PUBLICATIONS MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUES DE RENNES

BAHIA EL GLASS

L'apprentissage de la démonstration avec l'aide du logiciel DEFI : analyse des démarches observées, rôle des messages, apprentissage théorème par théorème

Publications de l'Institut de recherche mathématiques de Rennes, 1997-1998, fascicule 3 « Fascicule de didactique des mathématiques et de l'E.I.A.O. », , p. 3-33

<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1997-1998___3_3_0>

© Département de mathématiques et informatique, université de Rennes, 1997-1998, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications mathématiques et informatiques de Rennes » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

L'apprentissage de la démonstration avec l'aide du logiciel DEFI : analyse des démarches observées, rôle des messages, apprentissage théorème par théorème

Bahia EL GLASS
Laboratoire de Didactique des Mathématiques. Université Rennes1

Introduction

Notre exposé se situe à la suite de la recherche que nous menons dans le cadre de notre thèse en cours, au laboratoire de didactique de l'université de Rennes1 sous la direction de Jean Houdebine, sur l'étude de l'apprentissage de la démonstration déductive au collège et l'étude du logiciel DEFI (Démonstration et Exploration de la Figure Interactive) dans ce domaine.

Au cours de cet exposé, nous présentons les composantes didactiques de DEFI et leur impact dans le déroulement de vraies situations d'apprentissage.

L'étude de DEFI a nécessité la construction de séquences d'enseignement dont la description ne fait pas totalement l'objet de cet exposé. Au cours de ces séquences, nous avons identifié l'intégration de DEFI en tant que composante du milieu, ainsi que des comportements des élèves vis à vis d'un environnement informatisé, comment ils s'adaptent et quel apprentissage a eu lieu. Nous présentons ces résultats dans la troisième partie. La seconde partie sera consacrée à la présentation des connaissances mathématiques, aux choix didactiques dans DEFI, et à l'organisation de ces connaissances. Nous commençons dans la partie A par rappeler l'historique de DEFI, comment nous le considérons comme élément du milieu et enfin nos hypothèses didactiques sur cet élément.

Partie A

I - Genèse de DEFI :

Historique :

L'équipe de didactique de Rennes (IREM-GRECO) a commencé à travailler il y a plus de dix ans sur le thème : *Informatique comme outil de l'ingéniérie didactique* (*cf.* Rapport d'activité 85), en se donnant des objectifs pour la conception de logiciels d'enseignement dont nous rapportons les deux critères suivants :

" D'une part, le maître doit pouvoir disposer d'un espace de liberté didactique dans l'emploi d'un logiciel [...]. D'autre part, l'élève doit trouver dans le logiciel une aide relativement personnalisée, qui nécessite pour lui un dialogue, une activité vraie... " [IRMAR-IREM / 1985]

" L'objectif général est d'analyser la manière dont l'élève traite les différentes propriétés d'une configuration à la fois pour réaliser une figure à partir de l'énoncé qui lui est fourni, pour repérer celles qui sont pertinentes par rapport au but proposé et pour émettre des conjectures susceptibles de le faire progresser dans son raisonnement. Le logiciel envisagé devrait fournir, pour une figure donnée, une aide à l'élève lui permettant de franchir une étape fondamentale de la mise en œuvre d'une démonstration et constituer la base d'un apprentissage permettant à l'élève de s'attaquer à certains problèmes de géométrie. " [IRMAR-IREM / 1985]

A l'issue d'un travail en amont de ce projet, consistant à faire passer des tests et observer l'élève au cours de la recherche et de la mise au point d'une démonstration d'un

problème en géométrie, l'équipe a mis en évidence des constatations flagrantes, surtout sur l'utilisation de la figure par l'élève dans l'activité de la démonstration : "Nous sommes frappés, lors de l'observation, de la distance que garde l'élève vis à vis de l'énoncé et même de la figure." [Les auteurs]. Et d'autres sur la manipulation ambiguë à la fois des hypothèses et des conclusions, voire même dans le sens de ces dernières, comme la confusion sur le mot "hypothèse" et ses différentes attributions : données du problème, conclusion intermédiaire, propriété aperçue sur la figure ou encore comme conditions d'entrées à l'utilisation d'un théorème.

Ainsi, DEFI a été réalisé, par Giorgiutti, dans le double souci de disposer à la fois d'un environnement qui s'intègre dans le milieu didactique et de fournir un outil d'aide à la démonstration en géométrie au collège. Plusieurs expérimentations et rencontres avec les enseignants du collège ont eu lieu, qui n'ont fait que confirmer la problématique de DEFI et les préoccupations de l'auteur, comme il le rappelle :

"Nous avons...essayé de répondre aux questions suivantes :

1)Comment un problème de géométrie classique est-il ressenti par un élève de 4^e et comment faire pour qu'il s'y engage vraiment ?

2)Comment la figure est-elle vue et utilisée ?

3)Quel sens l'élève donne -t- il à la démonstration ? "

II- DEFI et le milieu

a - L'introduction de DEFI en Classe :

Le logiciel DEFI est conçu, à partir des difficultés, que rencontrent les élèves dès le collège, à fournir une démonstration en géométrie. Cependant, nous nous sommes rendus compte à la suite des précédentes expérimentations avec DEFI qu'il ne s'agit pas uniquement d'avoir un outil prêt à être livré aux élèves, mais, également, de posséder un dispositif clair et précis de l'introduction de cet outil. Par suite, nous nous sommes heurtés à une problématique presque inévitable qui consiste à : *Préciser davantage les modalités d'utilisation de DEFI en classe.*

En effet, l'intégration d'outil informatique dans l'enseignement des Mathématiques est abordée depuis bientôt dix ans. Plusieurs thèses y ont été consacrées, comme la formation insuffisante des enseignants à ce sujet, ou bien la contrainte du temps institutionnel qui ne permet pas toujours de s'investir dans d'autres moyens. De ces deux raisons, au moins, résulte une réticence du maître qui est d'autant plus justifiée lorsque le produit qu'on lui présente n'est pas précis et facile d'accès.

En ce qui concerne DEFI, il a fait l'objet de plusieurs études et utilisations, la différence entre celles-ci est assez profonde et résulte des différentes appropriations par l'utilisateur :

- le travail de AG Almouloud repose essentiellement sur la confirmation de l'apport positif de cet environnement en évaluant l'écart entre les productions des élèves avant et après l'utilisation de DEFI. Cependant, le lecteur restera sur sa faim dans ce que désigne l'auteur par *"l'utilisation judicieuse de DEFI"* ,

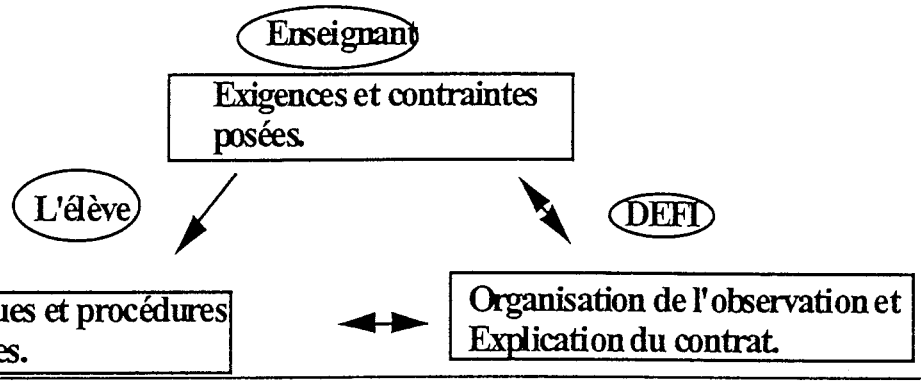
- dans la recherche de V. Luengo, DEFI a été utilisé dans une optique objective, mais indépendante des soucis du concepteur, au moins, en ce qui concerne sa durée d'utilisation et les consignes données aux élèves.

A la suite de ces deux études principales sur DEFI, et de nos expérimentations antérieures, nous essayons d'apporter quelques précisions sur l'utilisation de DEFI et surtout sur l'importance de l'explicitation de cette dernière. Enfin, sur la détermination des variables didactiques et leur contrôle.

b - Les composantes de milieu :

Cette introduction prend en compte, de manière classique, les trois composantes essentielles suivantes :

Schéma 1:



Nous expliquons chacun de ces pôles et ses interactions avec les deux autres.

Le pôle Enseignant :

L'enseignant est le maître de la classe, il est intéressant qu'il soit également motivé par la question car sa collaboration deviendra ainsi plus pertinente.

La négociation du contrat entre le concepteur et le maître demande une investigation de base des deux côtés. L'enseignant exige qu'on ne laisse pas les élèves tourner en rond, ni leur donner des problèmes pièges ou des activités reposant sur des connaissances non encore étudiées. Enfin, ces exigences ne sont autres que les ingrédients de la construction de vraies situations didactiques.

L'enseignant transmet ses contraintes aux observateurs, telles le moment d'introduction de DEFI, la gestion du temps, et l'institutionnalisation du savoir aussi bien pour le groupe qui suit l'expérimentation que pour le reste de la classe.

Nous avons choisi de fournir à l'enseignant la documentation complète contenant à la fois, tous les problèmes que nous avons l'intention d'utiliser avec DEFI, ceux du pretest et postest, et également nos objectifs et précisions des prérequis attendus chez les élèves.

Le pôle Elève :

Le logiciel DEFI n'introduit pas à l'élève de nouveaux théorèmes, mais vise plutôt à lui apprendre de bien se servir de ceux qu'il connaît déjà et à l'amener à une maîtrise des connaissances qu'il a sur la démonstration. Une double question est donc posée, à savoir comment sont utilisées ses connaissances à l'interface et comment il gère "ce que DEFI attend de lui."

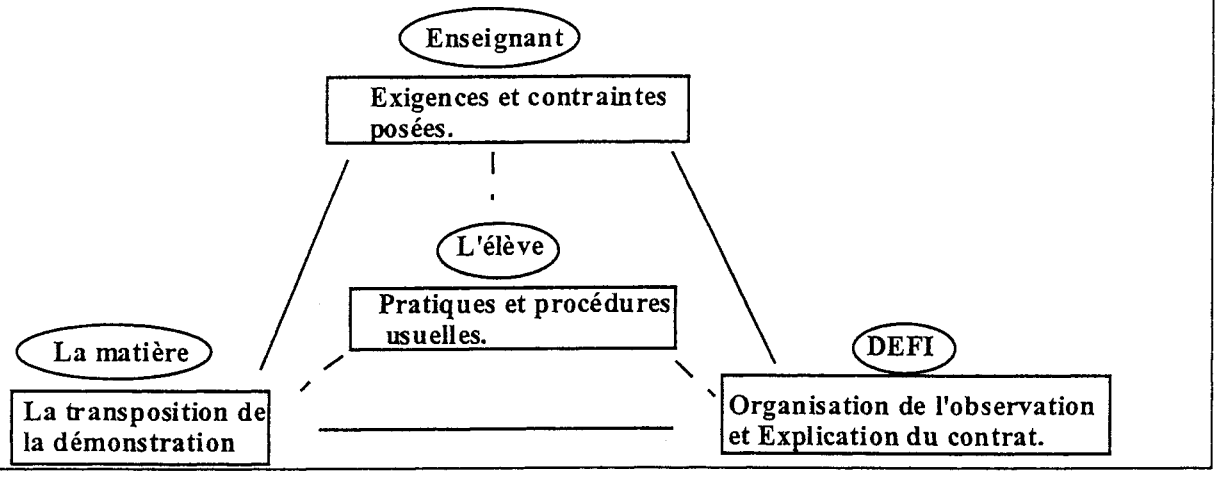
Le pôle DEFI :

Comme tout environnement informatisé, DEFI a deux aspects : l'aspect interface et l'aspect interne. Le premier aspect nécessite une familiarisation technique que nous avons

prévue par des séances de présentations et de prise en main. Le second aspect se fait par le biais d'une interaction entre la connaissance de l'élève, l'avis du maître et la démonstration dans DEFI.

Enfin, en tenant compte de ces trois pôles, le schéma 1 exprime la nécessité de mettre l'accent sur un quatrième pôle "la démonstration" lequel a une interaction de niveau différent suivant chacun des pôles. Il en résulte alors le schéma 2 où l'élève occupe une situation barycentrique des trois autres : Enseignant-Démonstration-DEFI.

Schéma 2



Ainsi, la séquence avec DEFI se base sur une clarification du contrat entre les pôles Enseignant & Elève, d'une part, et la démonstration dans DEFI d'autre part. Cette séquence se déroule en six séances et se décompose en situations élémentaires. Chacune de celles-ci se compose d'un problème à résoudre par le biais de théorèmes bien précis. Les problèmes sont semblables d'une part par leur structure (un ensemble de données et une conclusion) et d'autre part par le mode de résolution (en utilisant les données, on arrive à des conclusions intermédiaires afin d'arriver à la conclusion finale).

III Notre position de recherche :

Nous avons embrassé cette problématique pour notre intérêt essentiel qui se trouve au cœur de la didactique fondamentale et qui est née d'une pratique d'enseignement qui met en premier plan l'activité des élèves dans l'appropriation du savoir et l'explication des phénomènes didactiques de manière objective.

<u>Nos hypothèses sur la problématique dans DEFI</u> :

DEFI a bénéficié de la collaboration d'un groupe de recherche de compétences hétérogènes, composé par des didacticiens, des enseignants de collège, du supérieur et des informaticiens. Giorgiutti a très bien été à l'écoute des enseignants face à leur désarroi, à faire comprendre à certains élèves la structure de la démonstration :"*on ne sait plus quoi leur dire*".

En effet, une des difficultés aussi bien pour l'apprentissage de la démonstration que de l'analyse des productions des élèves est la variété des éléments qui rentrent en jeu dans un processus de démonstration de l'élève, et de la démonstration elle même. Nous ne prétendons pas ici d'en faire une liste exhaustive, mais néanmoins nous en avons pointé quelques uns le long de notre recherche. En outre de la diversité des démonstrations des professeurs en terme des exigences et implicites, qui doit sûrement jouer, il y a des phénomènes d'ordre comportemental, cognitif et didactique. Comme par exemple, ramener la démonstration de

tous les problèmes en un seul "pas", ou bien utiliser les propriétés de la figure comme des données du problème à résoudre ou alors la constitution binaire de l'organisation déductive [Duval]. Sans oublier que l'élève est en situation de contrat didactique et par suite le texte de démonstration qu'il fourni peut ne répondre qu'à ce contrat. Ces éléments sont souvent présents et entremêlés dans les productions de l'élève, où le plus dur est de lui faire prendre conscience de ce qu'il est entrain de composer dans une situation donnée.

Certaines hypothèses ont été déjà testées, comme faire travailler l'élève uniquement sur la figure, ou bien sur la lecture de l'énoncé du problème, ou encore lui faire compléter des pas de déductions à trous. Ces points de vue sont efficaces auprès de certains élèves, mais nous ne pensons pas du tout que ça puisse développer le sens de la démonstration.

On pense justement que la particularité de DEFI est dans sa réussite à faire prendre conscience à l'élève sa propre démarche et sa démonstration, la confronter ensuite à celle de DEFI pour en construire un sens à la fin. DEFI procède pour cela par créer un environnement d'interaction permanente entre par exemple :

- l'utilisation de la figure dans une démarche déductive,

- le statut des théorèmes et définitions,

- le statut des prémisses ;

et la réponse de l'élève.

Nous donnons des exemples de phénomènes didactiques, blocages et productions erronées des élèves (voire étudiant du supérieur), en explicitant la variété des causes d'erreurs, la plupart de ces exemples est issue des classes supérieures, pour la simple raison que l'étudiant argumente plus facilement une réponse erronée, quand on lui demande des explications, qu'un élève de collège.

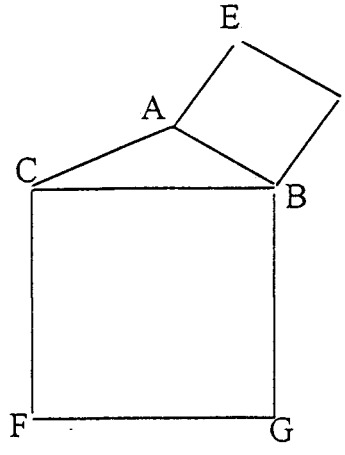
EXEMPLES :

Exemple 1 : On considère un triangle ABC quelconque, le milieu M de [AC] et deux carrés ABDE et BCFG extérieurs au triangle ABC. Démontrer que :
a- CD = AG

b- (CD) et (AG) sont perpendiculaires.

c- (BM) est perpendiculaire à (DG) et que DG = 2BM.

(Extrait du fascicule Math1(95-96) - Nombres complexes)

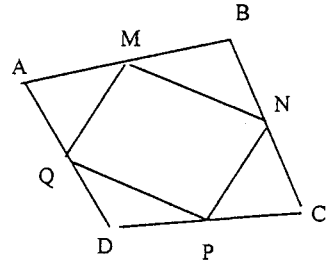


Dans cet exemple et tel que nous l'a rapporté le professeur de la classe : "Non seulement les étudiants n'ont pas su comment utiliser les nombres complexes pour la résolution de ce problème mais en plus, aucun étudiant n'a pensé à utiliser "la rotation" par laquelle le problème se fait très simplement."

Exemple 2 : On considère un quadrilatère ABCD et on désigne par M, N, P et Q les milieux respectifs de [AB], [BC], [CD] et [AD].

Démontrer que MNPQ est un parallélogramme.

(Problème posé à un élève de 4° observé dans sa démarche)



Cet exemple vient confirmer le blocage de l'élève à aborder une stratégie pour sa démonstration. Dans cette situation, le traçage des objets non tracés par la première lecture de l'énoncé n'est pas acquis. Suite à plusieurs interrogations avec l'élève, je l'ai amené à tracé les diagonales (BD) et (AC) qui ont déclenché chez lui la démarche à suivre. En nous confirmant : "Je pensais que je n'avais pas le droit de tracer le segment [BD]... Enfin de rajouter des objets dans la surface du parallélogramme ABCD..."

Exemple 3 : (Exercice donné en contrôle à des étudiants de première année de DEUG).

Pour tout couple (a, b) de réels différents de 1, on pose :

$$M_{(a,b)} = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & 1-b \end{pmatrix}$$

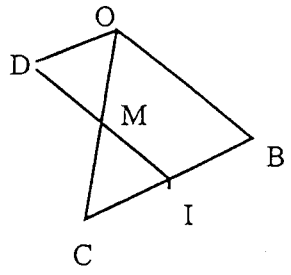
On désigne par E l'ensemble des ces matrices. Montrer que * (multiplication) est commutative dans E.

On a été étonné de trouver, dans certaines copies, la réponse suivante : "la multiplication de deux matrices n'est pas commutative, donc elle n'est pas commutative dans E." L'acquisition de la connaissance en question a été sûrement étiquetée à sa situation de départ, ce qui crée une perturbation lors d'une nouvelle situation. Voire générer des contradictions : la question est en plus posée sous la forme "Montrer que [...]" [J. P Escofier]

Exemple 4 : étudié et expérimenté par Duval :

Problème :

O, B et C sont trois points non alignés. I est le milieu de [BC] et D le point tel que ODIB soit un parallélogramme. Pourquoi M, milieu de [ID] est-il le milieu de [OC] ?



Elève MB :

"*OICD est un parallélogramme parce que ses diagonales [OC] et [ID] se coupent en leur milieu .*"

Elève SM :

"*Si M est le milieu de [ID] et si OICD est un parallélogramme alors M est le milieu de [OC] parce que les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu .*"

L'auteur cite : "[...]C'est alors que nous nous sommes heurtés à l'impossibilité de faire prendre conscience aux élèves de la différence de sens de ces deux phrases..."

Par ce dernier exemple, nous illustrons la difficulté à faire comprendre l'erreur.

Conclusion :

Les exemples cités ci-dessus illustrent les phénomènes didactiques suivants :

- *démarrer une démonstration ;*
- *élaborer une conjecture, choisir une stratégie ;*
- *communiquer une démonstration ;*
- *intégrer une connaissance acquise ;*
- *faire comprendre l'erreur à l'élève*

le dernier exemple de Duval relève d'une situation pouvant ainsi créer des confusions de la connaissance visée si l'erreur n'est pas prise en compte par l'élève.

Partie B :

I - Les connaissances mathématiques que l'interface de DEFI met en œuvre :

Le contexte concerné est celui de la géométrie affine au collège. Les définitions et théorèmes que nous évoquons portent sur les concepts et notions ci-dessous ; le champ conceptuel auquel nous faisons référence est celui de la représentation d'un concept dans différentes situations[G. Vergnaud] :

- *parallélisme ;*
- *alignement ;*
- *milieu (symétrique) ;*
- *parallélogramme ;*
- *rapport d'égalité (moitié, double, égale).*

1- La classe de problèmes :

Le vocabulaire de ces problèmes est équivalent à celui des théorèmes et des propriétés disponibles dans DEFI. Ils sont de nature difficile. Les degrés de difficulté sont mesurables soit par la profondeur de la démonstration, soit par la découverte des objets non tracés et de sous figures soit par la traduction des implicites de texte. Ces problèmes comportent un ensemble de données et la conclusion finale.

2- Les objets & relations mathématiques :

La droite : *(la droite, le segment, ...)*

La droite peut être considérée à la fois comme objet et relation. Elle est objet quand il s'agit de définir, par exemple, un parallélogramme, deux droites parallèles, etc. Comme on peut la considérer comme une relation entre au moins trois points : un ensemble de points vérifiant la relation de l'alignement.

La perception du tracé d'une droite joue un rôle important dans la confirmation de cet objet. Cependant, certaines représentations, comme celles de demi-droite ou de segment, peuvent avoir des conséquences sur la maîtrise des propriétés communes telles l'alignement et l'infinité des points.

Dans DEFI l'existence d'une droite est subordonnée à celle de deux points distincts nommés sur la figure (selon l'énoncé du problème). Cette approche intervient essentiellement dans la phase heuristique (*cf.* Exploration). Une droite qui existe et à laquelle DEFI fait référence dans la phase Exploration, peut mettre en évidence les relations suivantes :

- alignement ;

- droite parallèle à deux autres droites (parallélisme & transitivité) ;

- droite (XY) dont [XY] est un des côtés d'un parallélogramme.

Le parallélogramme :

Les définitions et théorèmes disponibles de DEFI sur le parallélogramme, sont traités et étudiés au Collège. Chaque théorème, choisi dans DEFI a sa réciproque :

- dans un parallélogramme, les côtés opposés sont égaux et parallèles ;

- dans un quadrilatère, si deux côtés opposés sont égaux et parallèles, alors c'est un parallélogramme ;

- si un quadrilatère a ses côtés opposés parallèles, alors c'est un parallélogramme ;

- les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu ;

- si dans un quadrilatère, les diagonales se coupent en leur milieu alors c'est un parallélogramme ;

- dans un parallélogramme le milieu d'une diagonale est aussi le milieu de l'autre.

Nous ne donnons pas toutes les propriétés, par exemple, celles sur les angles opposés d'un parallélogramme ne sont pas évoqués, étant donné que nous ne nous référons qu'aux connaissances de DEFI.

L'alignement :

L'alignement se définit à partir d'au moins trois points distincts, ou bien à partir d'une droite et d'un point sur cette droite. C'est une relation qui peut se trouver dans plusieurs situations dans DEFI :

- droites confondues ou superposables, la définition du milieu, droites qui se coupent en un point, droites parallèles et qui ont un point commun et le théorème d'Euclide : "*par un point, passe une et une seule*

droite parallèle à une droite donnée" (dans le cas où le point appartient à cette droite). Pour exprimer ces informations, DEFI dispose des théorèmes suivants :

- deux droites parallèles à une même troisième sont parallèles entre elles ;

- le point M est le milieu de [AB] si et seulement si M, A, B sont alignés et MA = MB ;

- par un point il passe une parallèle et une seule à une droite donnée.

Le milieu :

La définition du milieu : *"le point M est milieu du segment [AB] si et seulement si les points M, A, B sont alignés et MA = MB"* fonctionne dans les deux sens dans DEFI. Sa forme instanciée est jugée plus simple pour les élèves. Elle est équivalente implicitement, dans DEFI, à la définition du symétrique : "*B est le symétrique de A par rapport à M*" qui ne figure pas dans la liste de théorèmes.

Le parallélisme :

Définition : "*Deux droites du plan qui ne se coupent pas sont parallèles.*" ou bien : "*L'intersection de deux droites est soit un point, soit l'ensemble vide ou une des deux droites. Dans ces deux derniers cas, les deux droites sont parallèles.*"

C'est une notion très générique qui touche plusieurs autres concepts et objets mathématiques comme les polygones particuliers (parallélogramme, trapèze isocèle...) ou bien les angles (angles alternes internes...).

Dans DEFI, elle apparaît dans les théorèmes et définitions suivants :

- deux droites parallèles à une même troisième sont parallèles entre elles ;

- par un point, passe une et une seule droite parallèle à une droite donnée ;

- les définitions des parallélogrammes ;

- le théorème des milieux : dans un triangle, le segment passant par les milieux des deux côtés d'un triangle est parallèle au troisième côté, et sa longueur est égale à la moitié de ce côté.

La transitivité :

Nous distinguons, dans DEFI, la transitivité entre les droites de celle entre les longueurs. La donnée d'au moins de trois droites permet de bien expliciter cette relation par : "*Deux droites parallèles à une même troisième sont parallèles entre elles* " ou bien sous une autre formulation : "*Si deux droites sont parallèles, toute parallèle à l'une est parallèle à l'autre.*" Cette dernière n'existe pas dans DEFI. Elle est en effet plus difficile que la première, dans la mesure où une de ses conditions d'entrée est située dans le second fragment consacré habituellement à la conclusion du théorème.

L'égalité des longueurs :

Ce qui nous intéresse par cette propriété, c'est essentiellement l'organisation de la transitivité des rapports d'égalité. "*Deux quantités égales à une même troisième sont égales entre elles.*"

Distance double ou moitié :

Cette notion de rapport d'égalité existe par les théorèmes suivants :

- le théorème de Thalès : "*Le segment qui passe par les milieux des deux côtés d'un triangle est parallèle au troisième côté et sa longueur est égale à la moitié de ce côté.*" ;

- si M est le milieu de [AB] la longueur de [AB] est le double de celle de [AM].

3 - L'écriture des propositions dans DEFI :

Les propositions mises en hypothèses ou bien en conclusion dans DEFI sont les suivantes :

- les points ... sont alignés ;

- le point . est milieu de [..] ;

- les droites (..) et (..) sont parallèles ;

- le quadrilatère .... est un parallélogramme ;

- la longueur de [..] est égale à celle de [..] ;

- la longueur de [..] est égale au double de celle de [..].

4 - Les propositions non disponibles dans DEFI :

Parmi les relations d'objets, qui ne sont pas explicites dans cette liste, on peut citer, par exemple, celle de "*la moitié*". Cette relation est disponible sous la formulation de celle du " *double*" (AB est la moitié de CD : est plutôt saisi par CD est le double de AB). On peut penser qu'elle est facilement traduisible par les élèves.

On ne trouve pas également celles qu'on rencontre assez souvent dans la classe des problèmes de DEFI: "*le point C est symétrique de D par rapport à A.*" L'équivalence est établi par le système entre cette propriété et celle de "*le point A est le milieu de [DC].*" Comme nous l'avons signalé dans la définition du milieu.

De même, les relations entre les droites qui sont de la forme : *les droites qui se coupent, l'intersection de droites ou bien la droite passant par...* Toutes ces formulations sont exprimées par l'alignement. Une difficulté qui peut provenir de cette équivalence est la correspondance syntaxique. En effet, l'expression "*A est intersection de deux droites (CD) & (EF)*" considérée comme une proposition, alors que "*A D C alignés*" & "*E F A alignés*" est plutôt sous forme de deux propositions.

Les propriétés sur les angles ou sur d'autres formes géométriques, comme le losange, le cercle,...,ne font pas l'objet de la connaissance du domaine de DEFI.

II - Les choix didactiques dans DEFI :

1) La séparation : résolution de problème / démonstration :

Le constat d'échec des élèves en phase d'apprentissage de la démonstration a suscité plusieurs réflexions d'aide aux élèves. Face à cet échec et à la complexité des facteurs qui y interviennent, DEFI a choisi de séparer en deux modules la partie "Exploration" de la partie "Démonstration", dans la première se déroule l'élaboration des conjectures et la recherche de stratégies par interrogation interactive entre les propriétés de la figure, les données du problème et les conclusions intermédiaires ; dans la seconde, se déroule la mise en pas de déduction de toutes les étapes nécessaires pour la démonstration du problème, le but étant d'expliciter et de rédiger les conjectures mis en évidence dans la phase Exploration. Cette articulation vient répondre entre autres à des pratiques des élèves à trouver les données, la conclusion et les théorèmes susceptibles d'être nécessaires pour la résolution d'un problème, mais sans pour autant articuler cette recherche au contexte en question.

Ce choix didactique vise à apporter tout d'abord une aide à l'élève, par le principe où il est difficile de demander à un élève en difficulté de fournir une rédaction de la démonstration d'un problème sans qu'il ait fait une idée ou cherché sa solution. Ensuite, il trouve alors son importance à développer chez l'élève la prise en compte de cette coordination et de sa contribution à construire une démonstration à un problème donné. L'articulation est fondée

sur l'utilisation des propositions selon leur statut et non leur contenu, ainsi chaque proposition découverte n'a de sens que si elle contribue à l'avancement de la solution du problème. Un autre intérêt qui est non négligeable est, cette fois-ci, au profit du maître. Ce dernier aura la possibilité de mettre la main sur les composantes assez souvent soudées et imbriquées de la démarche déductive de l'élève.

2) L'exploration de la figure tenant compte de ses propriétés mathématiques :

L'arborescence dans la phase exploration est décrite dans un sens unique, celui partant du pôle de la conclusion finale du problème vers les conclusions intermédiaires et enfin pour s'agréger aux données. Dans l'heuristique, cela génère une suite de noeuds où chaque noeud représente une organisation autour d'une conclusion. Ce choix de caractéristique, le chaînage arrière se justifie par son rapprochement de la recherche naturelle " Je dois démontrer (p) que me faut il pour avoir (P) ? "

3) La transposition des théorèmes dans la phase heuristique :

Les théorèmes et définitions, dans DEFI, fonctionnent comme des "moteurs de recherche". Ainsi dans la phase Exploration, les conjectures sont basées sur la découverte du bon théorème à faire fonctionner. Ce bon théorème, dont il faut ensuite expliciter tous les éléments nécessaires et de mettre en évidence dans la phase Démonstration. Cet aspect fonctionel vient compléter celui d'heuristique de théorème.

Ce choix a pour intérêt de viser l'élaboration d'une méthodologie de recherche utilisant la connaissance disponible. Il n'est pas explicite comme tel, ce qui le rend davantage non directif.

4) La combinaison : chaînage avant et chaînage arrière :

Les éléments moteurs qui génèrent la perception de conjectures ne sont pas tous maîtrisables chez l'apprenant. Ensuite, l'ordre dans lequel l'élève va organiser ces conjectures, pour l'écriture de la démonstration, dépend également soit de ce qui est vu sur la figure, soit de la définition propre de l'objet sans souci du contexte en question. Pour cela, il y a une structure imposée dans DEFI, qui consiste à articuler le chaînage arrière pour l'élaboration de conjectures et le chaînage avant pour l'écriture de la démonstration.

En effet, DEFI, a choisi d'articuler ces deux chaînages comme suit : en arrière pour le module "Exploration" et en avant pour le module "Démonstration." Cette différenciation est riche en son apport en matière d'organisation de la démonstration, selon le statut épistémique des propositions, à la fin de la découverte des conjectures. C'est un choix qui respecte le principe d'ordre de la connaissance dans DEFI, vu qu'on note que le chaînage avant intervient dans le module "Démonstration" et non pas dans celui de "l'Exploration", c'est à dire après que l'élève ait une idée de la démonstration du problème. Les expérimentations que nous avons pu faire avec le logiciel Mentoniezh confirme l'intérêt de cette structure : dans ce logiciel le chaînage est mixte, mais on a remarqué que la plupart des élèves opte pour le chaînage arrière pour ainsi faire qu'un seul pas de démonstration, même pour un problème à plusieurs pas.

5) La granularité de la démonstration :

Dans le module Démonstration, le déroulement se fait par la proposition d'une suite de pas élémentaire, en explicitant pour chacun des pas les hypothèses, le théorème et la conclusion. Ainsi, le "texte" de la démonstration à l'interface est linéairement structuré dont l'unité est le pas ternaire. Ce choix peut se heurter aux pratiques de l'élève au niveau de la

constitution d'un texte, et également au niveau des implicites, mais néanmoins il se justifie par le principe suivant : "Si l'élève a compris, il doit être capable de communiquer en rendant compte de tous les éléments en jeu".

6) Les mots de liaisons :

Les connecteurs et mots de liaison sont souvent mal utilisés au début de l'apprentissage de la démonstration par les élèves. Une suite de "*donc*" ou de "*car*" sans un sens clairement définie. Mais, ils se développent en même temps que l'acquisition des règles du raisonnement déductif [DUVAL] en prenant des aspects qui reflètent par exemple l'assimilation du statut" : "*maintenait je vais démontrer que*", "*tout d'abord on va démontrer*", "*par hypothèse on sait que*"... Avec cet hypothèse, DEFI a choisi de neutraliser l'utilisation des connecteurs à l'interface. Il est demandé à l'élève après l'utilisation de DEFI une rédaction complète de la solution du problème dans le langage habituel de l'élève.

7) Le pas de démonstration à une seule conclusion :

L'analyse des textes produits par les élèves nécessite la distinction entre la déduction locale de celle globale [Duval]. Dans ce paradigme, on se heurte très souvent à des constructions imbriquées telles que le produisent les élèves : deux théorèmes qui se suivent, ou bien des constructions binaires. Pour cela, il nous semble que ce choix, bien qu'il soit contraignant en temps, en un premier lieu d'apprentissage il est nécessaire.

8) L'ordre à l'intérieur des pas : Conclusion - Théorème - Hypothèses :

Le pas de la démonstration est ordonné de la conclusion aux hypothèses en passant par le théorème. Ce choix se justifie par la priorité donnée à la génération du pas par sa conclusion. Il peut être une contrainte dans la mesure où les pas de déduction ne sont pas toujours considérés équivalents au niveau, au moins, de leur construction formelle, par l'élève. Par exemple, les pas internes et le pas de la conclusion finale, dans un texte écrit de démonstration, n'ont pas forcément la même syntaxe.

9) L'analyse de la réponse d'élèves :

Nous décrirons par la suite le module diagnostic en exposant les choix didactiques qui caractérisent le fonctionnement de DEFI.

III - Architectures :

a - Module Exploration :

Le principe du module "Exploration" repose sur la démarche de l'activité du Mathématicien ainsi décrite par [Piaget 1955] ; le mathématicien procède d'abord par une reconstitution des mécanismes communs jusqu'à dégager les lois les plus générales de la structure cherchée, puis au delà de cette étape, interviennent l'axiomatisation et l'exploitation.

Ce module, permet au système de distinguer les différentes stratégies de la résolution d'un problème donné. Par suite, pour chaque proposition, le système gère :

- Son statut :

-- si c'est une donnée ;

-- si c'est une hypothèse vraie (démontrable dans la situation problème) ;

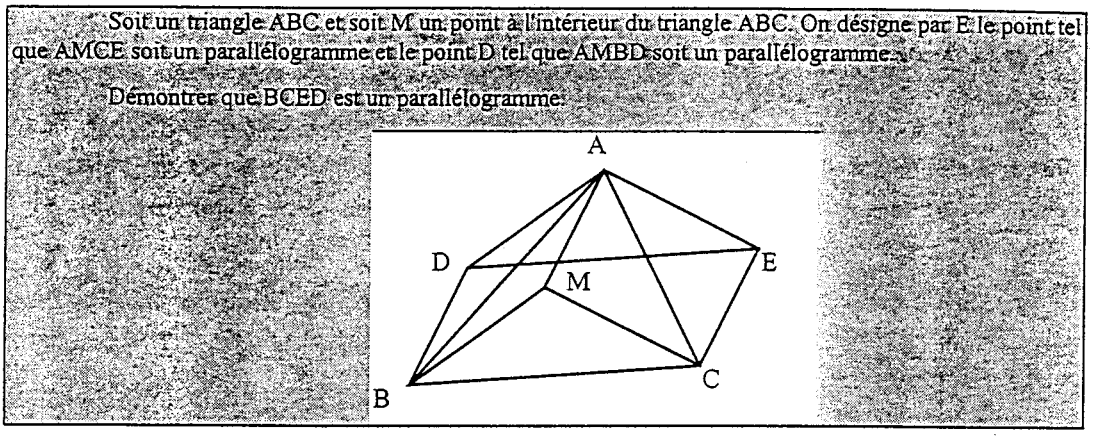
-- si c'est la conclusion du problème ou bien une des conclusions intermédiaires.

- Son rôle :

-- les différentes stratégies dont elle peut faire partie.

Exemple (Traces enregistrées des élèves) :

(Extrait des traces d'un binôme)



Nous présentons les traces d'un binôme, dans la phase "Exploration", en segmentant ces traces consécutives en deux phases qui diffèrent par les conceptions sous-jacentes.

phase1 *:* (DEFI->Questions ; Elève-> réponse)

Question:
Sais-tu démontrer que le quadrilatère BCED est un parallélogramme ?
Réponse : NON

(I)
Question:
Sais-tu démontrer que les droites DB et CE sont parallèles
Réponse : OUI

Question:
Sais-tu démontrer que les droites BC et ED sont parallèles
Réponse : NON

(II)
Question:
Existe-t-il une droite parallèle à ED et à BC
Réponse : NON

Question:
Sais-tu démontrer que les segments DB et CE sont égaux
Réponse : NON

Existe-t-il un segment dont la longueur soit égale à (soit le double de ,la moitié de celle de DB et de CE
Réponse : NON

Phase 2 :

(III)
Question:
Les droites BE et CD se coupent-elles en un point de la figure?
Réponse : OUI

Donne le nom de ce point
Réponse : M

Question:
Sais-tu démontrer que le point M est le milieu du segment CD ?
Réponse : NON

Question:

Sais-tu démontrer que les points CMD sont alignés ?
Réponse : annuler

(Phase 1) (I) & (II) : Il s'agit de la conception : Parallélogramme "côtés égaux/parallèles."

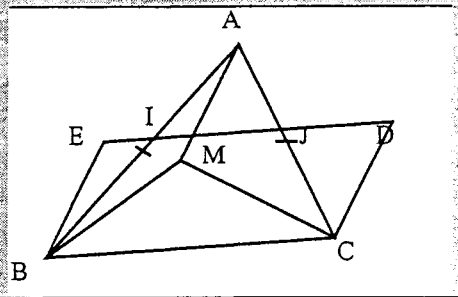
(Phase 2) (III) : Il s'agit de la conception : Parallélogramme "intersection des diagonales."

Seule, la prise en compte par l'élève de la situation problème qui déterminera le choix entre ces deux noeuds. Dans l'exemple ci-dessus, l'élève a proposé "M milieu de [CD] &[BE]" qui doit être un fait contingent à la figure qu'il a faite. DEFI n'a pas rejeté cette proposition, mais il va plutôt amener l'élève à le faire.

Dans le cas où deux possibilités sont utilisables dans une situation problème, c'est plutôt le choix de la stratégie, toujours par l'élève, qui déterminera le choix entre les deux. Nous donnons un autre exemple :

On considère un triangle ABC et on désigne par I et J les milieux respectifs de [AB] et [AC]. On donne un point M quelconque, et on désigne par E et D les symétriques de M respectivement par rapport à I et J.

Démontrer que BCDE est un parallélogramme.



Nous donnons les traces de deux binômes du module "Exploration" :

(Traces du binôme 1 : Kaz et Pri 13/02/93)

Question:
Sais-tu démontrer que le quadrilatère EBCD est un parallélogramme ?
Réponse : NON

Question:
Sais-tu démontrer que les droites DE et BC sont parallèles
Réponse : NON

(a)

Question:
Existe-t-il une droite parallèle à BC et à DE
Réponse : OUI

(a.1)

Question:
Existe-t-il une droite parallèle à BC et à DE
Réponse : OUI

Question:
Sais-tu démontrer que les droites IJ et DE sont parallèles
Réponse : OUI

Question:
Sais-tu démontrer que les droites IJ et BC sont parallèles
Réponse : OUI

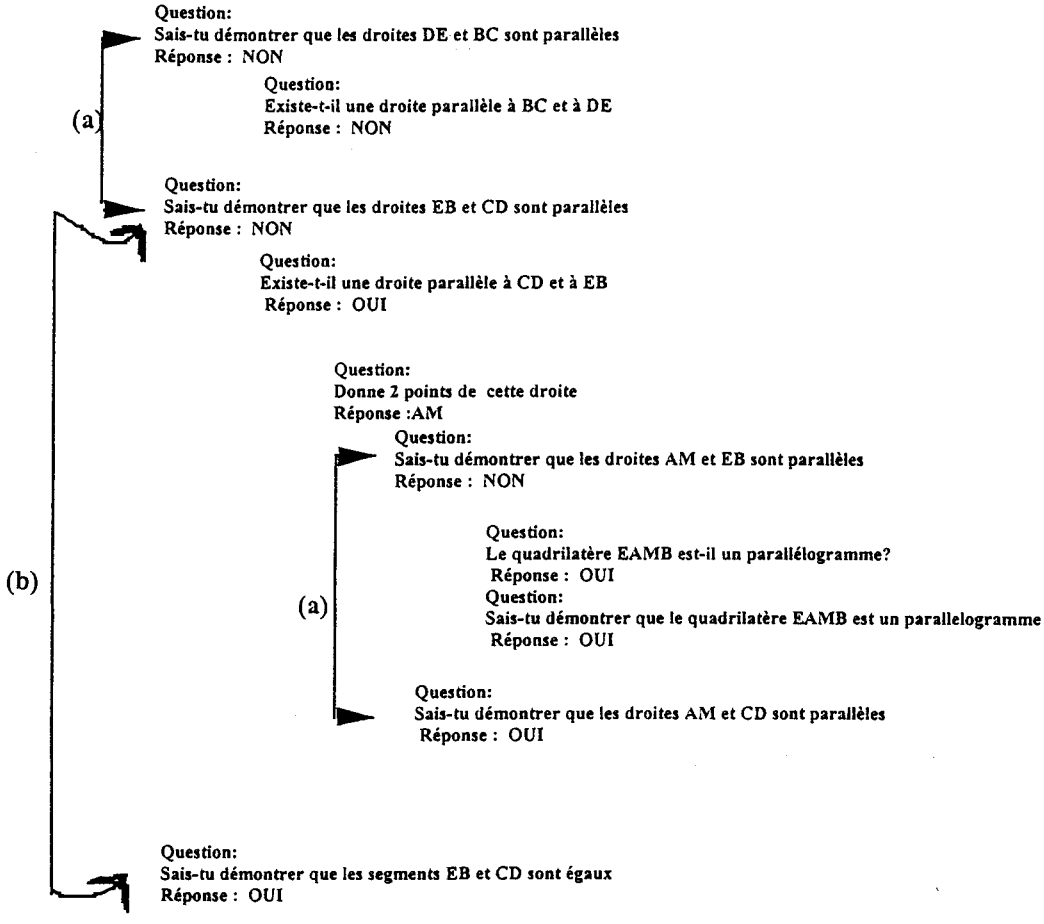
Question:
Sais-tu démontrer que les droites EB et CD sont parallèles
Réponse : OUI

(a) désigne la conception du parallélogramme : côtés opposées parallèles.

Nous signalons également (a.1) qui désigne la découverte de la droite (IJ) non tracée au préalable par l'énoncé du problème ainsi que l'insinuation de la transitivité du parallélisme.

(Traces du binôme 2 : (Bré & Chap13/02/93))

Question:
Sais-tu démontrer que le quadrilatère EBCD est un parallélogramme ?
Réponse : NON

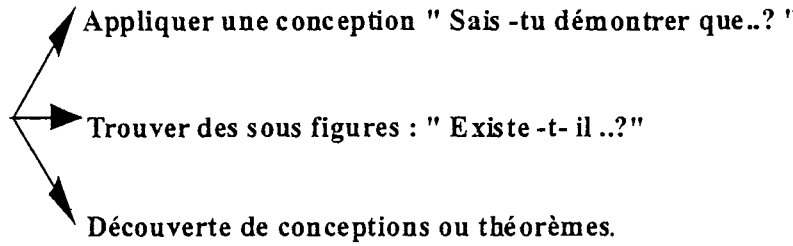


(a) montre l'interrogation de DEFI sur la conception "parallélogramme - côtés opposés parallèles." Elle est rejetée par l'élève et par suite DEFI l'interroge sur une deuxième conception (b) : "parallélogramme-côtés opposés égaux et parallèles."

Dans l'exemple du binôme 2, on voit très bien que la conception parallélogramme - parallélisme s'impose mais en mobilisant la droite (AM).

Par contre, pour le même problème, l'exemple du binôme 1, montre que la stratégie repose sur la conception : parallélogramme-parallèle qui est mobilisée en utilisant Thalès.

Ce dialogue, comme le montre les exemples ci-dessus, est généré par un nombre stable de type d'interrogations dont les finalités sont :



Ainsi, par exemple, on pense que si l'élève confirme sa réponse par "*Oui*" à la question "*Sais tu démontrer que ABCD est un parallélogramme ?*" c'est pour la justifier avec un des théorèmes ou définition de parallélogramme. Dans le cas contraire où la réponse de l'élève est "*Non*", l'Exploration entame un autre dialogue, en posant de nouvelles interrogations de type "*Existe -t- il ..*" pour l'inciter à découvrir des objets de la figure lui permettant d'anticiper l'utilisation de théorème.

Pour la classe de problème choisie, DEFI dispose d'un nombre fini de théorèmes qui répond à la géométrie affine élémentaire au collège. La liaison entre ces théorèmes et les questions qui peuvent en être déduites crée un déroulement semblable dans la phase heuristique, c'est une des caractéristiques de la transposition informatique du "champ conceptuel" de la démonstration dans DEFI.

Par suite, dans les connaissances du module on distingue celles qui sont locales et propres à la situation problème en question, de celles globales qui prennent appui à la notion de ce " champ conceptuel ":

(i)- Sais-tu démontrer que (AB)//(CG) ?

(ii)- Existe -t- il une droite parallèle à (AB) et à (CG) ?

(i) appartient à une suite d'entretiens sur la résolution du problème en question.

(ii) tout en faisant partie de cette suite, on peut également la rencontrer dans d'autres problèmes où la question du "parallélisme" est posée, d'où son caractère global.

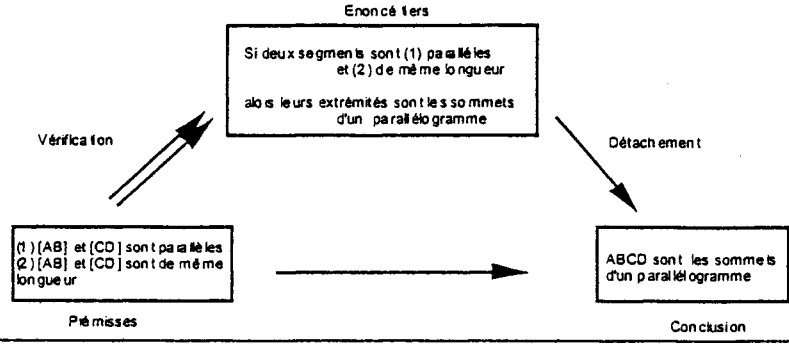
Une des conséquences de cette transposition informatique est la répétition du même dialogue par DEFI pour un même comportement de l'élève. Ceci reflète d'une part la stabilité des règles d'inférences disponibles dans le système et d'autre part, le parcours de DEFI est indépendant du nombre de fois de sa sollicitation par l'élève.

b - Module Démonstration :

Le système dispose de l'énoncé du problème d'une base de théorèmes, et des règles de "vérité" d'une proposition : Chaque proposition est vraie si c'est une donnée de l'énoncé ou bien si elle découle d'un théorème vrai dans DEFI. Une approche qui répond à la structure fondamentale de la démonstration, comme c'est décrit chez Duval :

" ...D'une part elle articule les énoncés en fonction du statut qui leur est reconnu et non en fonction de leur sens. D'autre part elle progresse par substitutions d'énoncés et non par enchaînement d'énoncés .."

(La définition d'un pas - Exemple)



c - Module FIGURE

Nous tenons à signaler l'existence de ce module, bien qu'il fasse toujours l'objet d'étude par le concepteur et qu'il deviendra au mieux un logiciel séparé de DEFI (et que l'enseignant pourra, s'il le souhaite, faire fonctionner en parallèle). En effet, nous avons pu faire quelques séances de pré-expérimentations avec des élèves de quatrième où quelques résultats méritent d'être évoqués.

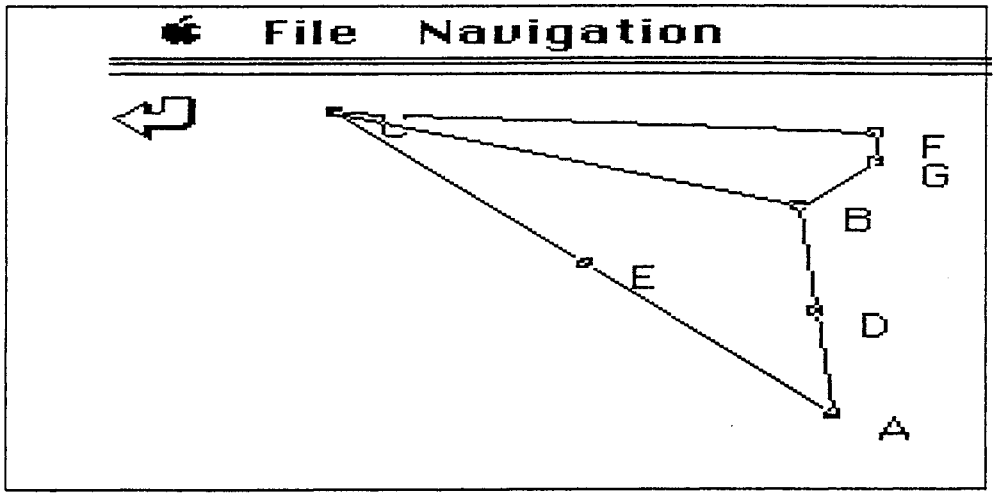
Ce module a pour but une interaction entre les données énoncées dans le problème à résoudre et la figure. Il fonctionne sur deux fenêtres : " Figure" et " Donnée".

L'élève, dans le déroulement de l'interaction, prend d'abord connaissance de l'énoncé du problème disponible sur écran et polycopié sur une feuille où il est invité à tracer sa figure.

Après le traçage de la figure du problème à résoudre sur feuille, l'élève passe au module Figure dans l'interface du logiciel qui est présenté sous deux fenêtres : une, graphique contenant la figure et l'autre, pour la saisie des données du texte du problème.

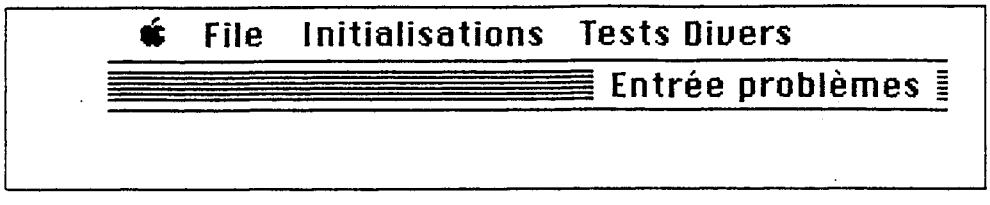
Exemple :

On considère un triangle ABC. On désigne par D et E les milieux de [AB] et de [AC] et par F et G les intersections de (CD) et de (BE) avec parallèle menée par A à (BC). Démontrer que FA = AG.

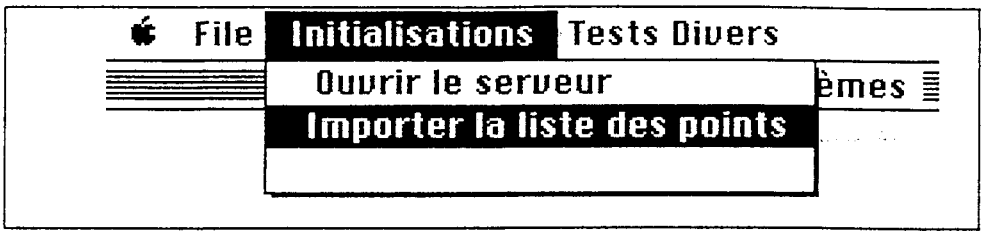


La figure affichée à l'écran comporte les noms des objets énoncés dans le texte du problème, mais sans aucune propriété au préalable. Cette figure initiale est mobile et les points sont indépendants les uns des autres répondant ainsi à une exploration à "main levée" où la fixation des propriétés ne sera faite que lorsque les données seront déclarées par l'élève dans la fenêtre "Donnée" :

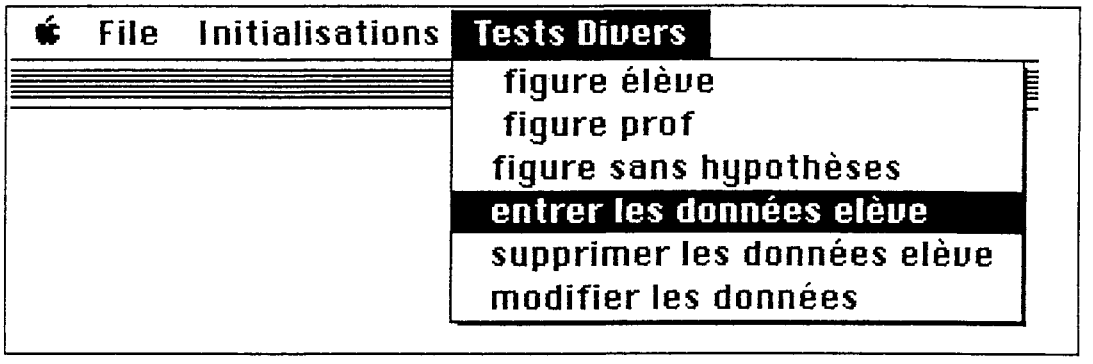
1- L'ouverture de la fenêtre "Donnée" présente l'écran suivant :



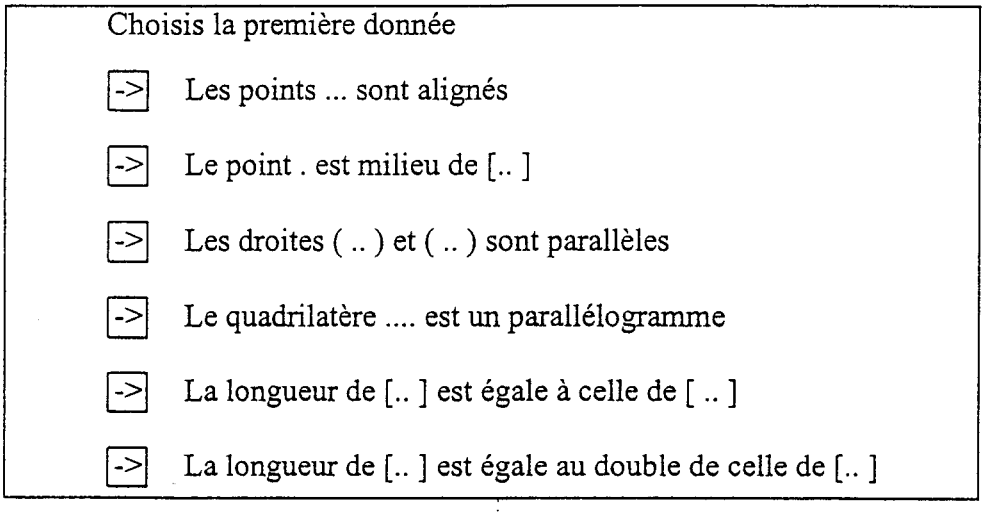
2- La deuxième manipulation, ci-dessous, permet la liaison entre la figure et l'énoncé du texte :



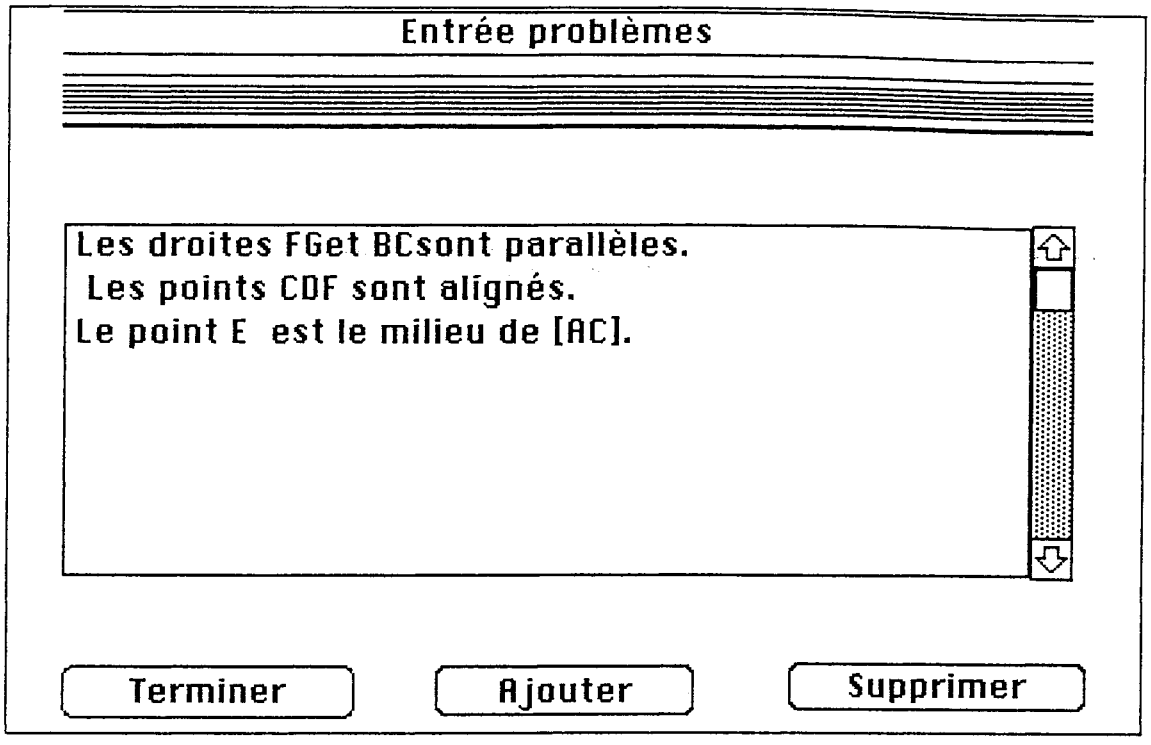
3- La troisième manipulation consiste à saisir les données :



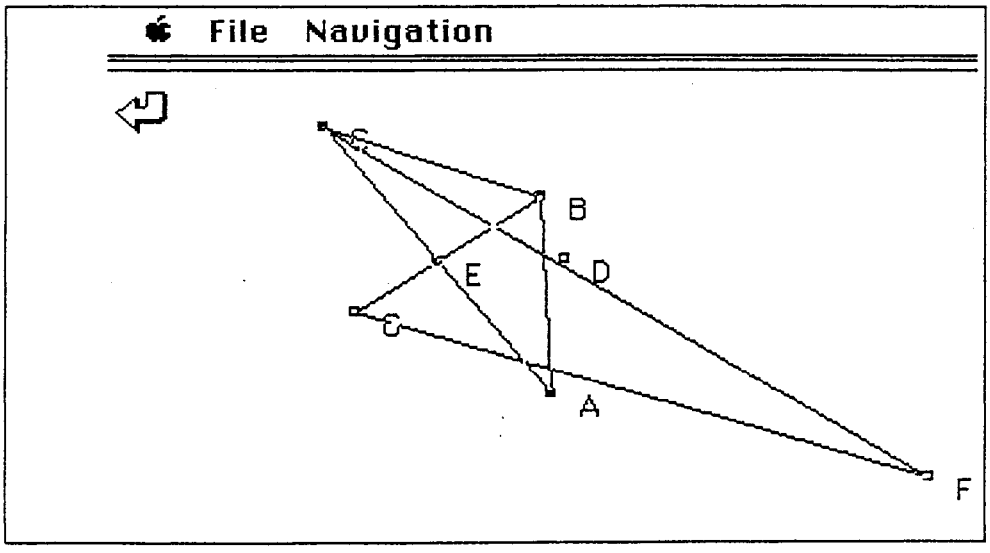
4- Les données sont saisies une à une par les phrases squelettes ci-dessous,



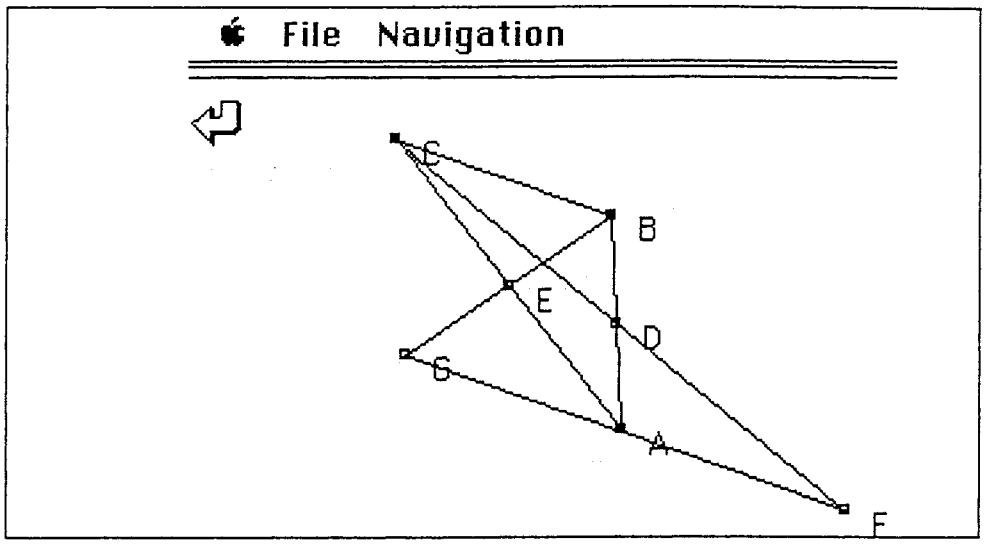
et viennent s'afficher dans l'écran qui suit. Après chaque donnée(s) déclarée(s), l'élève peut réouvrir la fenêtre contenant la figure.



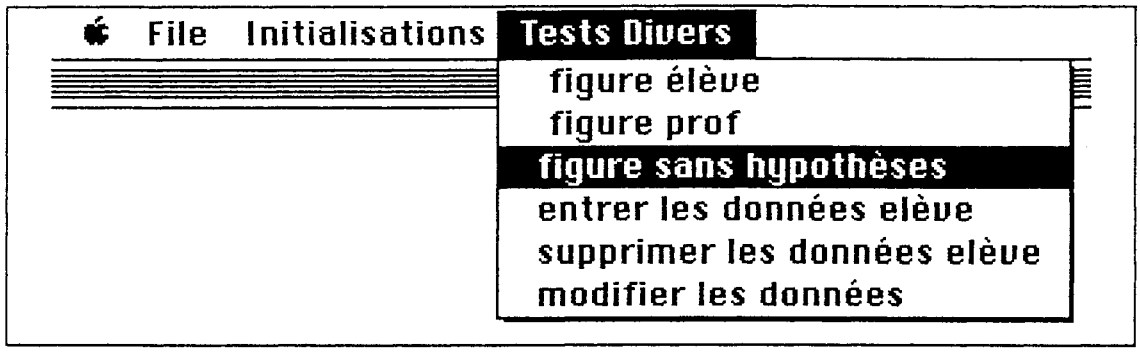
La figure prend forme et les propriétés se stabilisent au fur et à mesure que celles-ci sont déclarées. Ainsi les points perdent leurs degrés de liberté. Par exemple, le point E peut se déplacer sur l'écran, mais toujours comme milieu du segment [AC].



Lorsque toutes les données de l'énoncé sont déclarées à l'interface, l'élève obtient une figure correcte et complète dont les propriétés des objets sont stables.



L'écran suivant permet à l'observateur de cerner les propriétés non citées dans l'énoncé et qu'aura données l'élève. En effet, dans "figure sans hypothèses", il s'agit de la figure sans les hypothèses du texte. L'observateur peut alors vérifier les propriétés redondantes en observant les points qui restent dépendants.



Dans le cas où les données sont en moins, la consultation dans le menu de l'écran, ci-dessus, de la rubrique "figure élève" permet à l'observateur ou à l'élève de faire bouger cette dernière. Aussi les données qui sont en attente ne sont-elles pas conservées, illustrant ainsi que la figure ne correspond pas encore à celle de l'énoncé du problème et tracée par l'élève sur papier-crayon. Réciproquement, si les données saisies dans l'interface sont correctes, ceci permet de vérifier l'exactitude de la figure papier-crayon. Un cas auquel nous nous attendons moins quand l'activité sur machine se déroule par binôme. Autre que vérificateur, ce module reste accessible pendant l'utilisation des deux modules "Exploration" et "Démonstration", qui pourrait être une aide pour la mise en évidence des sous figures-clés.

d - Module Diagnostic de DEFI :

1) choix cognitifs

L'utilisation correcte des théorèmes constitue d'une part une connaissance globale et formelle, indépendante des problèmes à résoudre :

- le nombre des hypothèses doit correspondre exactement à celui des conditions d'entrées de ce théorème

- les hypothèses doivent être de même nature que celle des conditions d'entrées du théorème.

- La conclusion doit correspondre à celle du théorème utilisé.

D'autre part, une connaissance locale articulée avec la situation problème, où les propositions sont manipulées selon leur statut et non leur contenu.

- les hypothèses doivent être soit des données du problème soit des conclusions intermédiaires déjà démontrées

- La conclusion doit être soit la conclusion du problème ou une des conclusions intermédiaires du problème non encore démontrée.

- Les objets doivent comporter les noms indiqués dans le problème.

Chaque "pas déductif" erroné produit par l'élève est diagnostiqué par le système, suivant les critères ci-dessus de validité de la démonstration. La validation porte sur les opérations logiques et épistémiques. Les messages interviennent localement et séparément sur un pas de déduction, mais ensemble ils constituent des maillons pour l'acquisition de la démonstration. C'est une hypothèse que nous avons bien vérifiée.

2) La position des messages :

Un message n'apparaît pas entre les éléments d'un pas déductif en cours, mais à la fin de sa constitution, il n'est pas non plus dans une option ouverte à l'élève, où par simple demande chaque entrée est validée. Ce choix neutralise le tâtonnement, en éliminant la confusion que peut créer une situation contraire, l'élève peut associer le message d'erreur à une entrée isolée alors que le message porte sur la combinaison de toutes les composantes du pas. Le message peut être le même autant de fois que la même réponse erronée persiste. Les messages sont exclusifs, l'apparition d'un exclut celle des autres, d'ailleurs est-ce raisonnable de signaler plusieurs erreurs dans un même message ? Dans ce sens nous citons Descartes "...on ne doit pas commencer une étude par la recherche des choses difficiles....cela étant fait, il faut réfléchir attentivement aux vérités découvertes et examiner soigneusement pourquoi nous avons pu trouver les unes plus tôt et plus facilement que les autres.."

Les messages sont courts et interviennent essentiellement dans le module Démonstration, après une réponse de l'élève sous forme d'un pas complet et explicite. Ils ne portent jamais directement sur le théorème. Par exemple, on ne rencontrera pas le message suivant "le théorème est réciproque " mais plutôt dans l'exemple ci-dessous " le nombre des hypothèses est incorrect ".

Exemple :

conclusion : ABCD parallélogramme

Théorème : Un parallélogramme a ses côtés égaux et parallèles

hypothèses : AB = CD & (AB)//(CD).

message : "Vérifies si tu utilises autant d'hypothèses que celles qui figurent dans le théorème choisi"

3) choix stratégiques

Pour une réponse qui ne satisfait pas plusieurs critères, il y a une structure de recouvrement, c'est le critère prioritaire qui décidera du message émis. Ce choix est fait pour

amener l'élève à prendre compte du statut des propositions et ensuite à constituer un pas de déduction dont les composantes sont bien articulées.

Autre choix du système, c'est l'uniformité, si l'élève ne répond pas partiellement ou totalement à un des critères d'évaluations, sa réponse aura le même message. Par exemple, soit qu'il manque une hypothèse ou deux, le message sera le même. "vérifies si tu utilises le même nombre d'hypothèses que celles qui figurent dans le théorème choisi."

4) La nature des messages

Les messages de DEFI ne sont pas des découragements ni des renforcements ou des stimulus-réponse, mais, ils tirent l'attention de l'élève sur un observable réel dont il peut s'en rendre compte. Leurs objectifs est d'apprendre à l'élève à trouver par lui même, en s'attaquant aux symptômes des erreurs pour les faire disparaître et déstabiliser ainsi l'erreur profonde.

Les messages actuels de DEFI sont en nombre fini en ne se limitant pas à un problème et à ses solutions, mais englobe le caractère commun de tous les problèmes semblables ; autrement dit la structure logique des théorèmes l'emporte sur la connaissance de la solution de chaque problème.

La liste des messages :

- Il n y a pas lieu de démontrer une hypothèse du problème.
- Si tu souhaites faire avancer ta démonstration, ne propose pas la conclusion du problèm ecomme hypothèse.
- Si tu souhaites faire avancer ta démonstration, ne propose pas ta conclusion en hypothèse.
- La propriété () ne fait pas partie des hypothèses du problème. Si tu penses devoir utiliser cette propriété, il te faut d'abord la démontrer.
- Vérifies si tu utilises le même nombre d'hypothèses que celles qui figurent dans le théorème choisi.
- Vérifies si la propriété que tu cherches à démontrer est une des conclusions du théorème choisi.
- Compare les hypothèses que tu as données et celles du théorème choisi.
- A quels points appliques tu le théorème que tu as choisi.
- Ex : bc n'apparaît dans aucune des égalités.
- L'égalité () n'apporte rien / il y a des inégalités inutiles
- Tu as démontré que ()

Partie C Résultats :

Dans cette partie, nous présentons trois résultats essentiels que nous avons obtenus, à la suite des observations des élèves en interaction avec DEFI et de l'étude des traces des séquences enregistrées par l'ordinateur.

1 - L'apprentissage des théorèmes :

a - L'étude des observables sur l'utilisation des théorèmes par les élèves :

Dans son travail de thèse, AG Almouloud a utilisé DEFI entre deux analyses fines des productions de démonstrations par les élèves. Ces analyses s'appuient sur les observables dont le traitement est à composante purement logique. C'est un choix qui a permis à l'auteur de répondre à sa problématique sur l'apport bénéfique de DEFI. Or on a constaté qu'il y a une forte corrélation entre le type de théorème et ces observables. Ce qui marque l'intérêt du prolongement de notre direction de recherche par rapport à celle de l'auteur.

Prenons par exemple l'observable : "*manque hypothèse*", sa fréquence varie aussi bien selon le théorème présent que selon la nature de l'hypothèse concernée. Par exemple, dans la situation de Thalès réciproque, sa fréquence est beaucoup plus importante en ce qui concerne l'hypothèse de l'alignement :

Hypothèse 1 : *(IJ)//(BC)*. Hypothèse 2 : *J milieu de [AB]*. Hypothèse 3 : *A, I, C alignés*.

Théorème : " *La droite passant par le milieu d'un côté d'un triangle et est parallèle au second côté passe par le milieu du troisième côté.* "

Conclusion : *I milieu de [AC]*.

On a constaté que l'hypothèse 3 est rarement citée par les élèves. Contrairement aux hypothèses 1 et 2. Alors que c'est on prend le théorème des milieux *" la droite passant par les milieux des deux côtés d'un triangle est parallèle au troisième côté "*. Si les hypothèses sont citées, elles le seront systématiquement toutes les deux.

Nous rappelons que nous étudions les définitions et théorèmes de la géométrie affine apprise au collège qui sont disponibles dans DEFI, le théorème des milieux et sa réciproque, définitions et théorèmes du parallélogramme et la définition du milieu. Nous rappelons également que nous nous intéressons au théorème en tant qu'élément dans le processus de la démonstration aussi bien dans la phase heuristique que celle rédactionnelle. La prise en compte de ces situations et grâce à leurs explicitations dans DEFI nous permet en effet de voir que le comportement, de l'élève, vis à vis des théorèmes n'est pas dissocié du contenu et ceci au moins dans les trois situations suivantes :

- *Les équivalences sémantiques [Houdebine]*

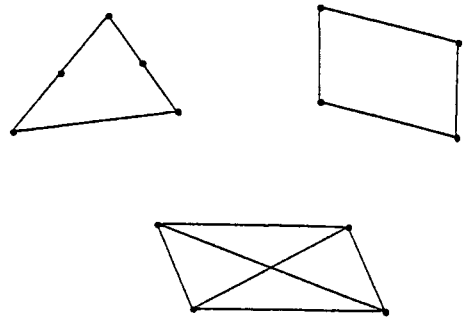
  - Comme l'équivalence entre les prémisses " parallélogramme" et " droites parallèles"

- *Le programme de construction de la figure,[Piaget]*

  - L'intersection des diagonales est presque toujours perçues comme une conséquence.

- *Condition nécessaire et intrinsèque à la représentation de l'objet mathématique.*

  - L'alignement est associé de manière intrinsèque et non explicite à la représentation du milieu.



b - L'acquisition progressive des théorèmes dans DEFI :

L'étude de DEFI montre que l'apprentissage des théorèmes se fait théorème par théorème. Cette hypothèse est vérifiée tout au moins dans DEFI et pour les élèves en difficultés.

Au cours du module Démonstration, l'élève est amené à réaliser une suite de pas séparés par la validation du système. La constitution de ces pas varie selon la situation problème en question, en conservant toujours la même structure de l'utilisation logique et formelle d'une règle d'inférence. Cependant, on a constaté que cette seconde composante bien qu'elle soit bien appliquée à un théorème dans un pas, ne le sera pas systématiquement au second pas utilisant un autre théorème. Autrement dit la réussite d'un pas de déduction n'est pas transférée tout de suite à la connaissance de la manipulation théorique d'une règle logique comme le représente un " *théorème* " mais plutôt associé localement au sens ou au contenu du théorème présent. Enfin, le théorème ne représente pas pour l'élève, au moins en premier lieu d'apprentissage, une règle d'inférence.

En outre, ce résultat génère deux conséquences sur la suite des actions de l'élève. D'une part quand il réalise une réussite approuvée par le système dans un pas donné, l'élève va transposer la constitution logique en utilisant le même théorème sans vérifier la validité du statut des hypothèses et du pas en entier. D'autre part, il y a plus de chance que le théorème en question soit utilisé avec moins d'erreur par la suite. Par conséquent, nous formulons les deux hypothèses suivantes sur le fonctionnement de l'élève :

Un théorème réussi, l'élève tente de le réutiliser :

En effet l'élève fait une suite de pas de démonstration P1, P2....Pi...Pn, où chaque pas est réalisé avec un théorème donné, si le pas Pi est réussi à l'aide du théorème Ti, l'élève va tenter de le réutiliser presque à tout prix pour les pas suivants Pj (j>i).

Le nombre d'erreurs diminue pour un théorème déjà réussi :

Sur la suite de pas : P1, P2...Pk(Ti),.... Pi(Ti), Pi+1...Pj(Ti)....Pn,

si dans le pas Pi(Ti), le théorème Ti est réussi pour la première fois dans le pas Pi, alors le nombre d'erreurs dans le pas Pk(Ti),est nettement supérieure que dans le pas Pj(Ti). (j>k).

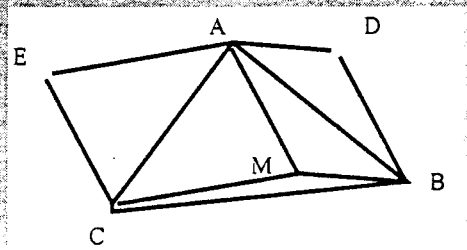
Nous illustrons ces comportements à l'aide des traces d'élèves enregistrés par DEFI :

Exemple (Extrait des traces enregistrées d'un binôme (B 9-10/9.02)

(Extrait des traces d'un binôme)

Soit un triangle ABC et soit M un point à l'intérieur du triangle ABC. On désigne par E le point tel que AMCE soit un parallélogramme et le point D tel que AMBD soit un parallélogramme.

Démontrer que BCDE est un parallélogramme.



La démonstration de ce problème nécessite l'utilisation des théorèmes suivants :

- Un parallélogramme a ses cotés opposés égaux et parallèles

- La transitivité

- Un quadrilatère qui a deux côtés opposés égaux et parallèles est un parallélogramme.

Nous allons voir à travers ces traces la réaction d'un binôme à la suite de la réussite du théorème " un parallélogramme a ses côtés opposés égaux et parallèles ". On prend les 16 premiers pas.

Dans l'analyse de ces 16 pas on recourt à une analyse clinique, en analysant localement chaque pas et globalement l'évolution de ceux ci.

(a) - Trois premiers pas :

Tu souhaites démontrer que:
Le quadrilatère AMCE est un parallélogramme.
En appliquant le théorème suivant:
Un parallélogramme a ses côtés opposés égaux et parallèles.
En utilisant les hypothèses suivantes
EC est égal à AM
Les droites (DB) et (AM) sont parallèles.
Les droites (EC) et (AM) sont parallèles.
Le quadrilatère AMBD est un parallélogramme.
Les droites (AM) et (CE) sont parallèles.
Message : Il n'y pas lieu de démontrer une hypothèse du problème .

Tu souhaites démontrer que:
EC est égal à DB
En appliquant le théorème suivant:
Un parallélogramme a ses côtés opposés égaux et parallèles.
En utilisant les hypothèses suivantes
EC est égal à DB
EC est égal à DB
Message : Si tu souhaites faire avancer ta démonstration, ne propose pas ta conclusion comme hypothèse.

Tu souhaites démontrer que:
Le quadrilatère EDBC est un parallélogramme.
En appliquant le théorème suivant:
Un parallélogramme a ses côtés opposés égaux et parallèles.
En utilisant les hypothèses suivantes
Les droites (EC) et (DB) sont parallèles.
CE est égal à BD
Message : La propriété les segments [CE] et [BD] ont même longueur ne fait pas partie des hypothèses du problème. Si tu penses devoir utiliser cette propriété, il te faut d'abord la démontrer .

(b) - Quatre pas suivants :
Tu souhaites démontrer que:
EC est égal à AM
En appliquant le théorème suivant:
Un parallélogramme a ses côtés opposés égaux et parallèles.
En utilisant les hypothèses suivantes
DB est égal à AM
Message : La propriété les segments [DB] et [AM] ont même longueur ne fait pas partie des hypothèses du problème. Si tu penses devoir utiliser cette propriété, il te faut d'abord la démontrer .

Tu souhaites démontrer que :

AM est égal à BD
En appliquant le théorème suivant:
Un parallélogramme a ses côtés opposés égaux et parallèles.
En utilisant les hypothèses suivantes
AM est égal à DB
Les droites (AM) et (BD) sont parallèles.
Message : Si tu souhaites faire avancer ta démonstration, ne propose pas ta conclusion comme hypothèse.

Tu souhaites démontrer que:
Le quadrilatère AMBD est un parallélogramme.
En appliquant le théorème suivant:
Un parallélogramme a ses côtés opposés égaux et parallèles.
En utilisant les hypothèses suivantes
AM est égal à BD
Les droites (AM) et (BD) sont parallèles.
Message :
Il n'y pas lieu de démontrer une hypothèse du problème .

Tu souhaites démontrer que :
Le quadrilatère AMCE est un parallélogramme.
En appliquant le théorème suivant:
Un parallélogramme a ses côtés opposés égaux et parallèles.
En utilisant les hypothèses suivantes
AM est égal à CE
Les droites (AM) et (EC) sont parallèles.
Message : Il n'y pas lieu de démontrer une hypothèse du problème .

(c) - Trois pas suivants :

Tu souhaites démontrer que:
Les droites (DB) et (EC) sont parallèles.
En appliquant le théorème suivant:
Un parallélogramme a ses côtés opposés égaux et parallèles.
En utilisant les hypothèses suivantes
DB est égal à EC
EC est égal à AM
Les droites (EC) et (AM) sont parallèles.
Les droites (AM) et (BD) sont parallèles.
EC est égal à BD
Message : La propriété les segments [EC] et [BD] ont même longueur ne fait pas partie des hypothèses du problème. Si tu penses devoir utiliser cette propriété, il te faut d'abord la démontrer .

Tu souhaites démontrer que :
Les droites (AM) et (CE) sont parallèles.
En appliquant le théorème suivant :
Un parallélogramme a ses côtés opposés égaux et parallèles.
En utilisant les hypothèses suivantes
Les droites (DB) et (CE) sont parallèles.
Le quadrilatère AMBD est un parallélogramme.
Les droites (AM) et (BD) sont parallèles.
Le quadrilatère AMCE est un parallélogramme.
Message :
La propriété les droites (AM) et (BD) sont parallèles ne fait pas partie des hypothèses du problème. Si tu penses devoir utiliser cette propriété, il te faut d'abord la démontrer .

Tu souhaites démontrer que:
Le quadrilatère AMDB est un parallélogramme.
En appliquant le théorème suivant:

Un parallélogramme a ses côtés opposés égaux et parallèles.
En utilisant les hypothèses suivantes
AM est égal à EC
Le quadrilatère AMCE est un parallélogramme.
Les droites (AM) et (CE) sont parallèles.
AM est égal à DB
Les droites (AM) et (DB) sont parallèles.
Message : La propriété les droites (AM) et (DB) sont parallèles ne fait pas partie des hypothèses du problème. Si tu penses devoir utiliser cette propriété, il te faut d'abord la démontrer .

(d) Quatre pas suivants :

Tu souhaites démontrer que :
Le quadrilatère DAMC est un parallélogramme.
En appliquant le théorème suivant :
Un parallélogramme a ses côtés opposés égaux et parallèles.
En utilisant les hypothèses suivantes
Le quadrilatère AMCE est un parallélogramme.
Message : Vérifie si la propriété que tu cherches à démontrer est une des conclusions du théorème choisi.

Tu souhaites démontrer que:
Les droites (AM) et (CE) sont parallèles.
En appliquant le théorème suivant:
Un parallélogramme a ses côtés opposés égaux et parallèles.
En utilisant les hypothèses suivantes
Le quadrilatère AMCE est un parallélogramme.
Message :
Tu as démontré que : Les droites (AM) et (CE) sont parallèles.

Tu souhaites démontrer que :
Les droites (DB) et (AM) sont parallèles.
En appliquant le théorème suivant :
Un parallélogramme a ses côtés opposés égaux et parallèles.
En utilisant les hypothèses suivantes
Le quadrilatère AMDB est un parallélogramme.
Message :
La propriété le quadrilatère AMDB est un parallélogramme. ne fait pas partie des hypothèses du problème. Si tu penses devoir utiliser cette propriété, il te faut d'abord la démontrer .

Tu souhaites démontrer que:
Les droites (AM) et (BD) sont parallèles.
En appliquant le théorème suivant:
Un parallélogramme a ses côtés opposés égaux et parallèles.
En utilisant les hypothèses suivantes
Le quadrilatère AMBD est un parallélogramme.
Message :
Tu as démontré que : Les droites (AM) et (BD) sont parallèles.

(e) Deux pas suivants :

Tu souhaites démontrer que:
Les droites (CE) et (BD) sont parallèles.
En appliquant le théorème suivant:
Un parallélogramme a ses côtés opposés égaux et parallèles.
En utilisant les hypothèses suivantes
Le quadrilatère EDBC est un parallélogramme.
Message:
Si tu souhaites faire avancer ta démonstration, ne propose pas la conclusion du problème comme hypothèse.

Tu souhaites démontrer que:
Les droites (EC) et (DB) sont parallèles.
En appliquant le théorème suivant:
Deux parallèles à une même troisième sont parallèles entre elles.
En utilisant les hypothèses suivantes
Le quadrilatère EDBC est un parallélogramme.
Message:
Si tu souhaites faire avancer ta démonstration, ne propose pas la conclusion du problème comme hypothèse.

Commentaires :

Dans le premier pas : Aucune cohérence logique entre la conclusion, le théorème et les hypothèses n'est vérifiée : La conclusion ne correspond pas à celle du théorème choisi et toutes les hypothèses présentes ne sont nécessaires pour l'utilisation de ce théorème.

La présence d'une donnée du problème en conclusion signalée par le message d'erreur de DEFI est propre à une situation de chaînage avant associée à la proposition en question du "parallélogramme".

En effet, parmi les hypothèses présentes, il y a à la fois "parallélogramme" et les propositions "parallèles" et "côtés égaux". L'élève fait en effet plusieurs pas en un seul, pour déduire toutes les conséquences des deux parallélogrammes données du texte en un seul pas de démonstration d'une part et d'autre part, l'élève refait la même erreur avec uniquement cette même proposition "parallélogramme".

Malgré cette inadéquation logique du pas, on note que les éléments utilisés relèvent du même contexte. Les pas suivants montrent que en plus du fait de mentionner plusieurs résultats dans un même pas, la proposition "parallélogramme" n'avait pas le statut explicite d'hypothèse. C'est au bout de 14 pas que cette proposition est mise toute seule en hypothèse. Dans ce cas, l'élève est confronté à la difficulté de réaliser un pas ternaire au lieu d'un pas binaire : Parallélogramme alors parallèles et égaux, dont il fait preuve.

Le troisième pas montre que l'élève est conscient des conclusions intermédiaires nécessaires pour la conclusion finale. Seulement, il fait preuve d'une tentation de faire la démonstration uniquement en deux pas de démonstrations : Le premier est consacré à toutes les conclusions intermédiaires et le second à la conclusion finale.

Conclusion :

A travers les 15 premiers pas, le binôme a maintenu le même théorème "Un parallélogramme a ses côtés opposés égaux et parallèles" en agissant ainsi sur la conclusion ou les hypothèses. Après plusieurs combinaisons de celles ci qui relèvent d'observables variées, l'élève a réussi le 15ème pas avec toujours le même théorème. Par la suite, on observe d'une part le comportement de réutiliser la même constitution voire avec la contradiction de mettre la conclusion finale du problème en hypothèse et d'autre part, la réussite à ce théorème n'est pour autant transféré au nouveau théorème utilisé dans le dernier pas.

2) La réaction aux messages et comportements des élèves :

Dans cette partie nous présentons un aperçu des réactions des élèves générées par les messages d'erreurs de DEFI. Nous distinguons celles de la phase Exploration de celles de la phase Démonstration.

a) La phase Exploration :

Dans la phase Exploration, l'interaction est assurée par des questions dont les réponses possibles sont prévues par le système ainsi que leurs traitement.

Question 1 : **Sais tu démontrer que** ABCD est un parallélogramme ?
Oui **Non** **Annuler**

Question 2 : **Existe - t- il** une droite passant par deux points de la figure et est parallèle à (IJ) et (LM) ?
Oui **Non** **Annuler**

Question 3 : Le quadrilatère EFGH est il un parallélogramme ?
Oui **Non** **Annuler**

Message d'erreur : **Est ce que ta figure est dessinée avec soin ?**

A ces questions, nous relevons les réactions et comportements suivants :

Répondre par Non à toutes les questions :

Seulement on a constaté que pendant les premiers contacts avec le module Exploration, certains élèves adoptent la stratégie de répondre par Non à toutes les questions 1&2&3 presque pour faire parler le logiciel, en attendant qu'il va peut être donner la solution.

Or, dans ce cas l'élève finit par rencontrer le message suivant : "Est ce que ta figure est dessinée avec soin ?" à partir duquel, on a constaté en effet, que l'élève s'applique plus dans sa réponse et met plus de temps avant de répondre.

Répondre par OUI à la première question et refaire ensuite l'Exploration :

La première question que rencontre l'élève dans la phase Exploration est : " Sais tu démontrer © ? Oui Non Annuler

© étant la conclusion finale du problème. D'après les traces des élèves, la réponse choisie en premier lieu est "*Oui* ". Dans ce cas le module Exploration est désactivée, en invitant l'élève au module Démonstration. Suite à l'échec presque immédiat dans ce module, l'élève marque l'intérêt du retour au module Exploration.

b) La phase Démonstration :

Contrairement à la phase Exploration, l'élève rencontre des messages d'erreurs bien explicites dans la phase Démonstration. Nous en présentons quelques tendances et réactions observées.

Rejet total de tout le pas :

Après le message d'erreur, l'élève rejette tous les éléments du pas de déduction et pas forcément pour se corriger. Cette réaction correspond presque aux messages de type : " Faux" ou " Vrai ". En effet l'élève ne commence a coordonner sa réaction au message qu'après un stade d'assimilation du contrat : DEFI/Elève, et de l'acquisition des éléments de la démonstration dans DEFI.

Insister par mettre la même réponse :

C'est une réaction presque à l'opposée de la précédente : Après le message d'erreur, l'élève maintient la même réponse plusieurs fois de suite. Un comportement qui vise probablement a solliciter la bonne réponse de DEFI.

Isoler le message d'erreur :

Avoir un message d'erreur qui porte sur le statut d'une proposition donnée, par exemple le message sur le statut : La propriété (P) ne fait pas partie des hypothèses du problème, si tu penses

qu'elle est vraie il te faut d'abord la démontrer " La réaction de l'élève va être de refaire un autre pas avec d'autres propositions mais dont le statut est également non valide. Autrement dit, il a associé le message d'erreur à la proposition concernée et dans ce cas il l'a isolé.

Opérer pas à pas :

La réaction de l'élève ne semble pas correspondre au message d'erreur, seulement en observant une suite de pas consécutifs au message, on note une diminution d'erreurs voire obtenir la bonne réponse. Ce sont des élèves qui ont besoin de fixer un des éléments du pas (prémisses, conclusion ou le théorème) en y agissant séparément.

Exemple (9-10) du 9Fev96

Tu souhaites démontrer que : Le quadrilatère EDBC est un parallélogramme.
En appliquant le théorème suivant : Deux parallèles à un même troisième sont parallèles entre elles.
En utilisant les hypothèses suivantes : Les droites (EC) et (DB) sont parallèles.
Message : La propriété les droites (EC) et (DB) sont parallèles ne fait pas partie des hypothèses du problème. Si tu penses devoir utiliser cette propriété, il te faut d'abord la démontrer .
Tu souhaites démontrer que : Le quadrilatère EDBC est un parallélogramme.
En appliquant le théorème suivant : Un parallélogramme a ses côtés opposés égaux et parallèles.
En utilisant les hypothèses suivantes : Les droites (EC) et (BD) sont parallèles.
Message : La propriété les droites (EC) et (BD) sont parallèles ne fait pas partie des hypothèses du problème. Si tu penses devoir utiliser cette propriété, il te faut d'abord la démontrer .

Tu souhaites démontrer que : Le quadrilatère EDBC est un parallélogramme.
En appliquant le théorème suivant : Si un quadrilatère a ses côtés opposés parallèles, c'est un parallélogramme.
En utilisant les hypothèses suivantes : Les droites (EC) et (BD) sont parallèles.
Message : La propriété les droites (EC) et (BD) sont parallèles ne fait pas partie des hypothèses du problème. Si tu penses devoir utiliser cette propriété, il te faut d'abord la démontrer .

L'analyse totale de la réponse :

Nous observons un phénomène assez particulier et intéressant, qu'est l'analyse totale des éléments du pas. Où le message d'erreur joue le rôle d'indicateur global de présence d'erreur. Nous donnons l'exemple de présence de théorème réciproque, le message ne porte pas explicitement sur le choix du théorème et pourtant l'élève va se corriger :

Conclusion : ABCD est un parallélogramme
Théorème : Un parallélogramme a ses côtés opposés parallèles
Hypothèses : (AB)//(CD) & (AD)//(BC)
Message : Vérifies si tu utilises autant d'hypothèses que celles du théorème choisi.

A un stade de l'interaction, on observe que l'élève change le théorème et obtient ainsi une réponse correcte, bien que le message d'erreur ne mette pas en défaut explicitement le choix du théorème.

Des résultats beaucoup plus détaillés seront donnes [B. El Gass et I.Giorgiutti] et sans doute complétés dans un nouvel exposé de ce séminaire.

IV - Conclusion générale

Comme nous l'avons signalé au début de cet exposé, le logiciel DEFI par les choix didactiques que nous avons exposés, en particulier la séparation de la résolution du problème et de la démonstration et de par leur articulation et également de la nature des messages et l'accent mis sur les théorèmes, crée en effet un environnement révélateur de conceptions erronées des élèves et surtout sur le mode comportemental en situation d'apprentissage des élèves. Cette révélation se montre nécessaire aussi bien pour l'élève que pour l'enseignant. "... *De même que le non-initié préfère la musique au solfège, l'élève ou l'étudiant, en général, s'intéressera*

davantage aux applications des mathématiques qu'aux mathématiques elles-mêmes. Dès le moment, portant, où il sera convaincu de l'utilité d'un théorème, c'est à dire, quand il aura compris l'usage qu'on peut en faire, alors il sera plus enclin à consentir l'effort requis pour assimiler la théorie et étudier les démonstrations." [Willard C. J]

Bibliographie

AG ALMOULOUD S., L'ordinateur, outil d'aide à l'apprentissage de la démonstration et de traitement de données didactiques. Thèse université de Rennes1, 1992.

DUVAL R. et EGRET M-A, L'organisation déductive du discours, Interaction entre structure profonde et structure de surface dans l'accès à la démonstration, in Annales de Didactiques et de Sciences Cognitives, vol 2, p. 25-40, IREM de Strasbourg, 1989.

EGRET M-A et DUVAL R., Comment une classe de quatrième a pris conscience de ce qu'est une démarche de démonstration, in Annales de Didactiques et de Sciences Cognitives, vol 2, p. 41-64, IREM de Strasbourg, 1989.

B. EL GASS et I.GIORGIUTTI. quelques phénomènes didactiques mis en évidence par l'utilisation du logiciel DEFI. in Actes du colloque : Produire des textes démonstratifs (à paraître)

GIORGIUTTI I. Informatique et ingéniérie didactique, Rapport d'activités 1984-85, GRECO Didactique.

WILLARD C. J. Le nombre d'or, utilisation en mathématiques et dans les beaux arts.