambda > 0$, on peut identifier X_λ et Y_λ à $(A_\lambda \cup B_\lambda)/f_\lambda$, d'où un isomorphisme $E_\lambda: X_\lambda \rightarrow Y_\lambda$ commutant avec la conjugaison. Il n'y a pas de E_0 , mais si (λ_n) est une suite de nombres > 0 tendant vers 0, on peut en extraire une suite (λ_{n_k}) telle que les $E_{\lambda_{n_k}}$ donnent par passage à la

limite un isomorphisme $\tilde{E}: X_0 \rightarrow Y_0$.

Pour tout λ , la forme de Beltrami $\mu_\lambda = \partial \bar{f}_\lambda / \partial f_\lambda$ est invariante par f_λ , d'où pour $\lambda \geq 0$ des formes de Beltrami μ_λ^X et μ_λ^Y sur X_λ et Y_λ respectivement. Pour $\lambda > 0$, on a $\mu_\lambda^X = E_\lambda^* \mu_\lambda^Y$. Il en résulte que, si (λ_n) est une suite telle que (f_{λ_n}) et (E_{λ_n}) aient des limites \tilde{f} et \tilde{E} , en posant $\tilde{\mu} = \partial \tilde{f} / \partial \bar{\tilde{f}}$, on a $\tilde{\mu}^X = \tilde{E}^* \tilde{\mu}^Y$. Si $\tilde{f} = f_0$, on a donc $\mu_0^X = \tilde{E}^* \mu_0^Y$. Mais $\mu_0^X = 0$, du moins si $\omega_0 < \alpha_0$ (en notant ω_0 le point critique de f_0) et u assez petit, ce qu'on peut supposer, car alors $A_0 \subset K_0$. On a alors aussi $\mu_0^Y = 0$, d'où $\mu_0 = 0$ sur B_0 . Or l'ensemble $K_0 \cup B_0$ est un voisinage de α_0 . On a donc $\mu_0 = 0$ au voisinage de α_0 , et comme μ_0 est invariante par f_0 on en déduit que $\mu_0 = 0$ sur un voisinage de K_0 . Autrement dit f_0 est une équivalence holomorphe de f_0 avec P_0 , *qfd*.



$\lambda = 0$



$\lambda > 0$

6. Non-continuité de $\lambda \mapsto P_\lambda$ en degré 3.

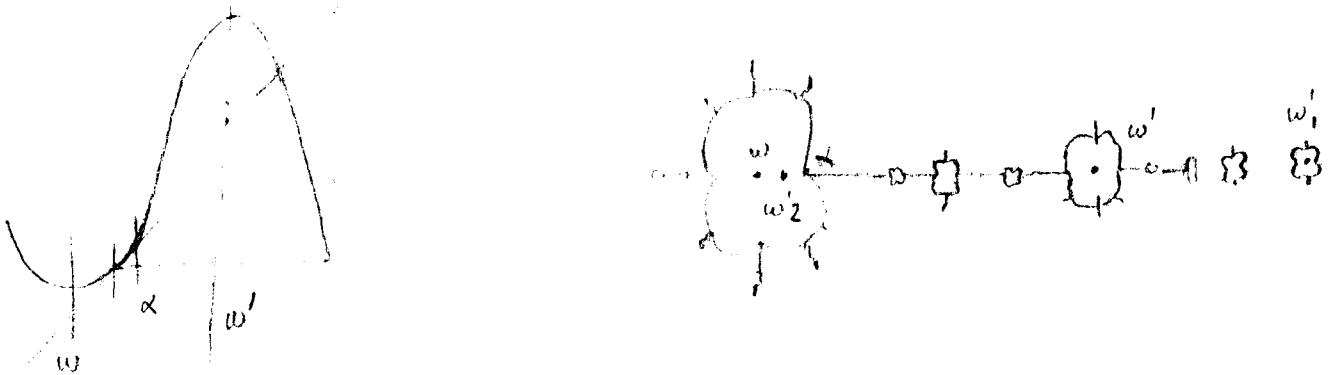
comportant

Nous indiquons comment construire un exemple / une famille analytique $\underline{f} = (f_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ d'applications à allure polynomiale de degré 3, une suite (λ_n) de points de $M_{\underline{f}}$ tendant vers un point λ_0 , avec $f_{\lambda_n} \underset{hb}{\sim} P_n$, $f_{\lambda_0} \underset{hb}{\sim} P_0$, la suite (P_n) ayant pour limite un polynôme \tilde{P} non affinement conjugué à P_0 .

Soit $f: U' \rightarrow U$ une application à allure polynomiale satisfaisant aux propriétés suivantes:

- (i) U et U' sont symétriques par rapport à $\underline{\mathbb{R}}$ et $f(\bar{z}) = \overline{f(z)}$;
- (ii) f admet un point fixe $\alpha \in U' \cap \underline{\mathbb{R}}$ avec $f'(\alpha) = 1$, $f''(\alpha) > 0$;
- (iii) f admet deux points critiques ω et ω' dans $U' \cap \underline{\mathbb{R}}$, avec $\omega < f^2(\omega') < \alpha < \omega'$.

Le graphe de $f|_{\underline{\mathbb{R}}}$ et K_f ont alors l'allure suivante:



(exemple: $z \mapsto z + z^2 - 0.29 z^3$)

ouverts

Soient A et B deux disques/de rayon u petit, centrés en $\alpha - u$ et $\alpha + u$ respectivement. Alors A est contenu dans la composante connexe V de $\overset{\circ}{K}$ contenant ω , et les quotients $X = A/f$ et $Y = B/f$ sont isomorphes au cylindre $\underline{\mathbb{C}}/\underline{\mathbb{Z}}$. Les orbites directes de ω et ω' définissent des points $\hat{\omega}$ et $\hat{\omega}'$ de X . Soit Ψ un isomorphisme $\underline{\mathbb{C}}$ -analytique de X sur $\underline{\mathbb{C}}/\underline{\mathbb{Z}}$, commutant avec la conjugaison et à dérivée > 0 . On note $\theta(f)$ l'élément $\Psi(\hat{\omega}') - \Psi(\hat{\omega})$ de $\underline{\mathbb{R}}/\underline{\mathbb{Z}}$; cet élément ne dépend pas du choix de Ψ .

Si $f \underset{hb}{\sim} P$, on a $\theta(P) = \theta(f)$ puisque la conjuguée est holomorphe sur $\overset{\circ}{K}$ et $A \subset \overset{\circ}{K}$. Si μ est une forme de Beltrami sur V invariante par f , on définit à partir de μ une forme μ^X sur X , et on pose

$$\theta_\mu(f) = \psi_\mu(\hat{\omega}) \quad \text{où } \psi : X \rightarrow \mathbb{C}/\mathbb{Z} \text{ est un difféomorphisme tel que } \bar{\partial}\psi_\mu/\partial\psi_\mu = \mu^X.$$

Soit $\underline{f} = (f_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ une famille analytique d'applications à allure polynomiale de degré 3. On suppose que Λ est un voisinage de 0 dans $\underline{\mathbb{C}}$, que f_0 vérifie (i), (ii) et (iii), que f_λ vérifie (i) pour λ réel, et que pour $\lambda > 0$ l'application f_λ a deux points fixes conjugués α_λ et $\bar{\alpha}_\lambda$ voisins de α_0 . Pour λ réel voisin de 0, on a $\lambda \in M_{\underline{f}}$. En effet, pour $\lambda = 0$, en posant $I = [\omega, f(\omega)]$, on a $\omega' \in \overset{\circ}{I}$ et $f(I) \subset \overset{\circ}{I}$; ces propriétés subsistent pour λ voisin de 0 et elles entraînent que $\lambda \in M_{\underline{f}}$.

Pour $\lambda > 0$, on peut définir X_λ , Y_λ et $E_\lambda : X_\lambda \xrightarrow{\sim} Y_\lambda$ comme au n° précédent. A l'aide de la Prop. 6, construisons pour chaque λ une équivalence hybride H_λ de f_λ sur un polynôme P_λ . Soit (λ_n) une suite de réels > 0 tendant vers 0 telle que les suites (H_{λ_n}) et (E_{λ_n}) aient des limites \tilde{H} et \tilde{E} . L'application \tilde{H} est une équivalence quasi-conforme de f_0 sur $\tilde{P} = \lim P_{\lambda_n}$, et $\tilde{\mu} = J\tilde{H}/\partial\tilde{H}$ vérifie $\tilde{\mu}^X = \tilde{E}^* \tilde{\mu}^Y$. On a $\theta(P_0) = \theta(f_0)$ et $\theta(\tilde{P}) = \theta_{\tilde{\mu}}(f_0)$. On a $\tilde{\mu}^Y = \mu_0^Y$ sur l'image dans Y de $\theta \cap (\underline{\mathbb{C}} - K_{f_0})$, et on peut montrer - c'est assez délicat - que l'on peut choisir f_0 de façon que cela assure que $\theta(f_0) \neq \theta_{\tilde{\mu}}(f_0)$. On a alors $\tilde{P} \neq P_0$, cqfd.

7. Non-holomorphie de $\lambda \mapsto P_\lambda$ en degré 2.

Soit $\underline{f} = (f_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ une famille analytique d'applications à allure polynomiale de degré 2. On note ω_λ le point critique de f_λ , on suppose que Λ est un voisinage de 0 dans $\underline{\mathbb{C}}$, qu'on a une fonction analytique $\lambda \mapsto \alpha_\lambda$ telle que α_λ soit point fixe répulsif de f_λ pour tout λ , et que $f_0^k(\omega_0) \neq \alpha_0$. Posons $\rho(\lambda) = f'_\lambda(\alpha_\lambda)$, et soit g_λ un inverse de f_λ au voisinage de α_λ avec $g_\lambda(\alpha_\lambda) = \alpha_\lambda$. Choisissons des $\alpha_{0,n}$ tels que $\alpha_{0,0} = \alpha_0$, $\alpha_{0,n+1} \in f_0^{-1}(\alpha_{0,n})$, $\alpha_{0,n} \neq \omega_0$ pour tout n et $\alpha_{0,n+1} = g_0(\alpha_{0,n})$ pour n assez grand. Pour λ voisin de 0, on peut définir des $\alpha_{\lambda,n}$ avec $\alpha_{\lambda,0} = \alpha_\lambda$, $\alpha_{\lambda,n+1} \in f_\lambda^{-1}(\alpha_{\lambda,n})$, dépendant continûment - donc analytiquement - de λ . On a encore $\alpha_{\lambda,n+1} = g_\lambda(\alpha_{\lambda,n})$ pour n grand. Si le zéro de $\lambda \mapsto f_\lambda^k(\omega_\lambda) - \alpha_\lambda$ en 0 est simple, il existe une suite $(\lambda_n)_{n \geq n_0}$ tendant vers 0, telle que $f_{\lambda_n}^k(\omega_{\lambda_n}) = \alpha_{\lambda_n,n}$; le rapport λ_{n+1}/λ_n tend vers $1/\rho(0)$.

Avec les notations du n° 4, posons $c_0 = \chi(0)$, $a_{c_0} = \varphi_0(\alpha_0)$ et $a_{c_0,n} = \varphi_0(\alpha_{0,n})$. Pour c voisin de c_0 , le polynôme $P_c: z \mapsto z^2 + c$ a un point fixe répulsif a_c voisin de a_{c_0} et on peut définir des $a_{c,n}$ tels que $a_{c,0} = a_c$, $a_{c,n+1} \in P_c^{-1}(a_{c,n})$, dépendant analytiquement de c . Si le zéro de $c \mapsto P_c^k(0) - a_c$ en c_0 est simple (en fait, on peut montrer que c'est toujours le cas), il existe une suite $(c_n)_{n \geq n_1}$ tendant vers c_0 telle que $P_{c_n}^k(0) = a_{c_n,n}$; le rapport $(c_{n+1} - c_0)/(c_n - c_0)$ a pour limite $1/P'_{c_0}(a_{c_0})$. Il existe un voisinage V de c_0 tel que c_n soit pour $n \geq n_1$ le seul point de V vérifiant $P_{c_n}^k(0) = a_{c_n,n}$, par suite $\chi(\lambda_n) = c_n$ pour n assez grand. Si $\rho(0) = f'_0(\alpha_0) \neq P'_{c_0}(a_{c_0})$, les rapports λ_{n+1}/λ_n et $(c_{n+1} - c_0)/(c_n - c_0)$ ont des limites différentes, il en résulte que χ n'est pas holomorphe au voisinage de 0.

8. Analyticité de $\chi^{-1}(c)$ pour $c \in M$.

PROPOSITION 11.- Soit $(f_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ une famille analytique d'applications à allure polynomiale de degré 2. Pour tout $c \in M$, l'ensemble $\chi^{-1}(c)$ est un sous-ensemble \mathbb{C} -analytique de Λ .

En vertu du Th. 2, (a), l'ensemble $\chi^{-1}(c)$ est fermé. Si $c \in \overset{\circ}{M}$, le résultat découle du Th. 2, (b). Le résultat dans le cas général, (donc essentiellement quand $c \in \partial M$), est une conséquence immédiate des 3 lemmes ci-dessous.

Notons P_c le polynôme $z \mapsto z^2 + c$, soit A_c un disque fermé de rayon R grand, posons $A'_c = P_c^{-1}(A_c)$ et $Q_c = A_c - \overset{\circ}{A}'_c$ (on suppose R assez grand pour que Q_c soit homéomorphe à une couronne fermée).

LEMME 1.- Pour tout $\lambda_0 \in \Lambda$, il existe un voisinage Λ' de λ_0 dans Λ , un voisinage V de Q_c dans c et un plongement $\Psi: \Lambda \times V \rightarrow U$ de classe C^∞ , au dessus de Λ , vérifiant:

- (i) $\Psi_\lambda(P_c(w)) = f_\lambda(\Psi_\lambda(w))$ pour w voisin de $\partial A'_c$;
- (ii) pour tout $w \in V$, l'application partielle $\lambda \mapsto \Psi(\lambda, w)$ est analytique.

Posons alors $\mu_\lambda^0 = \partial \Psi / \partial \Psi_\lambda$ sur Q_c , $\mu_\lambda^k = (P_c^k)^* \mu_\lambda^0$ sur $P_c^{-k}(Q_c)$, et définissons μ_λ sur A en recollant les μ_λ^k et en prolongeant par 0 sur K_c .

LEMME 2.- Pour $\lambda \in \Lambda'$, les conditions suivantes sont équivalentes:

- (i) $\chi(\lambda) = c$;
- (ii) il existe un plongement $\Psi: A_c \rightarrow U_\lambda$ prolongeant Ψ_λ , vérifiant $\partial \Psi / \partial \Psi = \mu_\lambda$ et $\Psi \circ f_\lambda = P_c \circ \Psi$ sur A'_c ;
- (iii) il existe une fonction $\Psi: A_c \rightarrow \mathbb{C}$ prolongeant Ψ_λ et vérifiant $\partial \Psi / \partial \Psi = \mu_\lambda$.

LEMME 3.- Dans \mathbb{C} , soit $Q = A - \overset{\circ}{A}'$, où A et A' sont homéomorphes à \bar{D} et $A' \subset \overset{\circ}{A}$. Soient Λ une variété \mathbb{C} -analytique, $\lambda \mapsto \mu_\lambda$ une application analytique de Λ dans une boule de $L^\infty(A)$ de rayon $k < 1$ et $\lambda \mapsto \Psi_\lambda$ une application analytique de Λ dans $H^1(Q)$ vérifiant $\partial \Psi_\lambda / \partial \bar{z} = \mu_\lambda \partial \Psi_\lambda / \partial z$ sur Q . Notons X l'ensemble des λ pour lesquels Ψ_λ admet un prolongement Ψ vérifiant $\partial \Psi / \partial \bar{z} = \mu_\lambda \partial \Psi / \partial z$ sur A . Alors X est un sous-ensemble analytique de Λ .

III. DESCRIPTION DE M_f EN DEGRE 2 AVEC $\Lambda \approx D$.

1. Applications topologiquement holomorphes.

Soient X et Y des surfaces topologiques orientée et $\varphi : Y \rightarrow X$ une application continue. Si y est un point de Y qui soit isolé dans sa fibre $\varphi^{-1}(\varphi(y))$, on définit le degré local $i_y(\varphi)$ de φ en y de la façon suivante : posons $x = \varphi(y)$, soient U et V des voisinages de x et y dans X et Y respectivement homéomorphes à D et tels que $\varphi^{-1}(x) = \{y\}$ et $\varphi(V) \subset U$, et γ un lacet dans $V - \{y\}$ d'indice 1 par rapport à y . Le degré local $i_y(\varphi)$ est alors l'indice par rapport à x du lacet $\varphi(\gamma)$.

Soit M un fermé de X et posons $P = \varphi^{-1}(M)$. Nous dirons que φ est topologiquement holomorphe sur P si, pour tout $y \in P$, le point y est isolé dans sa fibre et $i_y(\varphi) > 0$. Les points de P où le degré local de φ est > 1 forment alors un fermé discret ; ils sont appelés points de ramification de φ dans P .

La proposition qui suit peut être considérée comme une variante du principe du maximum :

Proposition 12.- Avec les notations ci-dessus, supposons Y connexe, P non vide et φ topologiquement holomorphe sur P . Si $X - M$ n'a pas de composante connexe relativement compacte, il en est de même de $Y - P$.

Nous ne donnons pas la démonstration ici.

Nous dirons que P , muni de φ , est un revêtement ramifié fini de M si φ est topologiquement holomorphe sur P et induit une application propre de P dans M . dans ce cas, les images dans M des points de ramification de φ dans P forment un fermé discret T , et $P - \varphi^{-1}(T)$ est un revêtement fini de $M - T$. Si M est connexe, ce revêtement a un degré δ . Si M est connexe, compact, et si sa caractéristique d'Euler-Poincaré $EP(M)$ est définie, celle de P l'est aussi et elle est donnée par la formule de Riemann-Hurwicz :

$$EP(P) = \delta \cdot EP(M) - \sum (i_y(\varphi) - 1),$$

la somme étant prise sur les points de ramification de φ dans P .

2 . Caractère topologiquement holomorphe de χ .

THEOREME 3 .- Soit $\underline{f} = (f_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ une famille \mathbb{C} -analytique d'applications à allure polynomiale de degré 2 , avec $\Lambda \approx D$. L'application $\chi : \Lambda \rightarrow \mathbb{C}$ est topologiquement holomorphe sur $M_f = \chi^{-1}(M)$ si elle n'est pas constante.

D'après la Prop. 11 , si χ n'est pas constante, $\chi^{-1}(c)$ est discret pour tout $c \in M$. Reste à montrer qu'alors $i_\lambda(\chi) > 0$ pour tout $\lambda \in M_f$.

Soient $\lambda \in M_f$ et $c = \chi(\lambda)$; Notons \underline{R} et \underline{E} l'ouvert et le fermé complémentaire de la décomposition de Sullivan-Sad-Mane de Λ , et distinguons suivant que $\lambda \in \underline{R}$ ou $\lambda \in \underline{E}$, et que $c \in \overset{\circ}{M}$ ou $c \in \partial M$.

Mais $c \in \overset{\circ}{M} \implies \lambda \in \underline{R}$; il reste donc 3 cas à considérer:

- $\lambda \in \underline{R}$, $c \in \overset{\circ}{M}$: alors χ est holomorphe au voisinage de λ d'après le Th. 2 , (b) .
- $\lambda \in \underline{R}$, $c \in \partial M$: pour λ' voisin de λ , l'application $f_{\lambda'}$ est quasi-conformément équivalente à f_λ d'après la Prop. 7 , donc hybride-ment d'après la Prop. 4 , et χ est constante au voisinage de λ . Ceci n'est possible que si χ est constante.
- $\lambda \in \underline{E}$, $c \in \partial M$: soit Δ un disque dans Λ contenant λ et ne contenant aucun autre point de $\chi^{-1}(c)$; posons $\gamma = \partial\Delta$ et $i = i_\lambda(\chi)$. Par définition de \underline{E} , on peut trouver dans $\overset{\circ}{\Delta}$ un point λ' , suffisamment voisin de λ pour que $\chi(\gamma)$ soit d'indice i par rapport à $c' = \chi(\lambda')$, et tel que $f_{\lambda'}$ ait un point périodique indifférent non persistant. On peut alors trouver un point $\lambda'' \in \overset{\circ}{\Delta}$, suffisamment voisin de λ' pour que $\chi(\gamma)$ soit d'indice i par rapport à $c'' = \chi(\lambda'')$, et tel que $f_{\lambda''}$ ait un point périodique attractif, d'où $c'' \in \overset{\circ}{M}$. Alors i est la somme des $i_\mu(\chi)$ pour $\mu \in \Delta \cap \chi^{-1}(c'')$; on a $i_\mu(\chi) > 0$ pour un tel μ puisque χ est holomorphe en μ (Th. 2, (b)) et il y a au moins un terme dans la somme, pour $\mu = \lambda''$. Par suite $i > 0$,

cqfd.

3. Cas où $M_{\underline{f}}$ est compact.

Avec les hypothèses du Théorème 3, supposons $M_{\underline{f}}$ compact. Alors $M_{\underline{f}}$ muni de χ est un revêtement ramifié de M , et comme M est connexe ([1]), on peut définir le degré δ de ce revêtement, que nous appellerons degré paramétrique de la famille (f_{λ}) , par opposition au degré en variable qui est ici 2. En notant ω_{λ} le point critique de f_{λ} pour $\lambda \in \Lambda$, le degré paramétrique δ est le nombre de valeurs de λ pour lesquelles $f_{\lambda}(\omega_{\lambda}) = \omega_{\lambda}$, comptées avec leur multiplicité comme zéro de $\lambda \mapsto f_{\lambda}(\omega_{\lambda}) - \omega_{\lambda}$. En effet, ces valeurs sont les points de $\chi^{-1}(0)$, et on peut vérifier que les multiplicités sont les mêmes. Le degré paramétrique δ est également le nombre de tours que $f_{\lambda}(\omega_{\lambda}) - \omega_{\lambda}$ fait autour de 0 quand λ parcourt le bord d'une pièce $A \subset \Lambda$, homéomorphe à \bar{D} et contenant $M_{\underline{f}}$ dans son intérieur.

Le nombre $b_0(M_{\underline{f}})$ des composantes connexes de $M_{\underline{f}}$ est donné par

$$b_0(M_{\underline{f}}) = \delta - \sum (i_{\lambda_j}(\chi) - 1)$$

où les λ_j sont les points de ramification de χ dans $M_{\underline{f}}$. C'est la formule de Riemann-Hurwitz, compte tenu du fait que, en vertu de la Prop. 12, on a $H^1(M_{\underline{f}}) = 0$ en cohomologie de Čech.

Si $\delta = 1$, l'application χ induit un homéomorphisme de $M_{\underline{f}}$ sur M .

Si $\delta = 0$, l'ensemble $M_{\underline{f}}$ est vide.

Remarque: L'hypothèse que $M_{\underline{f}}$ est compact est satisfaite notamment s'il existe un compact $A \subset \Lambda$ tel que $f_{\lambda}(\omega_{\lambda}) \notin U_{\lambda} - U_{\lambda}'$ pour $\lambda \in \Lambda - A$.

4. Propriétés de quasi-conformité de χ .

Soit $\underline{f} = (f_\lambda : U'_\lambda \rightarrow U_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ une famille $\underline{\mathbb{C}}$ -analytique d'applications à allure polynomiale de degré 2, et pour tout λ notons ω_λ le point critique de f_λ . On suppose que U est un ouvert convexe de $\underline{\mathbb{C}}$ pour tout $\lambda \in \Lambda$, que Λ est isomorphe à \mathbb{D} et qu'il existe un compact A dans Λ tel que $f_\lambda(\omega_\lambda)$ n'appartienne pas à l'enveloppe convexe de U'_λ pour $\lambda \in \Lambda - A$. Ceci assure que $M_{\underline{f}}$ est compact, donc permet de définir le degré paramétrique δ de \underline{f} . On suppose que ce degré est 1. L'application χ induit alors un homéomorphisme de $M_{\underline{f}}$ sur M .

PROPOSITION 13.- Dans les conditions ci-dessus, l'homéomorphisme $\chi : M_{\underline{f}} \rightarrow M$ est quasi-conforme au sens de Mane-Sad-Sullivan.

Démonstration: Par un changement de variable affine pour chaque λ , on se ramène au cas où pour tout λ on a $\omega_\lambda = 0$ et $f''(\omega_\lambda) = 2$, autrement dit $f_\lambda(z) = z^2 + c(\lambda) + O(z^3)$. La fonction $c : \Lambda \rightarrow \underline{\mathbb{C}}$ a un zéro simple en un point λ_0 . On peut identifier Λ à un ouvert de $\underline{\mathbb{C}}$ de façon que $\lambda_0 = 0$ et $c'(0) = 1$. On a alors $f_\lambda(z) = z^2 + \lambda + O(|z|^3 + |\lambda|^2)$. Quitte à rétrécir légèrement Λ , on peut enfin supposer que la distance de U' au complémentaire de U est minorée par un nombre $m > 0$ indépendant de λ .

Pour $s \in \underline{\mathbb{C}}^*$, posons $\Lambda_s = \frac{1}{s^2} \Lambda$, et pour $\lambda \in \Lambda_s$ posons $U'_{s,\lambda} = \frac{1}{s} U'_{s^2\lambda}$ et $U_{s,\lambda} = \frac{1}{s^2} U_{s^2\lambda}$. Définissons $f_{s,\lambda} : U'_{s,\lambda} \rightarrow U_{s,\lambda}$ par $f_{s,\lambda}(z) = \frac{1}{s^2} f_{s^2\lambda}(sz)$.

On pose $f_{0,\lambda}(z) = z^2 + \lambda$. L'application $(s,\lambda,z) \mapsto f_{s,\lambda}(z)$ ainsi prolongée est définie et analytique sur un ouvert de $\underline{\mathbb{C}}^3$ contenant $\{0\} \times \underline{\mathbb{C}}^2$.

ouvert connexe

On vérifie alors qu'il existe un voisinage W de $[0,1]$ dans $\underline{\mathbb{C}}$ tel que, pour $\lambda \in W - \{0\}$ la famille $\underline{f}_s = (f_{s,\lambda})_{\lambda \in \Lambda_s}$ soit une famille analytique d'applications à allure polynomiale de degré 2 avec $M_s = M_{\underline{f}_s}$ compact, de degré paramétrique 1, d'où un homéomorphisme $\chi_s: M_s \rightarrow M$. Pour $s = 0$, posons $M_0 = M$ et $\chi_0 = \text{id}$. Il résulte du Th. 2 (b) et du Théorème des fonctions implicites que, pour tout $x \in M$, la fonction $s \mapsto \chi_s^{-1}(x)$ est holomorphe sur W (c'est d'ailleurs le cas pour tout $x \in M$ en vertu de la Prop. 11). Ces fonctions sont évidemment à graphes disjoints. On peut donc appliquer le lemme qui figure dans l'article de Sullivan-Sad-Mané sous le nom de " λ -lemma" (bien qu'ici le paramètre soit s et λ la variable): pour tout s l'application $\chi_s^{-1}: M_0 \rightarrow M_s$ est quasi-conforme au sens donné dans cet article. Comme $M_1 = M_{\underline{f}}$, la Proposition en résulte, cqfd.

CONJECTURE: Pour toute famille $\underline{\mathbb{C}}$ -analytique $\underline{f} = (f_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ d'applications à allure polynomiale de degré 2, avec $\Lambda \approx D$, on peut trouver un homéomorphisme quasi-conforme ρ de Λ sur D et une application analytique $\pi: D \rightarrow \underline{\mathbb{C}}$ tels que χ coïncide avec $\pi \circ \rho$ sur $M_{\underline{f}}$.

Dans cette direction, signalons le résultat suivant: si $\underline{f} = (f_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ est une famille analytique d'applications à allure polynomiale avec $\Lambda \approx D$, de degré 2, pour tout $\lambda_0 \in M_{\underline{f}}$ on peut trouver un voisinage Λ' de λ_0 dans Λ et choisir Ψ au dessus de Λ' dans la Prop. 6 de façon que l'application $\chi: \Lambda' \rightarrow \underline{\mathbb{C}}$ construite à partir de Ψ soit quasi-conforme sur $\Lambda' - M_{\underline{f}}$. Il suffit pour cela de choisir Ψ telle que $\lambda \mapsto \Psi^{-1}(\lambda, x)$ soit analytique sur Λ' pour tout $x \in Q_r$.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] A. DOUADY, J.H. HUBBARD.- Itération des polynômes quadratiques complexes, C.R.A.S., t. 294 (18 janvier 1982).
- [2] A. DOUADY.- Systèmes dynamiques holomorphes. Séminaire Bourbaki n° 599 (novembre 1982).
- [3] R. MANE, P. SAD et D. SULLIVAN.- On the dynamics of rational maps.
A paraître aux Annales de l'E.N.S.

Ecole Normale Supérieure
Centre de Mathématiques
45, rue d'Ulm
75230 PARIS CEDEX 05