Recherche Coopérative sur Programme n° 25

V. Rivasseau
A. S. Wightman

Non Perturbative Dimensional Interpolation

Les rencontres physiciens-mathématiciens de Strasbourg - RCP25, 1980, tome 28
« Conférences de : H. Araki, B. Malgrange et V. Rivasseau, A.S. Wightman », , exp. n° 1, p. 0-41
<http://www.numdam.org/item?id=RCP25_1980__28__0_0>

© Université Louis Pasteur (Strasbourg), 1980, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Recherche Coopérative sur Programme n° 25 » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Non Perturbative Dimensional Interpolation*

V. Rivasseau**

and

A.S. Wightman

Princeton University

Department of Physics
Princeton, New Jersey
08544 U.S.A.

ABSTRACT

We propose a program for constructing non-perturbative dimensional interpolation of the ϕ^4 model in the super-renormalizable region $\mathrm{Re}\,\nu < 4$. As a first step in this direction, we deduce the local existence of the Borel transform of the interpolated perturbative series of the model, near the origin, from a very simple exponential bound on contributions of individual diagrams in the region $\mathrm{Re}\,\nu < \frac{10}{3}$.

*This paper is partly an elaboration of a talk by the second-named author at the Strasbourg Meeting, June 1978 (RCP 25 of the CNRS). It contains also some results of the first-named author's third cycle thesis at the University of Paris VI. Both authors thank the Centre de Physique Théorique of the Ecole Polytechnique for hospitality during 1977-1978.

**On leave from Centre de Physique, Ecole Polytechnique

Interpolation Dimensionelle Non-perturbative

V. Rivasseau

and

A.S. Wightman

Université de Princeton
Département de Physique
Princeton, New Jersey
08544 U.S.A.

Au cours de ces dernières années, la théorie constructive des champs relativistes quantifiés a atteint l'un de ses objectifs fondamentaux. On dispose maintenant d'une famille de modèles théoriques, dans l'espace temps de dimension deux et trois, dont les prévisions sont raisonnables du point de vue physique. Nous ne voudrions pas dire que tous les problèmes concernant ces modèles sont résolus; par example il subsiste toujours celui de la "complétude asymptotique". Néanmoins nous pensons qu'aujourd'hui, sans aucun doute, les rêves des pionniers de la théorie quantique des champs sont réalisés par ces modèles, super-renormalisables; les sceptiques ont battu en retraite car ces théories décrivent des champs relativistes vraiment en interaction.

Le problème fondamental s'est déplacé; est ce que les théories renormalisables mais non super-renormalisables ont aussi des solutions intéréssantes? La contribution présente n'apporte pas de réponse à cette question. Nous avons plutôt tenté de mieux comprendre la différence entre les théories super-renormalisables et strictement renormalisables, en étudiant un modèle ϕ^4_ν , comme fonction de la dimension, ν . Ce n'est pas une idée nouvelle, mais elle n'a pas encore été développée dans le cadre de la théorie constructive des champs.

On sait bien, par contre, interpoler et renormaliser dimensionelle-

ment les termes de la série perturbative du modèle, comme nous le rappelerons. Notre projet est de prendre ces résultats bien établis pour point de départ afin de construire les quantités fondamentales de la théorie, les fonctions de Schwinger, par sommation de Borel. On étudiera la théorie euclidienne comme il est d'usage désormais. Dans le présent article nous nous contentons d'expliquer la méthode proposée et de démontrer un premier résultat , à savoir l'existence et l'analyticité de la transformée de Borel de la série des perturbations dans un disque autour de l'origine, pour Re $\nu < \frac{10}{3}$, ν désignant la dimension d'espace temps. Nous espérons étendre bientôt ce résultat à tout le domaine superrenormalisable, Re $\nu < 4$. Nous commençons par une revue des points de vue généralement admis sur ce sujet mais non rigoureusement démontrés, puis des résultats rigoureux de la théorie constructive; le lecteur connaissant ces questions peut passer directement au paragraphe III.

I. La "sagesse conventionnelle" concernant le modèle $\lambda\phi^4_\nu$ comme fonction de ν

Nous allons considérer deux sortes de quantités attachées au modèle: les fonctions de Schwinger $S^{(k)}$ $k = 0,1,2...$ dont l'expression formelle dans un espace-temps de dimension ν est:

$$S^{(k)}(x_1...x_k) = \lim_{|\Lambda|\to\infty} Z(\Lambda)^{-1} \int D\phi \prod_{j=1}^{k} \phi(x_j) \exp - \int_\Lambda \{((\partial\phi)^2 + m_0^2\phi^2) + \lambda\phi^4\} d^\nu x \tag{1}$$

$$Z(\Lambda) = \int \phi \exp - \int_\Lambda \{\tfrac{1}{2}(\partial\phi^2 + m_0^2\ \phi^2) + \lambda\phi^4\} d^\nu x \tag{2}$$

et la pression, p , donnée par:

$$p = \lim_{\Lambda\to\infty} \frac{1}{|\Lambda|} \ \ell n\ Z(\Lambda) \tag{3}$$

où Λ est mesurable borné, et $|\Lambda|$ son volume.

Ce n'est qu'une expression formelle parce qu'on doit d'abord ajouter à l'éxposant des contretermes nécessaires pour la renormalisation; et même alors des difficultés subsistent pour montrer que les intégrales sont bien définies et que la limite thermodynamique $|\Lambda| \to \infty$ peut être effectuée.

De ces fonctions de Schwinger on passe aux fonctions de Schwinger tronquées $S^{(n)T}$. Par exemple:

$$\begin{aligned} S^{(4)T}(x_1,x_2,x_3,x_4) = {} & S^{(4)}(x_1,x_2,x_3,x_4) - S^{(2)}(x_1,x_2)S^{(2)}(x_3,x_4) \\ & - S^{(2)}(x_1,x_3)S^{(2)}(x_2,x_4) - S^{(2)}(x_1,x_4)S^{(2)}(x_2,x_3) \end{aligned} \tag{4}$$

Plus généralement $S^{(n)T}$ est définie par l'éxpression:

$$S^{(n)T}(x_1,\dots x_n) = \sum_{\substack{\text{toutes les partitions} \\ A_1,\dots A_p \text{ de } [1,\dots n]}} (-1)^{p+1} \prod_{k=1}^{p} S^{|Ak|}(x_{k1},\dots,x_{k|A_k|}) \qquad (5)$$

où $A_k = \{k1,\dots k|A_k|\}$. Pour l'interaction ϕ^4 et les solutions symétriques selon $\phi \to -\phi$, les fonctions de Schwinger d'ordre impair sont nulles ce qui explique la formule (4).

La transformée de Fourier de $S^{(4)T}$ est de la forme

$$S^{(4)T}(p_1,p_2,p_3,p_4) = \delta(\sum_{j=1}^{4} p_j) \prod_{j=1}^{4} \hat{S}^{(2)}(p_j)\ T^{(4)}(p_1,p_2,p_3,p_4)$$

et la constante de couplage renormalisée ordinaire est définie par:

$$g = -m^{-2}\ \Gamma^{(4)}(p_1^{(0)},\dots p_4^{(0)}) \qquad (6)$$

$p_1^{(0)},\dots p_4^{(0)}$ est un point pris par convention, en général à l'origine $p_1^{(0)} = \dots = p_4^{(0)} = 0$, ou au point, appelé point symétrique, où $p_j^0\ p_k^0 = \frac{m^2}{3}(4\ d_{jk} - 1)$; m est la masse physique d'une particule. Evidemment on a besoin d'informations théoriques sur les solutions du modèle pour savoir si ces quantités sont toutes bien définies. En fait c'est en terme de séries formelles en puissances de g que la théorie traditionnelle des perturbations est exprimée. Le coefficient de g^n est une somme de contributions étiquetées par les diagrammes de Feynman.

Une telle contribution est fourmie par une intégrale pouvant présenter des divergences quand deux arguments coïncident dans l'espace-temps: $x \sim y$ (divergence ultraviolette) ou quand certains arguments tendent vers l'infini (divergence infra-rouge). Le processus de renormalisation examine l'intégration sur tous les ensembles possibles de variables associées à un sous diagramme; lorsqu'une divergence apparaît pour un tel sous diagramme

la renormalisation la rend finie par l'addition d'un contreterme. Deux points sont donc importants; choisir judicieusement les contretermes pour obtenir un résultat fini, mais aussi respecter la structure d'un graphe avec tous ses sous graphes, lorsqu'on soustrait les contretermes, la solution étant la fameuse méthode de soustraction de Bogoliubov, Parasiuk-Hepp-Zimmermann.

Nous voyons apparaître une premiere grande classification: s'il n'existe qu'un nombre fini de diagrammes de Feynman divergents, tels qu'après leur renormalisation partout où ils apparaissent, tout diagramme de Feynman devient convergent, alors le modèle est dit superrenormalisable. Si non, le modèle est strictement renormalisable, ou peut être non-renormalisable, s'il n'y a pas d'entier ℓ tel que les diagrammes à plus de ℓ "jambes" soient convergents une fois les sous diagrammes à moins de ℓ "jambes" renormalisés.

Le modèle $\lambda\phi^4_\nu$ est superrenormalisable à $\nu = 2$ et 3.

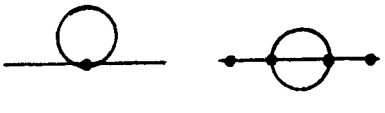
<u>En dimension 2</u>, les seuls diagrammes dont il faut renormaliser la contribution sont:

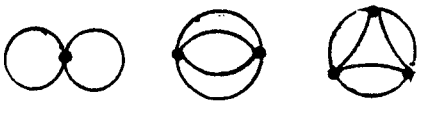
pour les fonctions de Schwinger (7)

pour la pression (8)

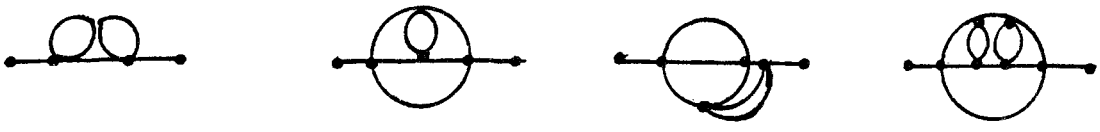
après quoi toute les contributions sont finies.

<u>En dimension 3</u>, il faut renormaliser

 pour les fonctions de Schwinger (9)

 pour la pression (10)

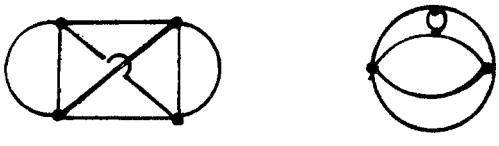
<u>En dimension 4</u>, les contributions des diagrammes précédents sont divergentes mais par surcroît:



(11)

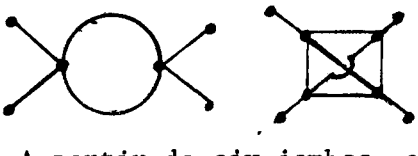
et une infinité d'autres à deux jambes.

Pour la pression, les contributions de (10) sont divergentes mais aussi:



et une infinité d'autres (12)

Les diagrammes à quatre jambes sont aussi divergents, à l'exception du diagramme trivial :



et une infinité d'autres (13)

A partir de six jambes, on n'a plus de divergences après la renormalisation des sous diagrammes divergents, de quatre jambes ou moins. Donc $\lambda\phi_4^4$ est renormalisable, mais pas superrenormalisable.

Passons maintenant a la théorie du groupe de renormalisation. Le résultat le plus important pour notre discussion est une famille de relations entre

$$\hat{S}^{(k)T}(\sigma p_1,\ldots,\sigma p_n;g,m) \qquad \sigma > 0 \tag{14}$$

et

$$\hat{S}^{(k)T}(p_1,\ldots,p_n;g(\sigma),m(\sigma))$$

Les fonctions $\sigma \to g(\sigma)$ et $\sigma \to m(\sigma)$ fournissent la masse et la constante de couplage effectives. Le comportement asymptotique de $\hat{S}^{(k)T}(\sigma p_1,\ldots\sigma p_n;g,m)$ quand σ tend vers 0 ou $+\infty$ est donc déterminé

par celui des fonctions $g(\sigma)$ et $m(\sigma)$, à son tour gouverné par la célèbre fonction β .

On peut conjecturer le comportement suivant pour la fonction $g \to \beta(g)$ des modèles ϕ_2^4 ou ϕ_3^4 :

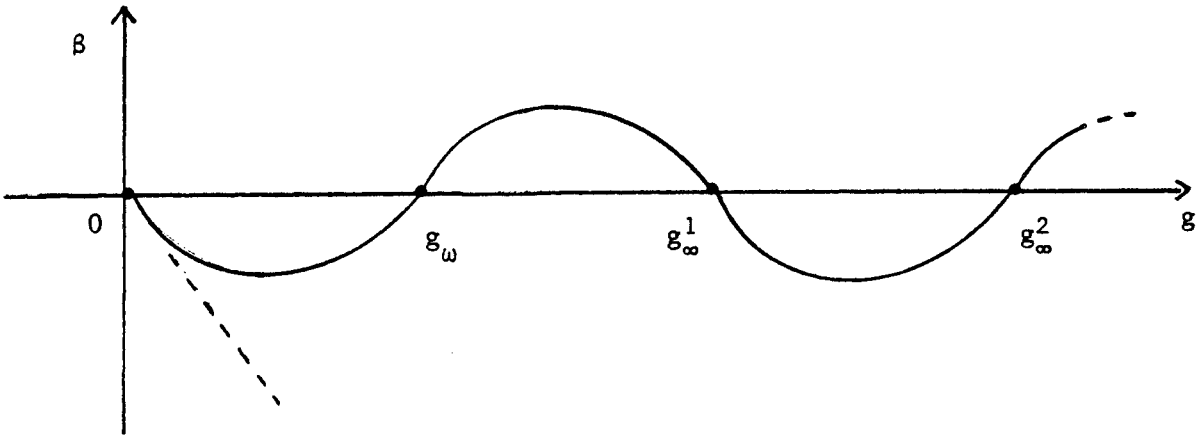


Figure 1. Fonction $\beta(g)$

L'existence de zéros tels que $\hat{g}_\infty^1$, g_∞^2 est encore une hypothèse, à l'appui de laquelle on peut citer les calculs numériques récents de N. Khuri [1]. Un zéro, g_0 , de β est attracteur infra-rouge ou ultra-violet selon que $\beta'(g_0)$ est positif ou négatif. A chaque intervalle entre deux zéros correspond une fonction $g(\sigma)$ dont la limite lorsque σ tend vers 0 (resp. $+\infty$) est l'attracteur infra-rouge (resp. ultra-violet). La théorie constructive prouve l'existence de $\beta(g)$ près de l'origine; son développement perturbatif commençant avec un terme linéaire négatif. β se comporte comme indiqué sur la figure près de l'origine. A notre connaissance l'existence de $\beta(g)$ n'a pas été

rigoureusement établie plus loin jusqu'à présent, mais on a néanmoins de très bonnes raisons de croire le dessin qualitativement exact dans l'intervalle $[0,g_\omega]$ avec $g_\omega < \infty$. [2] Le point g_ω est attracteur infra-rouge, l'origine attracteur ultra-violet. Pour les théories existant éventuellement dans l'intervalle $g_\omega < g < g^1_\infty$ le comportement ultra-violet est détérminé par le point g^1_∞ et ainsi de suite.

Fischer et Wilson ont eu l'idée remarquable d'interpoler la dimension de l'espace temps, et d'étudier des séries formelles en $(4-\nu)$ pour calculer la fonction β . Leur résultat apparaît dans la figure suivante:

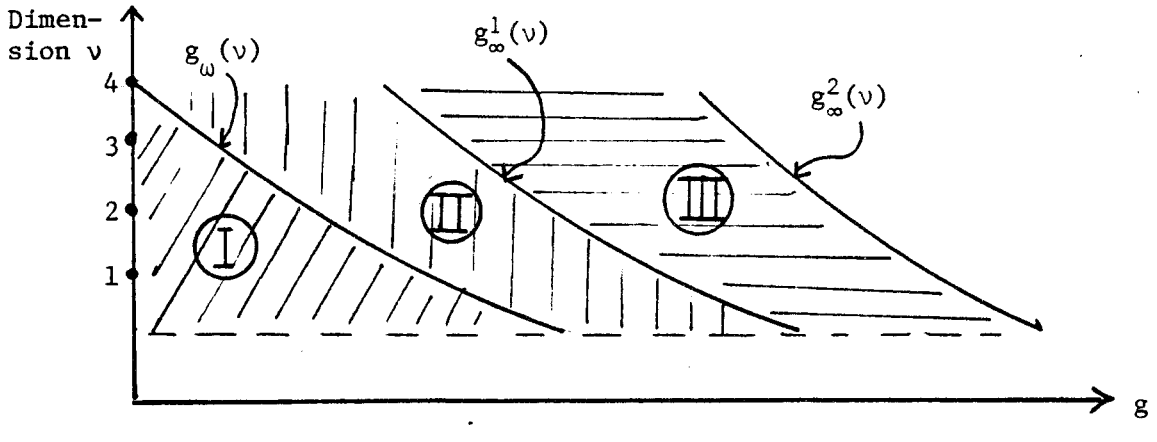


Figure 2: Comportement conjecturé des fonctions $g_\omega(\nu)$, $g^1_\infty(\nu)$,... avec une masse physique fixée

On a des séries formelles pour $g_\omega(\nu)$ près de $\nu = 4$ indiquant le comportement représenté, qui réduit le domaine (I), des théories super-renormalisables, à la théorie libre à $D = 4$. Il semble que ce soit le domaine naturel maximal pour étendre les méthodes de la théorie constructive à $D = 2$ et 3: on peut donc penser trouver une famille de fonctions de Schwinger analytiques en g et ν dans ce domaine, coïncidant avec celles des théories déja construites à $D = 2$ et 3 . Allant plus loin on peut

penser unifier également les théories dans la région II , ou la région III ; dans les deux cas le comportement ultra-violet est gouverné par g_∞^1 . Comme à $D = 4$ la théorie est strictement renormalisable on s'attend à la même chose pour $g_\omega(\nu) < g < g_\infty^2(\nu)$ et $\nu < 4$. Pour $g > g_\infty^2(\nu)$ on ne sait pas ce que l'on doit conjecturer; peut être des théories non-renormalisables dont les fonctions de Schwinger sont trop singulières pour être des distributions tempérées.

Si la vue d'ensemble ainsi esquissée est correcte il y a une sorte de transition de phase ultra-violette pour $g = g_\omega(\nu)$. A gauche les singularités ultra-violettes des fonctions de Schwinger sont superrenormalisables et déterminées par celles du champ libre. A droite elles seraient strictement renormalisables et déterminées par le comportement de la théorie avec constante de couplage $g_\infty^1(\nu)$. Jusqu'ici une telle transition de phase ultra-violette a été seulement étudiée en théorie constructive des champs, sur la frontière $g = g_\omega$ par Glimm et Jaffe [3]. C'est un problème capital ouvert, d'établir l'existence de la solution pour $g > g_\omega$.

Ici nous nous occupons d'un problème plus simple dont la solution néanmoins donnerait un appui sérieux à ces conceptions: construire une interpolation non-perturbative en dimension ν des solutions superrenormalisables.

Rappelons maintenant l'information fournie par la théorie constructive des champs sur le modèle ϕ^4 .

II. Résultats de théorie constructive des champs

Des solutions de $\lambda\phi_1^4$, $\lambda\phi_2^4$, $\lambda\phi_3^4$ ont été construites par des méthodes non-perturbatives. La renormalisation est effectuée par l'addition de contretermes à l'Hamiltonien, qui sont ceux indiqués par la théorie perturbative. En dimension 1, aucun contreterme n'est nécessaire; en dimension 2 il suffit de passer à l'ordre de Wick dans l'interaction: formellement $\lambda\phi^4 \to \lambda:\phi^4: = \lambda[\phi^4 - 6\langle\phi^2\rangle\phi^2 + 3\langle\phi^4\rangle]$. En dimension 3 on remplace $\lambda\phi^4$ par $\lambda:\phi^4:$ mais il faut en plus renormaliser les contributions des diagrammes divergents de (9) et (10)

L'interaction avec cutoff, employée par Magnen et Sénéor [4] s'écrit par exemple:

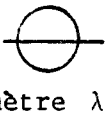
$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\pm}(\Lambda,\lambda,\kappa) &= \lambda \int :\phi^4(x):\Lambda(x)d^3x + \frac{\lambda^2}{2}\int \left(\int:\phi^4(x):\Lambda(x)d^3x\right) d\mu_{0,\kappa}(\phi) \\ &- \frac{\lambda^3}{6}\int \left(\int:\phi^4(x):\Lambda(x)d^3x\right)^3 d\mu_{0,\kappa}(\phi) - \frac{\lambda^2}{2}\,\delta m^2 \int :\phi^2:(x)\Lambda(x)\, d^3x\end{aligned} \tag{15}$$

où ϕ est une variable aléatoire gaussienne de moyenne zéro et covariance:

$$C_\kappa(x,y) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int \frac{e^{ik\cdot(x-y)}}{k^2+m^2}\,\eta_\kappa(k)\, d^3k$$

et η_κ une "fonction de cutoff"

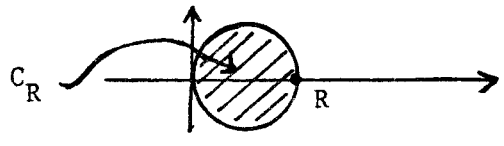
$$\eta_\kappa(k) = \eta\left(\frac{k}{\kappa}\right) \quad , \text{ où } \eta \text{ , fonction } C^\infty \text{ vaut } 0$$

pour $|k| > 2$ et 1 pour $|k| < 1$. $d\mu_{0,\kappa}$ est la mesure gaussienne associée a C_κ . Dans la construction de la solution on prend la limite ultra-violette $\kappa \to \infty$, puis thermodynamique, $\Lambda \to 1$. Le deuxième et le troisième terme dans (15) correspondent à et : le quatrième, à  .

Le paramètre λ n'étant pas renormalisé, il est naturel de considérer

un développement perturbatif des fonctions de Schwinger en λ, constante de couplage nue. Dimock a démontré que les fonctions de Schwinger de $\lambda:\phi^4:_2$ sont infiniment différentiables en λ dans un intervalle $0 \leq \lambda < \varepsilon$ pour m_0 masse nue, strictement positive. La série de Taylor a l'origine $\lambda = 0$, développement perturbatif habituel, est donc asymptotique à la solution de la théorie constructive. La détermine t'elle uniquement? Une réponse positive à cette question est la méthode de sommation de Borel, utilisant par exemple le théorème suivant (Nevanlinna, Sokal [5]).

<u>Théorème</u> Soit f analytique dans le disque $C_R = \{z/\mathrm{Re}\,\frac{1}{2} > \frac{1}{R}\}$ tangent à l'origine:

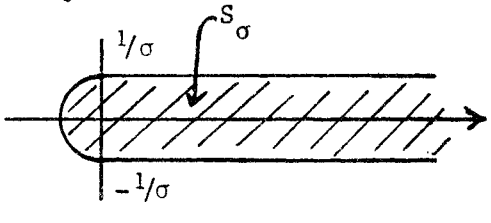


Si l'on a une série entière asymptotique à f, $\Sigma\, a_k z^k$, posons

$$R_N(z) = f(z) - \sum_{k=0}^{N} a_k z^k \quad .$$

Si
$$|R_N(z)| \leq A\sigma^N\, N!\,|z|^N \tag{17}$$

uniformément en N et $z \in C_R$, alors la transformée de Borel de f, $B(t) = \Sigma\, a_n \frac{t^n}{n!}$ converge pour $|t| < \frac{1}{\sigma}$, a une continuation analytique dans la bande $S_\sigma = \{t/\mathrm{dist}(t,R_+) < \frac{1}{\sigma}\}$:



satisfaisant la borne

$$|B(t)| \leq K \exp\left(\frac{|t|}{R}\right) \tag{18}$$

On a pour f la representation intégrale absolument convergente:

$$f(z) = \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-t/z} B(t)dt \ , \ z \in C_R \tag{19}$$

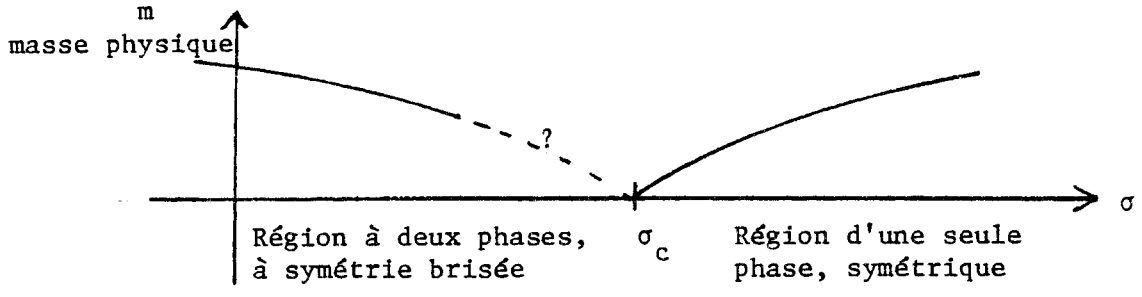
Réciproquement si $B(t)$ est analytique dans $S_{\sigma'}$ avec $\sigma' < \sigma$ et satisfait la borne (18) alors f définie par (19) est analytique dans C_R et satisfait la borne (17) uniformément dans $C_{R'}$, $R' < R$, si l'on pose $a_n = B^{(n)}(t)\big|_{t=0}$.

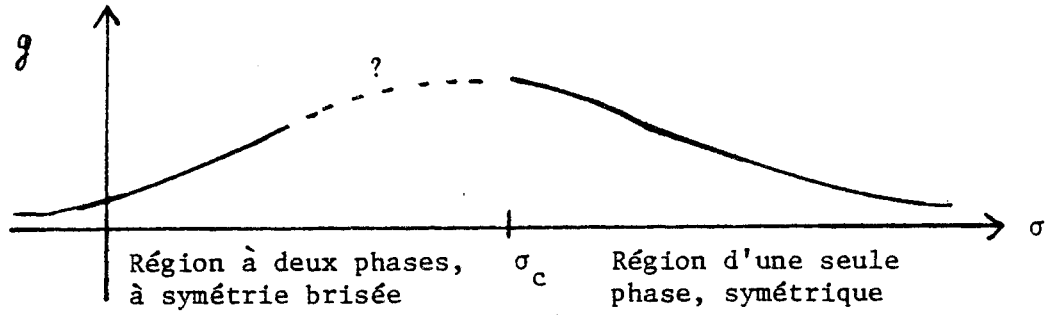
Par abus de langage on dira aussi que B est la transformée de Borel de la série $\Sigma\, a_k z^k$.

Pour $\lambda\phi_1^4$, Graffi, Grecchi et Simon ont établi que la pression est sommable de Borel. Il semble qu'une démonstration pour les fonctions de Schwinger n'est pas parue mais personne ne doute de la validité de l'assertion. Pour $\lambda\phi_2^4$ et $\lambda\phi_3^4$, Magnen et Sénéor ont établi la sommabilité de Borel pour la pression et les fonctions de Schwinger. Leur résultat, un des sommets de la théorie constructive, suggère l'approche suivante au problème d'interpolation dimensionnelle: Les coefficients de Taylor en $\lambda = 0$ des fonctions de Schwinger et de la pression sont interpolables en dimension par les processus, bien connus désormais, de la théorie de la renormalisation dimensionnelle. S'ils fournissent aussi une transformée de Borel holomorphe dans une région S_σ et telle que l'intégrale (19) converge, on peut prendre cette intégrale pour definition d'une interpolation dimensionnelle non-perturbative du modèle. On pourrait laisser la question des séries perturbatives dans la constante de couplage renormalisée, g , à une étape ultérieure.

Mentionnons que la théorie constructive établit l'existence de solutions possédant la symétrie $\phi \to -\phi$ et de solutions avec cette symétrie brisée. Pour avoir une vue d'ensemble il convient d'étudier l'effet d'une

perturbation de la forme $\frac{\sigma}{2}\phi^2$. On montre alors que pour σ assez grand la masse physique est fonction monotone croissante différentiable de σ , et qu'elle s'annule en un point σ_c . Le comportement qualitatif des paramètres physiques est donc:





Pour g petit on a donc deux types de solutions. Nous nous intéresserons désormais à la solution symétrique $(\sigma > \sigma_c)$. On sait que $g(\sigma)$ est bornée pour $\sigma > \sigma_c$, mais il reste à établir plusieurs conjectures, entre autres que $g(\sigma)$ est monotone dans cette région et que son maximum, en σ_c , vaut g_ω .

III. Interpolation dimensionelle

Retournons maintenant aux séries non renormalisées des fonctions de Schwinger non tronquées. On les obtient en développant les exponentielles $\exp - \lambda \int_\Lambda d^\nu x \phi^4(x)$ dans la formule (1):

$$S^{(b)}_{NON\ REN}(x_1,\ldots x_N) = Z(\Lambda)^{-1}\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\lambda)^n}{n!} \int_\Lambda \ldots \int_\Lambda d^\nu \xi_1 \ldots d^\nu \xi_n$$
$$\int \phi \exp - \frac{1}{2} \int_\Lambda [(\partial\phi)^2(x) + m_0^2\ \phi(x)] d^\nu x\ \phi^4(\xi_1)\ldots\phi^4(\xi_n) \prod_{j=1}^{N} \phi(x_j) \} \tag{20}$$

$$Z(\Lambda) = \sum_{n=}^{\infty} \frac{(-\lambda)^n}{n!} \int_\Lambda \ldots \int_\Lambda d^\nu \xi_1 \ldots d^\nu \xi_n \int \phi$$
$$\exp - \frac{1}{2} \int_\Lambda [(\partial\phi)^2(x) + m_0^2 \phi^2(x)] dx\ \phi^4(\xi_1)\ldots\phi^4(\xi_n) \tag{21}$$

Effectuons les intégrales gaussiennes et simplifions en remplaçant par ξ_j ; on obtient:

$$S^{(N)}_{NON\ REN}(x_1\ldots x_N) = Z(\Lambda)^{-1}\{ \sum_{n=0} \frac{(-\lambda)^n}{n!} \int_\Lambda \ldots \int_\Lambda d^\nu 1 \ldots d^\nu n [x_1 \ldots x_N 1111 \ldots nnnn]\} \tag{22}$$

$$Z(\Lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\lambda)^n}{n!} \int_\Lambda \ldots \int_\Lambda d^\nu 1 \ldots d^\nu n [1111 \ldots nnnn] \quad . \tag{23}$$

Ici le symbole $[1\ldots n]$ désigne un hafnien défini par récurrence à partir des objets $[j;k]$. Il vaut zéro pour n impair, et pour n pair:

$$[1,\ldots,n] = \sum_{j=2}^{n} [1;j][\hat{1},2,\ldots,\hat{j},\ldots n] \tag{24}$$

Dans notre cas le symbole $[j;k]$ est la fonction à deux points euclidenne:

$$[j;k] = \Delta_E(m_0^2\ ,\ j-k) \tag{25}$$

$$\Delta_E(m_0^2,x) = \frac{1}{(2\pi)^\nu} \int \frac{\exp ip\cdot x}{p^2+m^2} d^\nu x \tag{26}$$

La formule de récurrence (24) montre qu'un hafnien d'ordre n se développe en $(n-1)!!$ produits de hafniens élémentaires d'ordre 2 ($(n-1)!! = (n-1)(n-1)(n-3)\ldots 3.1$). Par conséquent le coefficient de λ^n au numérateur de (23) contient $K_{N,n} = (N+4n-1)!!$ termes. C'est à chacun de ces termes qu'est associé un diagramme de Feynman. Nous entendons par là un ensemble de $n + N$ vertex indiciés, $V_1,\ldots,V_{n+N}$, et de lignes joignant ces vertex. Aux vertex $V_1\ldots V_{n+N}$ sont associées les variables $1,\ldots,n,x_1,\ldots,x_N$, que nous appelerons aussi respectivement $\eta_1, \eta_2,\ldots\eta_{n+N}$. A un terme du développement de $[x_1,\ldots,x_N,1111\ldots nnnn]$, on associe le diagramme avec une ligne joignant V_i à V_j pour chaque hafnien élémentaire $[\eta_i;\eta_j]$ apparaissant dans le produit en question. Les vertex $V_1,\ldots V_n$ et les lignes $[\eta_i;\eta_j]_{i\leq n \text{ et } j\leq n}$ d'un diagramme G seront dits internes et forment un diagramme noté G_{int}. Les autres seront dits vertex externes ou lignes externes, "jambes". Dans notre cas (modèle ϕ^4) un vertex interne appartient à quatre lignes, un vertex externe, à une seule. Nous appelerons les diagrammes ayant cette propriété simplement "diagrammes de ϕ^4".

On a les notions topologiques habituelles pour la figure formée par les lignes du diagramme, comme la connexité. Une notion utile plus loin est celle de diagramme 2-connexe: c'est un diagramme connexe qu'on ne peut séparer en deux parties connexes en enlevant une ligne, ou bien un vertex.

Introduisons aussi le nombre de boucles indépendantes ou 1e nombre de Betti du diagramme, qui s'écrit:

$$b(G) = \ell(G) - n(G) + c(G) = b(G_{int}) \tag{27}$$

où $\ell(G)$, $n(G)$, $c(G)$ désignent le nombre de lignes internes, de vertex internes, et de composantes connexes contenant des vertex internes, de G .

On a d'ailleurs aussi:

$$b(G) = (\ell(G)+L(G)) - (n(G)+N(G)) + C(G) \tag{28}$$

$L(G)$, $N(G)$, $C(G)$ désignant le nombre de lignes externes, de vertex externes , et de composantes connexes de G . Avec ces notions notre développement prend la forme:

$$S^{(N)}_{\text{NON REN}}(x_1 \ldots x_N) = Z(\Lambda)^{-1}\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\lambda)^n}{n!} \sum_{\substack{G \text{ diagramme de } \phi^4 \\ \text{tel que } n(G)=n, N(G)=N}} I_G(x_1 \ldots x_N) \tag{29}$$

$$I_G(x_1 \ldots x_N) = \int_\Lambda \ldots \int_\Lambda d^\nu \eta_1 \ldots d^\nu \eta_n \prod_{\ell \text{ ligne de } G} \Delta_E\Big(\sum_{j=1}^{n+N} [j:k]\eta_j\Big) \tag{30}$$

où $\{(j,k), j=1,\ldots,n+N; k=1,\ldots \ell+L = \frac{4n+N}{2}$ est la matrice d'incidence définie, après orientation arbitraire des lignes de G par:

$$[j:k] = \begin{cases} +1 & \text{si la ligne } k \text{ arrive au vertex } j \text{ mais n'en part pas} \\ -1 & \text{si la ligne } k \text{ part du vertex } j \text{ mais n'y arrive pas} \\ 0 & \text{dans les autres cas.} \end{cases}$$

Remarquons qu'à chaque diagramme est ainsi associée une matrice, mais celle ci ne le caractérise en général que si le diagramme ne présente pas de "tad-pôles" ; pourtant si l'on sait que le diagramme est "de ϕ^4" , sa matrice d'incidence le détermine complètement. On peut vérifier que les fonctions de Schwinger tronquées introduites au paragraphe I ont un développement analogue mais où n'interviennent plus que des diagrammes connexes:

$$S^{(N)}_{\text{NON REN}}(x_1 \ldots x_N) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\lambda)^n}{n!} \sum_{\substack{G \text{ diagramme de} \\ \text{connexe tel que } n(G)-n, N(G)=N}} I_G(x_1 \ldots x_N) \qquad (31)$$

De même la quantité p (3) qui correspondrait à la pression grand-canonique dans le problème de mécanique statistique associé, mais qui dans notre contexte de théorie des champs serait appelée plus justement "densité d'action" admet pour développement:

$$p = \lim_{\Lambda\to\infty} \frac{1}{|\Lambda|} \ln Z(\Lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-\lambda)^n}{n!} \int d^\nu 2 \ldots d^\nu n \; [11112222\ldots nnnn]^T \qquad (32)$$

où le hafnien tronqué $[1\ldots n]^T$ est défini à partir du hafnien entier par une formule analogue à (5); son développement est indicié par les diagrammes connexes sans "jambes" à n vertex. On remarquera qu'on à utilisé l'invariance de $[11112222\ldots nnnn]^T$ par translation globale pour intéger sur la variable 1; ceci explique aussi la division par $|\Lambda|$ dans (3) et (32), en vue de construire une "densité d'action" finie.

Nous allons étudier les amplitudes I_G non-renormalisées ("nues"), pour G connexe, qui apparaissent dans le développement (31). Passons en transformée de Fourier en introduisant des variables $p_1,\ldots,p_N$ duales de $x_1,\ldots x_N$, et remplaçons Δ_E par son expression (26):

$$I_G = \frac{1}{(2\pi)^{\nu(\ell+L)}} \int d^\nu \eta_1 \ldots d^\nu \eta_{n+N} \, d^\nu q_1 \ldots d^\nu q_{\ell+L} \prod_{d=1}^{\ell+L} \frac{1}{q^2 k + m^2}$$
$$\exp\Big(-i \sum_{j=1}^{N} p_j \eta_{j+n}\Big) \exp\Big[i \sum_{k=1}^{\ell+L} q_k \Big(\sum_{j=1}^{n+N} [j:k] \eta_j\Big)\Big] \qquad (33)$$

Les intégrations sur les variables η effectuées, on obtient:

$$I_G(p\ ,\ldots,p_N) = \frac{1}{(2\pi)^{\nu(\ell+L)}} \int d^\nu q_1 \ldots d^\nu q_{\ell+L} \prod_{k=1}^{\ell+L} \left(\frac{1}{q_k^2+m^2}\right) \prod_{j=1}^{n+N} \delta\left(p_j - \sum_{k=1}^{\ell+L} [j:k] q_k\right) \qquad (34)$$

La véritable intégration se fait donc sur le sous espace défini par $(p_j - \sum_{k=1}^{\ell+L} [j:k] q_k) = 0 \quad (j=1,\ldots,n+N)$. Comme $\sum_{j=1}^{n+N} [j:k] = 0$ pour toute ligne k, ces équations entraînent

$$\sum_{j=1}^{N} p_j = 0 \qquad (35)$$

I_G est donc nul sauf s'il y a conservation du moment total c'est à dire si $\underline{p} = (p_1,\ldots p_N)$ satisfait la condition (35) ce qu'on supposera désormais. Il nous reste alors $(n+N-1)$ fonctions δ indépendantes dans (34), car G est connexe. Elles expriment la conservation des impulsions à chaque vertex. (Notons par conséquent que $\prod_{k=1}^{\ell+L} \frac{1}{(q_k^2+m^2)}$ n'est fonction que de la matrice $(\vec{p}_i \cdot \vec{p}_j)_{i,j=1,\ldots N}$ des invariants scalaires associés à $\underline{p}$.) On peut éliminer ces fonctions δ en intégrant sur $n+n-1$ variables; on conserve donc $(\ell+L) - (n+N-1) = b$ variables d'intégration, une par boucle indépendante. Mais le changement de variables introduisant ces variables de boucles privilégie arbitrairement certaines lignes du diagramme. Pour garder une forme aussi symétrique que possible nous préférons utiliser la représentation paramétrique de Schwinger. On écrit le propagateur $\frac{1}{q_k^2+m^2}$ sous la forme:

$$\frac{1}{q_k^2+m^2} = \int_0^\infty d\alpha_k \exp[-\alpha_k(q_k^2+m^2)] \qquad (36)$$

si k est une ligne interne. En inversant les intégrations en α et q et en effectuant ces dernières on obtient:

$$I_G(\underline{p}) = \frac{1}{(2\pi)^{\nu(\ell+L)}} \prod_{j=1}^{N} \frac{1}{p_j^2+m^2} \int_{[0,\infty)^\ell} \prod_{k=1}^{\ell} d\alpha_k$$
$$\frac{1}{[U_G(\alpha)]^{\nu/2}} \exp\left[- \sum_{k=1}^{\ell} \alpha_k m - V_G(\underline{p},\alpha)\right] \tag{37}$$

Nous oublierons le plus souvent le facteur multiplicatif $\frac{1}{(2\pi)^{\nu(\ell+L)}} \prod_{j=1}^{N} \frac{1}{p_j^2+m^2}$ dans I_G , qui est sans grande importance pour la suite. On appelera $d\mu_m(\alpha)$ la mesure $\prod_{k=1}^{\ell} d\alpha_k \exp - \sum_{k=1}^{\ell} \alpha_k m^2$ sur $[0,\infty)^\ell$. Les fonctions U_G et V_G ont été calculées par Symanzik:

$$U_G(\alpha) = \sum_{T \text{ arbre de } G} \prod_{k \notin T} \alpha_k \tag{38}$$

$$V_G(\underline{p},\alpha) = \frac{-1}{U_G(\alpha)} \sum_{\Delta \text{ coupure de } G} \left(\prod_{k \in \Delta} \alpha_k\right) U_{G_1}(\alpha)_{G_2}(\alpha) \vec{P}_{G_1} \cdot \vec{P}_{G_2} \tag{39}$$

Un arbre de G est un sous diagramme de G_{int} connexe sans boucle contenant tous les vertex de G_{int} . Une coupure est un ensemble de lignes de G_{int} , tel qu'après leur suppression dans G_{int} on obtienne exactement deux sous diagrammes de G_{int}, G_1 et G_2 connexes. $\vec{P}_{G_1}$ et $\vec{P}_{G_2}$ désignent la somme des impulsions externes de $\underline{p}$ arrivant aux vertex de G_1 et de G_2 . A cause de la conservation du moment (35) on a d'ailleurs $\vec{P}_{G_1} = - \vec{P}_{G_2}$ ce qui montre que $V_G(\underline{p},\alpha)$ est positif, l'espace étant euclidien. Les fonctions U_G et V_G sont globalement homogènes en α , de degré respectivement $b(G)$ et 1 .

Nous remarquons que la dimension d'espace-temps, ν, n'apparaît plus que comme l'exposant de $(U_G(\alpha))^{-\frac{1}{2}}$ dans la formule (37). I_G n'étant fonction que des invariants scalaires de $\underline{p}$ la dimension des moments n'est présente qu'indirectement, limitant le rang de la matrice $(\vec{p}_i \cdot \vec{p}_j)$. Ceci suggère

de considérer ν comme variable complexe dans (37): cette interpolation naturelle a été notamment étudiée par Speer [6] qui a montré que l'intégrale (37) est absolument convergente dans un demi plan $\mathrm{Re}\,\nu < \nu_0(G)$, et y définit une fonction analytique, prolongeable en fonction méromorphe dans tout le plan complexe, dont les pôles sont des réels rationnels, dont il a donné la position.

Plus précisément si G est un diagramme de ϕ^4 2-connexe, I_G présente des pôles propres aux rationnels de la forme:

$$\nu = 4 + \frac{N(G)-4+2k}{1+n(G) - \frac{N(G)}{2}} \qquad k \in \mathbb{N} \tag{40}$$

l'ensemble des pôles de I_G pour un diagramme G quelconque est la réunion des pôles propres de tous les sous diagrammes 2-connexes de G .

En particulier voici la situation des pôles propres d'un diagramme 2-connexe G pour les premières valeurs de $N(G)$:

$$N(G) = 0 \qquad \nu = 4 - \frac{4}{n+1} + \frac{2k}{n+1} \qquad k = 0,1,2...$$

$$N(B) = 2 \qquad \nu = 4 - \frac{2}{n} + \frac{2k}{n} \qquad k = 0,1,2...$$

$$N(G) = 4 \qquad \nu = 4 + \frac{2k}{n-1} \qquad k = 0,1,2...$$

Le point $\nu = 4$ est donc toujours le premier pôle propre d'un diagramme 2-connexe de la fonction a 4 points, le deuxième pôle propre d'un diagramme 2-connexe de la fonction à 2 points et le troisième pôle propre d'un diagramme 2-connexe de la pression. Il a d'autres particularités:

- L'ensemble des pôles $\nu < 4$ est discret; celui des pôles $\nu \geqslant 4$ est dense dans $[4,\infty)$ (tous les rationnels $\geqslant 4$)
- Un rationnel $\nu > 4$ ne peut être, éventuellement, qu'un

pôle propre d'un diagramme 2-connexe à zéro ou deux "jambes". Au contraire tout rationnel $\nu > 4$ est pour tout N un pôle propre d'au moins un diagramme à N vertex externes.

Indiquons les pôles des premières amplitudes pour la fonction à 2 points:

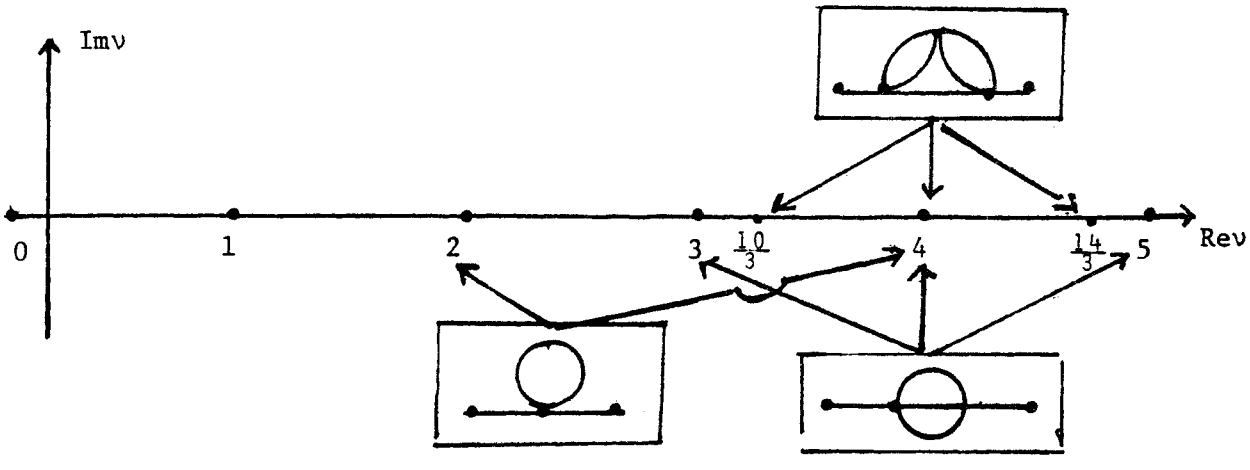


Figure 3 Pôles des diagrammes à 2 lignes externes

Si l'on ajoutait de plus en plus de graphes on verrait nettement 4 apparaître comme premier point d'accumulation.

Lorsque $\mathrm{Re}\,\nu$ est supérieur ou égal au premier pôle, $\nu_0(G)$, l'intégrale (37) n'est plus absolument convergente (comportement de $\frac{1}{U_G^{\nu/2}}$ lorsque certains α approchent 0). Il faut effectuer une renormalisation. Ignorons encore provisoirement ce problème et, pour explorer l'idée d'interpolation en dimensions, acceptons l'intégrale (37) comme définissant pour ν réel une fonction positive des invariants de $\underline{p}$, valant éventuellement $+\infty$. On voit que:

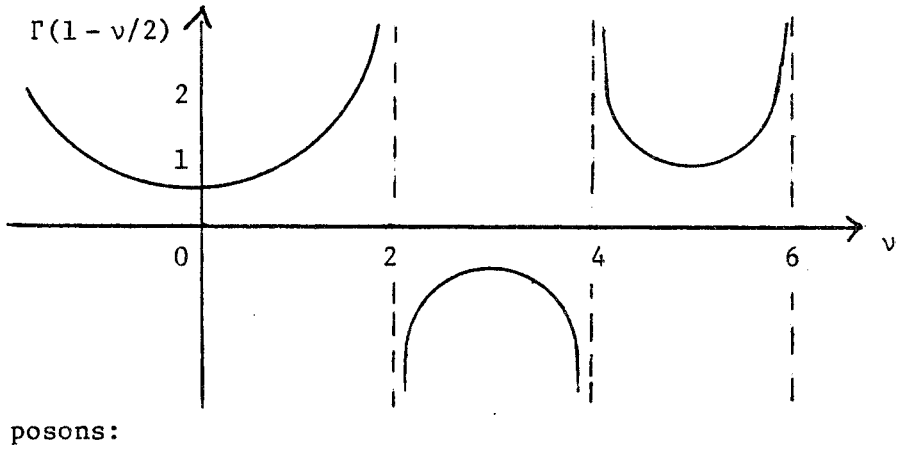
$$\frac{\partial^2}{\partial\nu^2} I_G = \int d\mu_m(\alpha)[\ell n\, U_G(\alpha)]^2 \frac{\exp -V_G(\underline{p},\alpha)}{[U_G(\alpha)]^{\nu/2}} \geqslant 0 \qquad (41)$$

Ainsi I_G est convexe en ν . On pourrait donc penser estimer par exemple $I_G(\nu)$ en termes de $I_G(1)$ et $I_G(3)$ pour $1 \leq \nu \leq 3$. En fa. cette remarque s'avère inutile parce qu'en général la renormalisation, qui nous sera nécessaire, ne respecte pas la positivité de l'intégrand (41.)

Pour mieux comprendre cet effet nous étudions les amplitudes des graphes et (diagrammes dont on oublie l'indication et les lignes externes).

$= \lambda\mu^{\mu-\nu} \dfrac{m_0^{\nu-\mu}}{(4\pi)^{\nu/2}} \Gamma(1-\nu/2)$

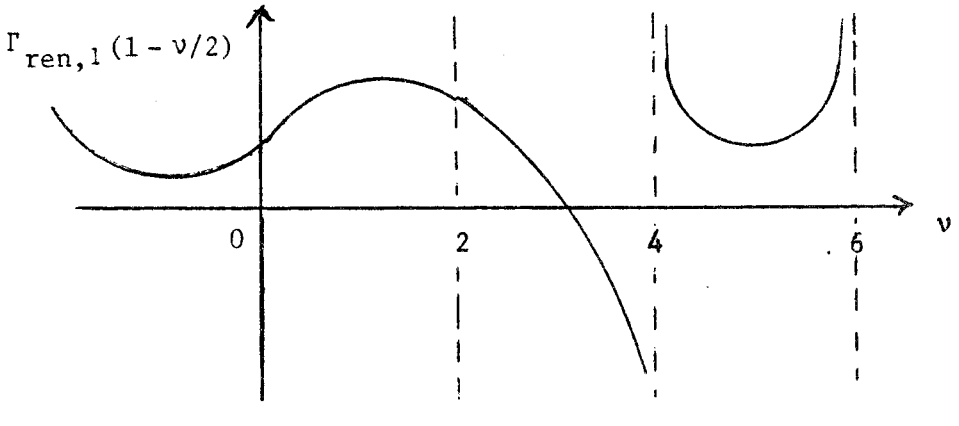
(μ est un paramètre positif). La fonction Γ a des pôles à $(1-\nu/2) = 0,-1,-2$, c'est à dire à $\nu = 2,4,6...$, de résidus -1, $1/3$, $-1/3!$, ... respectivement:



Si nous posons:

$$\Gamma_{ren,1}(1-\nu/2) = \Gamma(1-\nu/2) + \frac{1}{\nu/2-1} \qquad (42)$$

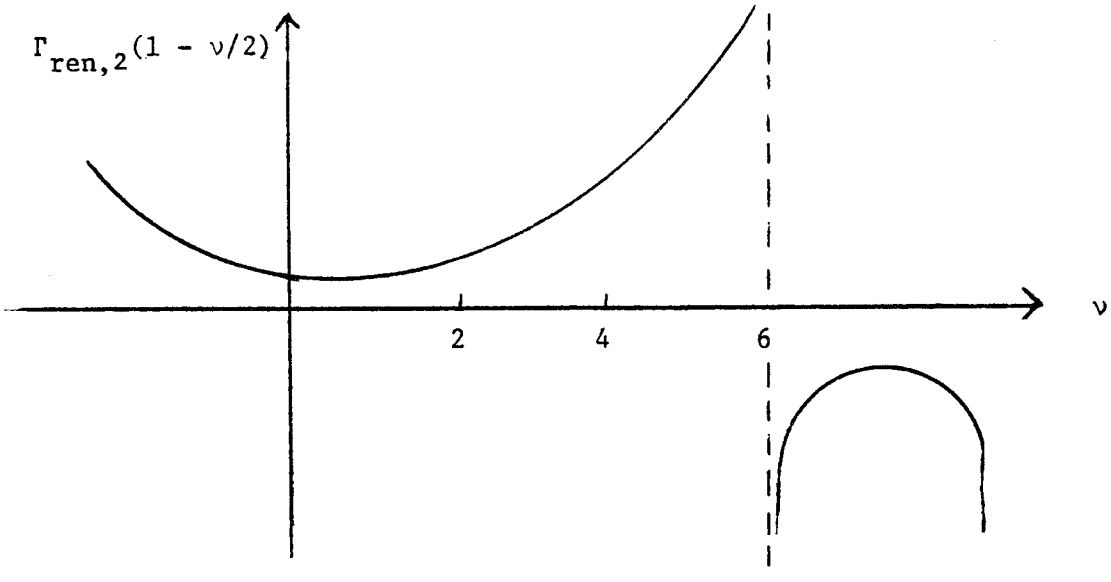
nous obtenons une fonction dont le comportement est:



Si nous posons

$$\Gamma_{ren,2}(1-\nu/2) = \Gamma(1-\nu/2) + \frac{1}{\nu/2-1} - \frac{1}{2(\nu/2-2)} \tag{43}$$

nous obtenons une fonction convexe et positive dans l'intervalle $\nu < 6$:



Bergère et David ont suggéré une représentation intégrale de la fonction:

$$\Gamma_{ren,N}(x) = \Gamma(x) - \sum_{n=0}^{N-1} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{x+n}$$

où $$\Gamma_{ren,0}(x) = \Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t}\, dt \tag{44}$$

à savoir $$\Gamma_{ren,N}(x) = \int_1^\infty t^{x-1} e^{-t} dt + \int_0^1 t^{x-1}\left[e^{-t} - \sum_{n=0}^{N-1} \frac{(-t)^n}{n!}\right] dt$$

Il est facile de montrer que pour N pair, $\Gamma_{ren,N}$ est convexe et positive sur l'intervalle $-N < x < +\infty$. Par conséquent en posant

$$[Q]_{ren,N} = g\, \mu^{4-\nu} \frac{m_0^{\nu-2}}{(4\pi)^{\nu/2}} \Gamma_{ren,N}(1-\nu/2)$$

alors $[\bigcirc]_{ren,1}$ est une amplitude bien définie dans $-\infty < \nu < 4$, mais non convexe ; $[\bigcirc]_{ren,2}$ est bien définie dans $-\infty < \nu < 6$ et reste convexe, mais nous allons voir qu'une difficulté importante apparaît, dûe à la soustraction "supplémentaire" effectuée, lorsqu'on essaie de généraliser ceci. Ainsi considérons le graphe, $\ominus$, dont l'amplitude, a une constante près, est:

$$\ominus = \int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{d\alpha_1 d\alpha_2 d\alpha_3}{(U(\alpha))^{\nu/2}} \exp\left[-\frac{\alpha_1\alpha_2\alpha_3 p^2}{U(\alpha)} - m^2(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)\right]$$

où $\qquad U(\alpha) = \alpha_1\alpha_2 + \alpha_2\alpha_3 + \alpha_3\alpha_1$

Les analogues de (42) et (43) sont, en notant θ fonction de Heaviside:

$$[\ominus]_{ren,1}(p) = \int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{d\alpha_1 d\alpha_2 d\alpha_3}{(U(\alpha))^{\nu/2}} \left\{\exp\left[-\frac{\alpha_1\alpha_2\alpha_3 p^2}{U(\alpha)} - m^2(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)\right] - \theta(1-U(\alpha))\right\} \tag{45}$$

convergent pour $-\infty < \nu < 4$, et :

$$\begin{aligned}[\ominus]_{ren,2}(p) = \int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{d\alpha_1 d\alpha_2 d\alpha_3}{(U(\alpha))^{\nu/2}} \Bigg\{&\exp\left[-\frac{\alpha_1\alpha_2\alpha_3 p^2}{U(\alpha)} - m^2(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)\right] \\ &- \theta(1-U(\alpha))\left[1 - \frac{\alpha_1\alpha_2\alpha_3 p^2}{U(\alpha)} - m^2(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)\right]\Bigg\}\end{aligned} \tag{46}$$

convergent pour $-\infty < \nu < 5$. $[\bigcirc]_{ren,2}$ donne, comme $[\bigcirc]_{ren,2}$ une fonction positive convexe en ν dans son domaine de définition. Mais il apparaît un terme proportionnel à p^2 dans (46) [7]. Introduit dans un diagramme plus compliqué, $[\bigcirc]_{ren,2}$ exigerait un procédé de renormalisation du champs aussi bien que de renormalisation de la masse, qui est seul nécessaire lorsqu'on utilise $[\bigcirc]_{ren,1}$. Comme la simplicité de notre méthode plus loin repose sur le fait que seules des renormalisations de

masse, en nombre fini sont nécessaires, nous abandonnons $[\ominus]_{ren,2}$. Systématisons maintenant la procédure de renormalisation que nous allons utiliser dans la region $\mathrm{Re}\,\nu < 4$. Bergère, Lam et Zuber [8] ont exprimé le procédé habituel, satisfaisant la récurrence BPHZ, à l'aide d'un opérateur R agissant directement sur l'intégrand de (37). Une forme particulièrement compacte pour cet opérateur est:

$$R = \prod_{S \text{ sous ensemble de } [1,\ldots,\ell(G)]} (1-\tau_s^{-\ell(s)}) \tag{47}$$

où l'opérateur de Taylor généralisé pour les variables de S , τ_s , est défini par:

$$\tau_s^n f(\alpha) = [\tau_\rho^n f(\alpha,\rho)]_{\rho=1}$$

où $f(\rho,\alpha)$ est la fonction obtenue en dilatant les α relatifs aux lignes de S : $\alpha_k \to \rho\alpha_k$ pour $k \in S$. Si $f(x)$ est une fonction de x réél, telle que $x^\nu f(x)$ (ν complexe) soit C^∞ en $x = 0$, $\tau_x^n f$, $(n \in Z)$ est la fonction:

$$[\tau_x^n f](x) = x^{-\lambda-\varepsilon}\, T_x^{n+\lambda}\, \{x^{\lambda+\varepsilon} f(x)\}$$

quel que soit λ entier , $\lambda \geqslant E(\mathrm{Re}\,\nu)$; $\varepsilon = \nu - E(\mathrm{Re}\,\nu)$, E désignant la partie entière, et T_x^n l'opérateur de Taylor usuel en $x = 0$: $[T_x^n f](x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{x^n}{n!} f^{(i)}(0)$.

Diverses formes équivalentes de l'opération R sont discutées dans [8]; remarquons que (47) ne fait intervenir la topologie de G que par l'intermédiaire du nombre de ses lignes internes.

L'amplitude renormalisée selon le schéma ordinaire de soustraction dit "à impulsions externes nulles" est alors, lorsque ν est entier:

$$I_G^R(\underline{p}) = \int d\mu_m(\alpha)\ \mathbf{R}\left[\frac{\exp - V_G(\underline{p},\alpha)}{(U_G(\alpha))^{\nu/2}}\right] \tag{48}$$

Bergère et David ont étudié la généralisation de cette formule à ν complexe. Pour un diagramme G donné, les pôles sont des rationnels isolés que l'on peut ordonner, $\nu_0, \nu_1, \ldots \nu_i \ldots$ $i \in \mathbb{N}$. L'intégrale (48) est absolument convergente pour $\nu \in \mathbb{C}$ et définit une fonction analytique de ν dans chaque bande $\nu_i < \mathrm{Re}\ \nu < \nu_{i+1}$. Cette fonction désignée par $I_G^{\nu_i}$ admet un prolongement analytique dans le demi plan $\mathrm{Re}\ \nu < \nu_{i+1}$. En général si $\mathrm{Re}\ \nu < \nu_{i+1}$ $I_G^{\nu_i}(\nu)$ et $I_G^{\nu_{i+k}}(\nu)$, $k \in \mathbb{N}^*$ différent, car $I_G^{\nu_{i+k}}$ contient davantage de soustractions. Plus généralement pour Δ réél on peut considérer

$$I_G^{\Delta}(\underline{p},\nu) = I_G^{\nu_i(\Delta,G)}(\underline{p},\nu) \quad \text{où} \quad \nu_i(\Delta,G)$$

est le plus grand pôle de G inférieur ou égal à Δ. C'est une fonction analytique dans un demi plan ouvert contrenant Δ, à savoir $\mathrm{Re}\ \nu < \nu_{i+1}(\Delta,G)$, premi pôle de G après $\nu_i(\Delta,G)$. Pour le modèle ϕ^4 et lorsque $\Delta < 4$, l'ensemble $\mathcal{P}$ des pôles strictement inférieurs à 4, discret, contient un plus petit élément strictement supérieur à Δ, $\nu_s(\Delta)$. Alors I_G^{Δ} est analytique dans un demi plan ouvert contenant Δ indépendant de G, à savoir $\mathrm{Re}\ \nu < \nu_s(\Delta)$. Cette dernière propriété est intéréssante puis que nous avons en vue de sommer les amplitudes de diagrammes différents afin de dépasser le cadre perturbatif.

Pour tout $\varepsilon > 0$, $I_G^{4-\varepsilon}(\underline{p},\nu)$ est donc une interpolation dimensionelle raisonnable dans la région $\mathrm{Re}\ \nu < \nu_s(4-\varepsilon)$ pour l'amplitude renormalisée associée à G, et fournit une première manière de bien définir notre problème: la série des perturbations de ϕ^4 est elle Borel sommable pour toutes les

dimensions ou le modele est superrenormalisable? Il suffira en effet d'examiner si pour tout $\varepsilon > 0$ la série (31) où les amplitudes sont maintenant $I_G^{4-\varepsilon}(\underline{p},\nu)$ est Borel sommable pour $\mathrm{Re}\,\nu < \nu_s(4-\varepsilon)$ (ou au moins pour $\mathrm{Re}\,\nu = 4-\varepsilon$ car nous allons voir que les deux problèmes sont équivalents).

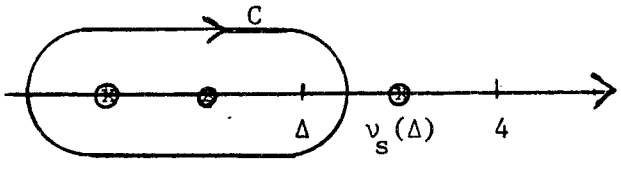
Néanmoins une interpolation dimensionelle plus naturelle encore est celle où l'on renormalise dimensionellement, c'est à dire où les contres termes satisfont d'une part au schéma récursif BPHZ , et d'autre part sont exactement des parties divergentes des séries de Laurent exprimant les amplitudes nues au voisinage des différents pôles. Cette procédure est définie et étudiée en détail dans [6]. Un de ses grands avantages est de permettre de traiter les théories plus complexes et physiquement plus réalistes que ϕ^4 , possédant des symétries de gauge, sans que la renormalisation détruise ces symétries.

Montrons comment nous voulons utiliser ce schéma de renormalisation. Selon [6] , la partie singulière du développement de Laurent d'une fonction méromorphe près d'un pôle est donnée par l'intégrale de contour:

$$K(f) = + \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\nu')}{\nu-\nu'}\, d\nu'$$

où C est un contour entourant uniquement le pôle en question. Dans [6] ce pôle est $\nu = 4$ car c'est les théories habituelles en dimension 4 qui sont en vue. On définit alors des contre termes comme partier singulières des sous graphes divergents d'un graphe, et on les soustrait dans l'amplitude I_G de façon à obtenir un résultat fini et à satisfaire aux conditions BPHZ. (Notons que cette dernière condition ne serait pas satisfaite si l'on se contenait de prendre pour amplitude renormalisée $I_G - K(I_G)$) .

Nous definissons par contre des amplitudes $I^{\Delta}_{G\ DIM}(\underline{p},\nu)$ analytiques pour $\mathrm{Re}\ \nu < \nu_s(\Delta)$ où nous extrayons tous les pôles situés avant $\nu_s(\Delta)$ par cette procédure et non plus seulement pôle $\nu = 4$. $I^{\Delta}_{G\ DIM}(\underline{p},\nu)$ est donc défini exactement de la manière récursive exposée dans [6] mais où les parties singulières retranchées s'expriment à l'aide d'un contour englobant tous les pôles inférieurs à $\nu_s(\Delta)$:



Les arguments de [6] s'appliquent alors, et prouvent que nos $I^{\Delta}_{G\ DIM}(\underline{p},\nu)$ satisfont bien la récurrence BPHZ et sont analytiques pour $\mathrm{Re}\ \nu < \nu_s(\Delta)$.

Bien que l'on ne dispose pas encore d'une forme compacte du type (47) exprimant la renormalisation dimensionelle sous la forme d'un opérateur agissant sur l'intégrand en α, cette question est étudiée activement (Pour $\nu = 4$) [9]. La solution devrait s'adapter facilement à notre problème et nous permettre d'écrire de façon compacte on représentation α les amplitudes $I^{\Delta}_{G\ DIM}(\underline{p},\nu)$. Les formules (42) et (45) sont en fait un premier exemple où l'on a trouvé une telle forme pour les amplitudes des graphes simples et .

Notre problème peut se traiter indiféremment en utilisant les séries (31) construites avec les amplitudes $I^{R}_{G}(\nu)$, $I^{\Delta}_{G}(\nu)$ ou $I^{\Delta}_{G\ DIM}(\nu)$, pour tout Δ tel que $\nu \leq \Delta < 4$. (Notons d'ailleurs que $I^{R}_{G}(\nu) = I^{\Delta}_{G}(\nu)$ si $\nu_i(G,\nu) \leq \Delta < \nu_s(\nu)$. En effet pour une dimension ν fixée, $\mathrm{Re}\ \nu < 4$, les problèmes de sommation de Borel de ces différentes séries sont tous équivalents entre eux. Ceci tient à ce que les prescriptions de renormalisation pour I^{Δ}_{G} et $I^{\Delta}_{G\ DIM}$ satisfont le schéma récursif

BPHZ [7] [8] ; nous savons qu'elles doivent se traduire par une simple différence finie dans les masses renormalisées des différentes théories obtenues; cette différence finie s'exprime elle même comme un polynôme dans la constante de couplage nue, λ , puisque l' on reste dans le cadre de théories superrenormalisables. Un tel polynôme est évidemment Borel sommable, et certaines résultats généraux [10] assurent que la composée de deux fonctions Borel sommables est Borel sommable.

Au prochain paragraphe nous exposons un premier résultat conduisant à l'analyticité de la transformée de Borel de la série perturbative près de l'origine, mais pour l'instant seulement dans la région $\mathrm{Re}\,\nu < \frac{10}{3}$. Dans ce domaine limité et pour $\Delta < \frac{10}{3}$, les prescriptions (42) et (45) sont suffisantes pour définir $I^{\Delta}_{G\ DIM}(\underline{p},\nu)$ et il ne sera pas difficile de vérifier que notre résultat s'applique effectivement aussi bien à $I^{\Delta}_{G}(\nu)$ qu'à $I^{\Delta}_{G\ DIM}(\nu)$.

A titre d'exemple comparons, dans ce domaine, les différentes amplitudes que nous avons introduites pour le graphe = G :

$\underline{\Delta < 3}$

$$I^{\Delta}_{G}(\underline{p},\nu) = I^{\Delta}_{G\ DIM}(p,\nu) = \int d\mu_m(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\ \frac{1}{[\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\alpha_2\alpha_3]^{\nu/2}}\ \exp\left(-\frac{p^2\alpha_1\alpha_2\alpha_3}{\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\alpha_2\alpha_3}\right) \tag{49}$$

analytiques pour $\mathrm{Re}\,\nu < 3$.

$\underline{3 \leq \Delta < \frac{10}{3}}$

$$I_G^{\Delta}(\underline{p},\nu) = \int d\mu_m(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3) \frac{1}{[\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\alpha_2\alpha_3]^{\nu/2}} \left\{ \exp\left[- \frac{p^2\alpha_1\alpha_2\alpha_3}{\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\alpha_2\alpha_3} \right] - 1 \right\} \tag{50}$$

$$I_{G\ DIM}^{\Delta}(\underline{p},\nu) = \int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty d\alpha_1 d\alpha_2 d\alpha_3 \frac{1}{[\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\alpha_2\alpha_3]^{\nu/2}}$$

$$\left\{ \exp\left[- \frac{p^2\alpha_1\alpha_2\alpha_3}{\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\alpha_2\alpha_3} - m^2(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3) \right] - \theta\left[1 - (\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\alpha_2\alpha_3)\right] \right\} \tag{51}$$

analytiques pour $\mathrm{Re}\ \nu < \frac{10}{3}$.

IV. Estimations d'amplitudes

Nous prendrons pour point de départ la forme (48) d'une amplitude de la théorie ϕ^4 ; nous montrerons une borne uniforme, exponentielle dans le nombre de vertex de G , ceci pour l'instant dans le domaine $\mathrm{Re}\ \nu < \frac{10}{3}$. Nous verrons pourquoi cette majoration est reliée très simplement au problème de l'existence de la transformée de Borel de la série perturbative dans un disque centré a l'origine. Bien que ces résultats ne constituent pas une surprise, de telles majorations n'ont semble t'il jamais été établies, excepté en dimension 1 par Bender, Wu [11] et Simon [12]. La référence [13] fournit néanmoins des résultats voisins, dans le cadre de la théorie minkovskienne et par une méthode différente.

Nous énonçons ces majorations dans l'espace des moments:

<u>Proposition</u> Il existe un nombre A_ν positif tel que si n désigne le nombre de vertex d'un graphe G de la théorie ϕ^4 , on ait:

$$|I_G^R(\underline{p},\nu)| \leq A_\nu^n , \qquad \forall \underline{p} , \ \forall \nu/\mathrm{Re}\ \nu < \frac{10}{3} \tag{52}$$

où $I_G^R(\underline{p},\nu)$ est défini par la formule (48) . Nous montrerons d'abord le résultat pour $\mathrm{Re}\ \nu < \frac{8}{3}$.

Pour $\mathrm{Re}\ \nu < 2$ aucune renormalisation n'est effectuée. Les arguments de Bender et Wu s'étendent sans aucune modification. Pour $2 \leq \mathrm{Re}\ \nu < \frac{8}{3}$, la renormalisation est équivalente à l'ordre de Wick et se contente d'annuler les contributions des graphes comprenant des "tad pôles" . Notons que $\frac{8}{3}$ correspond au premier graphe divergent sans "tad pôles," à savoir . Nous aurons seulement besoin d'un lemme topologique très simple.

<u>Lemme 1</u> Pour un graphe G connexe sans "tad pôles", il existe un entier k, compris entre 1 et 4, et k arbres de G différents tels que toute ligne interne de G appartienne à l'un au moins d'entre eux.

<u>Preuve</u> Le lemme est vrai parce que d'un vertex partent au plus 4 lignes. Montrons, par récurrence, qu'il existe une partition des lignes internes de G en au plus 4 sous ensembles $T_1, T'_2 \ldots T'_k$ $1 \leqslant k \leqslant 4$, tels que

a) $T_1, T'_2, \ldots T'_k$ sont sans boucles; T_1 est un arbre.

b) T'_j, $2 \leqslant j \leqslant k$ peut être complété par des éléments de T_1 de façon à former un arbre T_j ; donc $T'_j \subset T_j \subset T'_j \cup T_1$.

Supposons en effet $T_1, T'_2 \ldots T'_j$ construits vérifiant a et b (on commence par prendre n'importe quel arbre pour T_1); supposons de plus que $G - T_1 \cup T'_2 \ldots \cup T'_j$ compte au plus $4-j$ lignes par vertex (comme T_1 est un arbre, $G - T_1$ compte au plus 3 lignes par vertex). Nous construisons T'_{k+1} comme l'union d'arbres quelconques pris dans chaque composante connexe de $G - T_1 \cup T'_2 \ldots \cup T'_j$, s'il en existe de non vides. Pour compléter T'_{j+1} en un arbre T_{j+1} de G numérotons les lignes $\ell_1, \ldots \ell_r$ de T'_{k+1} ; ℓ_i point les vertex V_i et V'_i , $1 \leqslant i \leqslant r$. Il existe un chemin unique dans T_1 joignant V_1 à V'_1 ; supprimons au hasard une ligne de ce chemin; nous obtenons un graphe T^1_{j+1} , et $T^1_{j+1} \cup \{\ell_1\}$ est un arbre. Ayant ainsi construit T^s_{j+1} tel que $T^s_{j+1} \subset T_1$ et $T^s_{j+1} \cup \{\ell_1, \ell_2, \ldots \ell_s\}$ soit un arbre, il y a un chemin unique dans $T^s_{j+1} \cup \{\ell_1, \ell_2, \ldots \ell_s\}$ joignant V_{s+1} à V'_{s+1} . Ce chemin n'est pas formé exclusivement de lignes de $\{\ell_1, \ldots, \ell_s\}$ car T'_{j+1} comporterait une boucle. On peut donc supprimer une ligne de ce chemin appartenant à T_1 , et construire T^{s+1}_{j+1} , donc finalement T^r_{j+1} , et $T_{j+1} = T'_{j+1} \cup T^r_{j+1}$.

La récurrence s'achève pour $k \leqslant 4$ car on achève de dépouiller chaque vertex de toutes ses lignes en au plus 4 opérations. Il faut bien sûr que G ne contienne pas de "tad pôles".

Revenant à la représentation de Schwinger (48) de $I_G^R(\underline{p},\nu)$, il nous faut borner, pour $2 \leqslant \mathrm{Re}\ \nu < \frac{8}{3}$:

$$I_G^R(\underline{p},\nu) = \int d\mu_m(\alpha)[\exp - V_G(\underline{p},\alpha)] \frac{1}{U_G(\alpha)^{\nu/2}}$$

Comme $\exp - V_G(\underline{p},\alpha) \leqslant 1$, et en utilisant le changement de variables $\alpha_i \to \frac{\alpha_i}{m^2}$:

$$\left|I_G^R(\underline{p},\nu)\right| \leqslant [m^2]^{N/2-n-1} \int d\mu_1(\alpha) \frac{1}{\left[\sum_{\text{arbres } T} \left(\prod_{\alpha_i \notin T} \alpha_i\right)\right]^{\frac{\mathrm{Re}\ \nu}{2}}}$$

$$\leqslant [m^2]^{N/2-n-1} \int d\mu_1(\alpha) \frac{1}{\left[\sum_{j=1}^{k} \left(\prod_{\alpha_i \notin T_j} \alpha_i\right)\right]^{\frac{\mathrm{Re}\ \nu}{2}}}$$

$$\leqslant [m^2]^{N/2-n-1} \frac{1}{k^{\mathrm{Re}\ \nu/2}} \int d\mu_1(\alpha) \left[\prod_{j=1}^{k} \prod_{\alpha_i \notin T_j} (\alpha_i)^{\frac{-\mathrm{Re}\ \nu}{2k}}\right]$$

par une inégalité de convexité: $A_1+\ldots+A_k \leqslant k\, A_1^{1/k} \ldots A_k^{1/k}$. Donc

$$\left|I_G^R(\underline{p},\nu)\right| \leqslant [m^2]^{N/2-n-1} \left[\sup_{t \in [0,3/8\ \mathrm{Re}\ \nu]} \int_0^\infty \frac{\exp-\alpha}{\alpha^t}\, d\alpha\right]^{\ell(G)}$$

puisque $1 \leqslant k \leqslant 4$.

Comme $\ell(G) = 2n(G) - \frac{N(G)}{2}$:

$$\left|I_G^R(\underline{p},\nu)\right| \leqslant [m^2]^{N/2-n-1} \left[\Gamma\left(1 - \frac{3\mathrm{Re}\ \nu}{8}\right)\right]^{2n - N/2}$$

majoration assez fine (comparée au comportement asymptotique de I_G^R lorsqu'il est connu) et dont on déduit aussitôt le résultat cherché.

Pour établir notre proposition dans le bande $\frac{8}{3} \leqslant \mathrm{Re}\ \nu < \frac{10}{3}$ par une méthode semblable, on a besoin d'un lemme topologique plus précis, et de contrôler le comportement du graphe renormalisé lorsque $\mathrm{Re}\ \nu \geqslant 3$. Nous avons montré le lemme topologique suivant:

<u>Lemme 2</u>

Soit G un graphe différent de , , et sans sous graphes ou , avec au plus 4 lignes par vertex. Alors on a l'une des deux possibilités:

(i) G contient au plus 2 arbres tels que toute ligne interne appartient à au moins un d'éntre eux.

(ii) Il existe dans G entre 3 et 5 arbres différents tels que toute ligne interne de G appartient à au moins 2 d'entre eux.

La démonstration repose sur une discussion élémentaire, comme pour le lemme 1, mais nettement plus longue aussi nous ne la donnons pas ici mais elle est exposée en détail dans [14]. Il est facile de se convaincre que ce lemme fournit le majoration cherchée dans la bande $\frac{8}{3} \leqslant \mathrm{Re}\ \nu < \frac{10}{3}$ pour les graphes G considérés dans le lemme. En effet ils n'ont pas à être renormalisés; et dans le cas (ii) par exemple, avec $T_1 \ldots T_k$ $3 \leqslant k \leqslant 5$ abres du lemme:

$$[U_G(\alpha)]^{\frac{\mathrm{Re}\ \nu}{2}} \geqslant \left[\sum_{j=1}^{k} \prod_{\alpha_i \notin T_j} \alpha_i\right]^{\frac{\mathrm{Re}\ \nu}{2}} \geqslant k^{\frac{\mathrm{Re}\ \nu}{2}} \left[\prod_{j=1}^{k} \prod_{\alpha_i \notin T_j} \alpha_i\right]^{\frac{\mathrm{Re}\ \nu}{2k}}$$

donc:

$$[U_G(\alpha)]^{-\frac{\mathrm{Re}}{2}} \leqslant [3]^{-8/3} \prod_{i=1}^{\ell} (\alpha_i)^{-t_i}\ ,\ t_i \leqslant \frac{3}{5}\ \mathrm{Re}\ \frac{\nu}{2}$$

donc on aura l'analogue de la majoration (52) avec une fonction $\Gamma(1 - \frac{3 \operatorname{Re} \nu}{10})$ finie si $\operatorname{Re} \nu < \frac{10}{3}$.

Il ne reste plus qu'à réduire le cas d'un graphe G avec des sous graphes au cas d'un graphe qui n'en contient plus.

Remarquon tout d'abord que, si $\operatorname{Re} \nu < 3$:

$$|I^R_{\ominus}(\vec{p})| \leq \int d\mu_m(\alpha) \frac{1}{[\alpha_1\alpha_2+\alpha_2\alpha_3+\alpha_1\alpha_3]^{\frac{\operatorname{Re}\nu}{2}}} \leq B$$

B étant indépendant de $\vec{p}$, moment entrant et sortant (a deux "jambes" que nous ne dessinons pas). Par conséquent, si I_G a q sous graphes distincts (nous excluons qui est annulé si $\frac{8}{3} \leq \operatorname{Re} \nu$) on a $|I_G| \leq B^q |I_{\tilde{G}}|$ où $\tilde{G}$ est le graphe obtenu en réduisant chaque sous graphe à un vertex; donc $n(\tilde{G}) = n(G) - q$ et $\tilde{G}$ satisfait les hypothèses du lemme 2. La proposition s'en déduit aussitôt, (en exigeant que A soit supérieur à B).

Lorsque $3 \leq \operatorname{Re} \nu < \frac{10}{3}$ nous allons utiliser une borne très large qui nous suffira et se généraliserait à d'autres exemples sans difficulté. En appliquant deux fois l'inégalité de convexité:

$$\frac{1}{\alpha_1\alpha_2+\alpha_2\alpha_3+\alpha_1\alpha_3} \leq \frac{1}{3} \frac{1}{[\alpha_1\alpha_2\alpha_3]^{2/3}}$$

on obtient sans difficulté

$$|I^R_{\ominus}(\vec{p})| \leq (\tfrac{1}{3})^{\frac{\operatorname{Re}\nu}{2}} \int_0^\infty d\mu_m \frac{1}{[\alpha_1\alpha_2\alpha_3]^{\frac{\operatorname{Re}\nu}{3}}} (1 - \exp - p^2(\alpha_1\alpha_2\alpha_3)^{1/3}$$

Donc:

$$|I^R_{\ominus}(\vec{p})| \leq (p^2)^{(\operatorname{Re}\nu)-3} \int_0^\infty d\mu_{m/p^2} \frac{(1-\exp-(\alpha_1\alpha_2\alpha_3)^{1/3})}{(\alpha_1\alpha_2\alpha_3)^{\frac{\operatorname{Re}\nu}{3}}}$$

Si $3 < \mathrm{Re}\,\nu < \frac{10}{3}$, on peut majorer en remplaçant simplement $d\mu_{m/p^2}$ par $d\alpha_1 d\alpha_2 d\alpha_3$, et en utilisant la croissance de $(1-\exp -t)$, borné par t $t > 0$)

$$|I^R_{\ominus}(\vec{p})| \leq (p^2)^{\mathrm{Re}\,\nu - 3} \int_0^1\int_0^1\int_0^1 \frac{d\alpha_1 d\alpha_2 d\alpha_3}{(\alpha_1\alpha_2\alpha_3)^{\frac{\mathrm{Re}\,\nu}{3} - \frac{1}{3}}}$$

$$+ 3 \int_0^1 d\alpha_1 \int_1^\infty d\alpha_2 \int_1^\infty d\alpha_3 \frac{1}{\alpha_1^{\frac{\mathrm{Re}\,\nu}{3} - \frac{1}{3}}} \times \frac{1}{(\alpha_2\alpha_3)^{\frac{\mathrm{Re}\,\nu}{3}}}$$

$$+ 3 \int_0^1 d\alpha_1 \int_0^1 d\alpha_2 \int_1^\infty d\alpha_3 \frac{1}{(\alpha_1\alpha_2)^{\frac{\mathrm{Re}\,\nu}{3} - \frac{1}{3}}} \frac{1}{\alpha_3^{\frac{\mathrm{Re}\,\nu}{3}}}$$

$$+ \int_1^\infty\int_1^\infty\int_1^\infty \frac{d\alpha_1 d\alpha_2 d\alpha_3}{(\alpha_1\alpha_2\alpha_3)^{\frac{\mathrm{Re}\,\nu}{3}}} ,$$

donc:

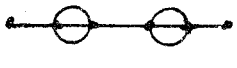
$$|I^R_{\ominus}(\vec{p})| \leq C_\nu (p^2)^{\mathrm{Re}\,\nu - 3}$$

C_ν étant une fonction positive pour $3 < \mathrm{Re}\,\nu < \frac{10}{3}$. Pour $\nu = 3$ il ne serait pas difficile de montrer une borne logarithmique, $D\ \mathrm{Log}(p^2)$.

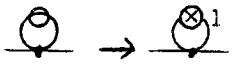
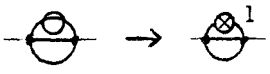
On peut regrouper ces deux cas dans une borne très large:

$$|I^R_{\ominus}(p^2)| \leq D_\nu + E_\nu (p^2)^{2\,\mathrm{Re} - \frac{19}{3}}$$

où D_ν et E_ν sont des constantes positives, et $3 \leq \mathrm{Re}\,\nu < \frac{10}{3}$.

Maintenons contractons tout les sous graphes ; comme nous excluons , ils apparaissent dans des chaînes  , que nous remplaçons par une ligne où la croix centrale et l'index k rappellent qu'une chaîne de longueur k a été contractée. Le propagateur pour cette ligne est dominé par:

$$S_k(\vec{p}) = \frac{F_\nu^{\,k}}{(p^2+m^2)^{1+k(22/3 - 2\,\mathrm{Re}\,\nu)}}$$

où F_ν est positif. Mais dans le graphe obtenu $\tilde{G}$ peuvent apparaître des tad pôles ou de nouveaux graphes , dûs à la contraction, par exemple, de  , ou de  . Cependant ces tad pôles ou graphes comportent au moins une ligne à propagateur S_k, borné par $F_\nu^k \dfrac{1}{(p^2+m^2)^{25/3 - 2\,\mathrm{Re}\,\nu}}$.

Il n'est pas difficile de vérifier que ceci permet de contracter ces sous graphes en un vertex, en introduisant une nouvelle constante G_ν . Par exemple

$$\leq F_\nu^k \int \text{"}d^\nu p\text{"} \quad \frac{1}{(p^2+m^2)^{25/3 - 2\,\mathrm{Re}\,\nu}}$$

converge et est borné par $F_\nu^k\, G_\nu$ exactement à condition que $\mathrm{Re}\,\nu < \frac{10}{3}$.

On aplique enfin le lemme 2 à $\tilde{G}'$ obtenu après cette dernière opération, en imposant la condition $A_\nu \geq F_\nu$ et G_ν , en remarquant que $n(\tilde{G}') \leq n(G) - \{\text{nombre total de contractions}\}$.

Montrons pourquoi la proposition est reliée à l'existence locale de la transformée de Borel de la série perturbative. Comme le nombre total de graphes convexes est certainement borné par $(4n + N - 1)!!$ qui est on l'a vu, le nombre de graphes total, le terme d'ordre n de notre série de Borel est borné par:

$$|a_n| \leq \frac{|\lambda|^n}{(n')^2} \cdot A_\nu^{\,n} \cdot (4n+N-1)!!$$

donc la série en question converge et définit une fonction analytique localement autour de l'origine, au moins dans le disque:

$$|\lambda| < \frac{1}{16\,A} \qquad \mathrm{Re}\,\nu < \frac{10}{3} \quad .$$

V. Conclusion

Les resultats de la section IV indiquent que le premier pas, dans notre programme est relativement facile. Nous avons montré que les séries perturbatives renormalisées des fonctions de Schwinger et de la densité d'action ont des transformées de Borel analytiques dans un disque du plan complexe pour la constante de couplage λ , au moins pour $\mathrm{Re}\ \nu < \frac{10}{3}$. L'extension des bornes exponentielles à $\frac{10}{3} < \mathrm{Re}\ \nu < 4$ reste un problème ouvert , mais surmontable à notre avis, qui requiert sans doute quelques raffinements des méthodes élémentaires de la partie IV.

Remarquons qu'à $\nu = 4$ il est désormais bien établi que la renormalisation détruit ce genre de bornes, certaines classes de diagrammes croissant beaucoup plus vite, au moins comme une factorielle du nombre de vertex. Néanmoins les calculations asymptotiques des grand ordres de perturbation par la méthode de Lipatov suggèrent que la transformée de Borel existe aussi dans un disque. Il n'est pas exclu que ce résultat puisse être prouvé rigoureusement par des majorations simples associées cette fois à des classes de diagrammes; mais le problème est probablement nettement plus difficile que pour $\mathrm{Re}\ \nu < 4$. Une preuve rigoureuse conférerait une légitimité accrue aux calculs qui assument ce résultat, comme ceux de la Réf. [1].

Revenons à la deuxième partie de notre programme. Il est vraissemblable que la continuation analytique le long d'une bande S_σ de la fonction que nous avons obtenue dans un disque par sa série de Taylor est un probleme très difficile. De relativement faibles modifications de la série de Taylor peuvent entraîner l'apparition de singularités près de l'axe réél positif, très loin de l'origine. Nous reconnaissons qu'il n'y a pas d'arguments excluant cette possibilité; mais disons seulement que nous

savons de facon certaine que ceci ne se produit pas aux trois points Re ν = 1,2,3, et qu'un faisceau de propriétés communes semble renforcer chez nous l'idée qu'il existe une unité du domaine superrenormalisable.

Pour prouver quelque chose dans cette direction, comme dans la plupart des exemples mathématiques de continuations analytiques, on a presque certainement besoin d'informations importantes sur la structure de la fonction obtenue dans le disque, telles que équations algébriques ou différentielles. Une première idée est d'examiner rigoureusement l'equivalent de l'équation de Callan-Symanzik dans le plan de Borel, c'est à dire en transformée de Laplace inverse, par rapport à $\frac{1}{z}$.

Si l'on considère la masse considérable de matériel mathématique et de travail nécessaire pour construire des solutions exactes de ϕ_2^4 et ϕ_3^4 on ne peut bien sûr espérer qu'un programme différent, partant de l'étude de la série perturbative, aboutisse rapidement ou facilement. Cependant cette remarque même peut justifier de consacrer un certain temps à une approche différente, au cours de laquelle il est d'autre part très possible que des résultats intéréssants du point de vue de la simple théorie perturbative puissent être obtenus.

Nous conclurons par une remarque concernant le passage ultérieur des séries perturbatives en λ, m_0 aux séries fonctions des paramétres physiques. Si les fonctions de Schwinger et la densité d'action ont pu être définies comme fonctions analytiques de ν, λ, et m_0, on peut passer aux variables ν, g, et $m_{phys.}$ Les résultats de Eckmann, Epstein, et de Eckmann, Epstein et Fröhlich [15] montrent que ces nouveaux paramétres sont fonctions C^∞ des premiers à ν = 2 et 3 ; et que la masse physique est sommable de Borel ce qui nous encourage à penser que ceci est vrai plus généralement et que le passage aux variables physiques n'altérera pas l'éventuelle sommabilité de Borel des séries interpolées que nous avons considérées.

Depuis la rédaction de cet article, la généralisation de ses résultats à tout le domaine Re $\nu < 4$ a été achevée par V. Rivasseau et E. Speer (à paraitre).

Références

[1] N.N. Khuri, Zeros of the Gell-Mann-Low function and Borel summations in the renormalizable theories; The slope of the Gell-Mann-Low function at the U.V. fixed point. Rockefeller University preprints, 1979.

[2] D. Marchesin, The Scaling limit of the ϕ^2 field in the anharmonic oscillator: existence and numerical studies, Rockefeller University preprint 1978.

[3] J. Glimm, A. Jaffe, Absolute bounds on vertices and couplings; On the approach to the cirtical point, Ann. Inst. H. Poincaré, 22, 1975 pp. 97-122.

[4] J. Magnen, R. Sénéor, Phase Space Cell Expansion and Borel Summability for the Euclidean ϕ_3^4 Theory, Commun. Math. Phys. 56, 1977, pp 237-276.

[5] A. Sokal, An improvement of Watson's theorem on Borel summability, Princeton University preprint, 1979.

[6] E. Speer, Dimensional and Analytic Renormalization, in "Renormalization Theory", edited by G. Velo and A.S. Wightman, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, Holland, 1976, pp 25-93.

[7] Nous remercions Monsieur H. Epstein, qui nous a signalé l'importance de ce point.

[8] M.C. Bergère, J.B. Zuber, Renormalization of Feynman Amplitudes and Parametric Integral Representation, Commun. Math. Phys. 35, 1974, pp 113-140. M.C. Bergère, Y.M.P. Lam, Bogoliubov-Parasiuk, Theorem in the α-parametric representation, Jour. Math. Phys. 17, 1976, pp 1546-1557.

[9] M.C. Bergère, F. David, communication priveé.

[10] J.P. Eckmann, A. Sokal, communications privées.

[11] C.M. Bender, T.-T. Wu, Anharmonic oscillator, Phys. Rev. 184 , No. 5, 1969 p. 1231. Voir aussi Bender, Lin: Tight lower and upper bounds for the anharmonic oscillator, preprint 1979.

[12] B. Simon, communication privée, et Functional Integration and Quantum Physics, Cours donné à Lausanne, 1977.

[13] J. Glimm, Boson fields with the $:\phi^4:$ interaction in three dimensions, Commun. Math. Phys. 10, 1968, pp 1-47.

[14] V. Rivasseau, Sommation et estimations d'amplitudes de Feynman, Thèse de 3° cycle, Université Paris VI, 1979.

[15] J.P. Eckmann, H. Epstein, J. Fröhlich, Asymptotic perturbation expansion for the S-matrix and the definition of the time-ordered functions in relativistic quantum field models, Ann. Inst. H. Poincaré, 25, 1976, pp 1-34.

J.P. Eckmann, H. Epstein, Borel summability of the mass and the S-matrix in ϕ^4 models, I.H.E.S. preprint, 1979.