PUBLICATIONS MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUES DE RENNES

Y. GUIVARC'H
M. BAUER
A. BROISE
F. DAL'BO
F. GUIMIER
M. PEIGNÉ

Propriétés de mélange pour les groupes à un paramètre de $Sl(d, \mathbb{R})$

Publications de l'Institut de recherche mathématiques de Rennes, 1992, fascicule 2
« Fascicule de probabilités », , p. 1-11
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1992___2_A4_0>

PROPRIETES DE MELANGE POUR LES GROUPES A UN PARAMETRE DE $Sl(d, \mathbb{R})$

EXPOSÉS D'Y. GUIVARC'H
rédigés par M. Bauer, A. Broise, F. Dal'bo,
F. Guimier et M. Peigné

Cette note est la rédaction de deux exposés de **Y. Guivarc'h** donnés dans le cadre d'un groupe de travail sur la théorie ergodique. Durant l'année, nous avons également bénéficié de plusieurs exposés de J.P. Conze. Nous les remercions tous les deux.

Résumé. Soient Γ un sous-groupe discret de $Sl(d, \mathbb{R})$ de covolume fini et (g_t) un sous-groupe à un paramètre non compact de $Sl(d, \mathbb{R})$. On se propose de montrer que l'action de (g_t) sur $SL(d, \mathbb{R})/\Gamma$ est mélangeante. Il existe différentes preuves de ce résultat (voir [AGH] et [Z]), celle proposée ici a l'avantage d'être élémentaire.

1 Introduction

Soit Γ un sous-groupe discret de $PSl(2, \mathbb{R})$ tel que la surface hyperbolique $S = \mathbb{H}^2/\Gamma$ soit de volume fini (on peut prendre par exemple $\Gamma = PSl(2, \mathbb{Z})$).

On note M le fibré unitaire tangent de S que l'on identifie à $PSl(2,\mathbb{R})/\Gamma$: par cette correspondance, l'action du flot géodésique (resp. horocyclique) sur le fibré M s'identifie à la multiplication à droite par $g_t = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}$ (resp.$h_t = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$). Ces deux flots préservent la mesure μ sur M induite par la mesure de Haar sur $PSl(2,\mathbb{R})$ invariante à gauche. On se propose de montrer ici que $(g_t)_{t\in\mathbb{R}}$ (resp. $(h_t)_{t\in\mathbb{R}}$) est mélangeant.

En fait, nous allons établir le résultat plus général suivant

Théorème 1.1 *Soient Γ un sous-groupe discret de $Sl(d,\mathbb{R})$ et μ la mesure sur $M = Sl(d,\mathbb{R})/\Gamma$ induite par la mesure de Haar invariante à gauche sur $Sl(d,\mathbb{R})$. On suppose que Γ est de co-volume fini (i.e $\mu(M) < +\infty$). Alors tout sous-groupe à un paramètre $(g_t)_{t\in\mathbb{R}} \subset Sl(d,\mathbb{R})$ tendant vers l'infini (i.e $\lim_{t\to\pm\infty} \|g_t\| = +\infty$) est mélangeant sur M.*

Quitte à normaliser, on peut supposer que $\mu(M) = 1$. Pour simplifier les notations, on notera G le groupe $Sl(d,\mathbb{R})$ et $\mathcal{H}$ l'espace de Hilbert $\mathcal{L}^2(M,\mu)$ muni du produit scalaire usuel défini par

$$\forall x, y \in \mathcal{H} \quad \langle x, y\rangle = \int_M x\; y\; d\mu.$$

On rappelle que le sous-groupe $(g_t)_{t\in\mathbb{R}}$ est mélangeant sur M si

$$\forall x, y \in \mathcal{H} \quad \lim_{t\to\pm\infty} \langle x \circ g_t, y\rangle = \langle x, 1\rangle\langle y, 1\rangle.$$

Par ailleurs, pour tout espace de Hilbert H, on notera $\mathcal{U}(H)$ le groupe des opérateurs unitaires de H. Soit $\rho : G \to \mathcal{U}(H)$ une représentation unitaire de G, on supposera toujours que ρ est continue. Autrement dit, si $\lim_{n\to\infty} g_n = g$, alors pour chaque $x \in H$, $\lim_{n\to\infty} \rho(g_n)x = \rho(g)x$. Enfin, si G' est un sous-ensemble de G et $\rho : G \to \mathcal{U}(H)$ une représentation unitaire de G, on dira que $x \in H$ est G'-invariant si pour tout $g \in G'$ on a $\rho(g)x = x$.

Le théorème 1.1 découle du théorème plus général suivant

Théorème 1.2 *Soient H un espace de Hilbert et $\rho : G \to \mathcal{U}(H)$ une représentation unitaire de G. Si $(g_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite d'éléments de G tendant vers l'infini, on a alors*

(i) $\forall x, y \in H \quad \lim_{n\to\infty} \langle \rho(g_n)x, y\rangle = 0$

ou bien

(ii) il existe dans H un vecteur non nul G-invariant.

Pour montrer que le théorème 1.1 se déduit de ce dernier résultat, considérons le sous-espace $\mathcal{H}_0$ des éléments $x \in \mathcal{H}$ vérifiant $\langle x, 1\rangle = 0$ et $\rho : G \to \mathcal{U}(\mathcal{H}_0)$ la représentation unitaire de G définie par $\rho(g)x = x \circ g^{-1}$.

Cette représentation n'a pas de vecteur non nul G-invariant : en effet, si $x \in \mathcal{H}_0$ est G-invariant, le fait que G agisse transitivement sur M entraine que x est constant et donc nul puisque $\langle x, 1\rangle = 0$.

Soient maintenant $(g_t)_{t\in\mathbf{R}}$ le sous-groupe du théorème 1.1 et $x, y \in \mathcal{H}$. Comme aucun vecteur non nul n'est G-invariant, le théorème 1.1 découle du théorème 1.2 appliqué à l'espace $\mathcal{H}_0$ et aux vecteurs $\tilde{x} = x - \langle x, 1\rangle 1$ et $\tilde{y} = y - \langle y, 1\rangle 1$.

Le théorème 1.2 repose sur les résultats suivants.

2 Lemmes principaux

Lemme 2.1 (Mautner) *Soient $(H, \langle . \rangle)$ un espace de Hilbert, T et U des éléments de $\mathcal{U}(H)$. On suppose que*

$$\forall x \in H \quad \lim_{n\to+\infty} T^n U T^{-n} x = x.$$

Alors tout vecteur T-invariant est U-invariant.

Démonstration. Soit x un vecteur T-invariant de H. Pour tout n, on a $\langle T^n U T^{-n} x, x\rangle = \langle Ux, x\rangle$. Or $\lim_{n\to+\infty} \langle T^n U T^{-n} x, x\rangle = \langle x, x\rangle$ donc $\langle Ux, x\rangle = \langle x, x\rangle$. Puisque U est unitaire, on en déduit que $Ux = x$ □

Lemme 2.2 *Soient* $(H, \langle . \rangle)$ *un espace de Hilbert,* $\mathcal{U}$ *un sous-ensemble non-vide de* $\mathcal{U}(H)$ *et* $(T_n)_{n\in I\!N}$ *une suite d'éléments de* $\mathcal{U}(H)$*. On suppose que*

(a) Si $\forall U \in \mathcal{U},\ Ux = x$ *alors* $x = 0$.

(b) $\forall\ U \in \mathcal{U},\ \forall x \in H\ \lim_{n\to+\infty} T_n U T_n^{-1} x = x.$

Alors, pour tous $x, y \in H$*, on a*

$$\lim_{n\to+\infty} \langle T_n x, y\rangle = 0.$$

Démonstration. Montrons d'abord que

$$\forall x, y \in H, \forall U \in \mathcal{U} \quad \lim_{n\to+\infty} \langle T_n(U^{-1}x - x), y\rangle = 0.$$

Cette propriété découle de l'hypothèse (b) et de l'inégalité suivante

$$\begin{aligned}
|\langle T_n(U^{-1}x - x), y\rangle| &= |\langle T_n(U^{-1} - Id)T_n^{-1}T_n x, y\rangle| \\
&= |\langle T_n x, T_n(U - Id)T_n^{-1}, y\rangle| \\
&\leq ||T_n(U - Id)T_n^{-1}y||\ ||T_n x||.
\end{aligned}$$

Montrons à présent que l'espace vectoriel W engendré par $\{U^{-1}x - x : x \in H, U \in \mathcal{U}\}$ est dense dans H.

Fixons $y \in W^\perp$; on a alors

$$\forall x \in H, \forall U \in \mathcal{U} \quad \langle U^{-1}x - x, y\rangle = 0$$

si bien que, pour U fixé, on obtient $\forall x \in H \quad \langle U^{-1}x, y\rangle = \langle x, y\rangle$, soit $\langle x, Uy\rangle = \langle x, y\rangle$. On déduit que $\forall U \in \mathcal{U} \quad Uy = y$, d'où $y = 0$ d'après l'hypothèse (a). □

3 Démonstration du théorème 1.2 pour $Sl(2, \mathbb{R})$

On note $G = Sl(2, \mathbb{R}), A = \{a(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}, \lambda \geq 1\}$ et $K = SO(2, \mathbb{R})$. On rappelle la décomposition de Cartan $G = KAK$. Soit $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de G que nous décomposons sous la forme $g_n = k_n a_n k'_n$ avec $a_n \in A$ et $k_n \in K$. Le lemme qui suit va nous permettre de restreindre notre étude à la partie diagonale a_n.

Lemme 3.1 *Soient $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de G tendant vers l'infini, H un espace de Hilbert et $\rho : G \to \mathcal{U}(H)$ une représentation unitaire de G. Si pour tous $x, y \in H$,* $\lim_{n \to +\infty} \langle \rho(a_n)x, y \rangle = 0$, *alors*

$$\forall x, y \in H \quad \lim_{n \to +\infty} \langle \rho(g_n)x, y \rangle = 0.$$

Démonstration. Fixons $x, y \in H$ et choisissons une sous-suite de $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (encore notée $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$) telle que $(\langle \rho(g_n)x, y \rangle)_{n \in \mathbb{N}}$ converge dans $\overline{\mathbb{R}}$. Quitte à extraire de nouveau une sous-suite, on peut supposer que $\lim_{n \to +\infty} k_n = k$ et $\lim_{n \to +\infty} k'_n = k'$; Comme les opérateurs sont unitaires on obtient l'inégalité suivante :

$$\begin{aligned}
&|\langle \rho(k_n)\rho(a_n)\rho(k'_n)x, y \rangle| \\
&= |\langle \rho(a_n)\rho(k'_n)x, (\rho(k_n)^{-1} - \rho(k)^{-1})y \rangle + \\
&\qquad + \langle (\rho(k'_n) - \rho(k'))x, \rho(a_n)^{-1}\rho(k)^{-1}y \rangle + \langle \rho(a_n)\rho(k')x, \rho(k)^{-1}y \rangle| \\
&\leq ||x|| \, ||(\rho(k_n)^{-1} - \rho(k)^{-1})y|| + ||y|| \, ||(\rho(k'_n) - \rho(k'))x|| + \\
&\qquad + |\langle \rho(a_n)\rho(k')x, \rho(k)^{-1}y \rangle|.
\end{aligned}$$

Ainsi, pour x et y fixés, 0 est la seule valeur d'adhérence dans $\overline{\mathbb{R}}$ de la suite $(\langle \rho(g_n)x, y \rangle)_{n \in \mathbb{N}}$, d'où le résultat escompté. □

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer le théorème 1.2 dans le cas où $G = Sl(2, \mathbb{R})$:

Théorème 3.2 *Soient H un espace de Hilbert et $\rho : G = Sl(2, \mathbb{R}) \to \mathcal{U}(H)$ une représentation unitaire de G. Si $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de G tendant vers l'infini, alors* *(i)* $\forall x, y \in H \quad \lim_{n \to +\infty} \langle \rho(g_n)x, y \rangle = 0$

ou bien

(ii) Il existe dans H un vecteur non nul G-invariant.

Démonstration. D'après le lemme 3.1, il suffit de démontrer ce théorème pour $g_n = a_n$ une suite d'éléments de A tendant vers l'infini. On note $N = \{\eta(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ s & 1 \end{pmatrix}, s \in \mathbb{R}\}$. La preuve du théorème 3.2 repose alors sur l'égalité suivante :

$$\forall a(\lambda) \in A, \forall \eta(s) \in N \qquad a(\lambda)\eta(s)a^{-1}(\lambda) = \eta(s\lambda^{-2}).$$

En effet, en prenant $a_n = a(\lambda_n)$ avec $\lim_{n \to +\infty} \lambda_n = +\infty$, on obtient grâce à cette inégalité

$$\forall \eta \in N \quad \lim_{n \to +\infty} a_n \eta a_n^{-1} = Id.$$

Si aucun élément non nul de H n'est N-invariant, les hypothèses du lemme 2.2 sont remplies en prenant $U = \rho(N)$ et $T_n = \rho(a_n)$. Le théorème découle alors immédiatement de ce lemme.

Il nous reste donc à traiter le cas où il existe dans H un vecteur non nul N-invariant.Nous allons montrer qu'un tel vecteur est en fait G-invariant ce qui achèvera la démonstration du théorème 3.2. □

Lemme 3.3 *Soient H un espace de Hilbert, $\rho : G = Sl(2, \mathbb{R}) \to \mathcal{U}(H)$ une représentation unitaire de G. Tout vecteur N-invariant est G-invariant.*

Démonstration. Soit x_0 un vecteur de H non nul et N-invariant ; sans perdre en généralité, on peut supposer $\|x_0\| = 1$. Considérons alors l'application continue

$$\begin{aligned} \varphi : G &\to \mathbb{R} \\ g &\mapsto \langle \rho(g)x_0, x_0 \rangle \end{aligned}$$

On sait que $\forall \eta \in N, \quad \varphi(\eta) = 1$ et pour montrer que x_0 est G-invariant il nous suffit de prouver que $\forall g \in G, \quad \varphi(g) = 1$.

Dans un premier temps, montrons que $\forall a \in A, \quad \varphi(a) = 1$. En utilisant l'invariance de x_0 par l'action de $\rho(N)$ et le fait que $\rho(N) \subset \mathcal{U}(H)$, on établit les égalités suivantes

$$\forall \eta \in N, \forall g \in G \quad \varphi(\eta g) = \varphi(g\eta) = \varphi(g).$$

Fixons $g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ un élément de G ; de l'égalité $\forall s \in \mathbb{R} \quad g\eta(s) = \begin{pmatrix} \alpha + \beta s & \beta \\ \gamma + \delta s & \delta \end{pmatrix}$ et du fait que la fonction φ est N-invariante à droite, on déduit l'existence d'une application $\tilde{\varphi}$ continue : $\mathbb{R}^2 - \{0\} \to \mathbb{R}$ telle que $\varphi(g) = \tilde{\varphi}(\beta, \delta)$.

De même, en utilisant l'égalité $\forall s \in \mathbb{R}$, $\eta(s)g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha s + \gamma & \beta s + \delta \end{pmatrix}$ et le fait que φ est N-invariante à gauche, on obtient la propriété suivante

$$\forall (\beta, \delta) \in \mathbb{R}^2 - \{0\} \quad \tilde{\varphi}(\beta, \beta s + \delta) = \tilde{\varphi}(\beta, \delta)$$

ainsi $\tilde{\varphi}$ est constante sur les verticales $x = \beta, \beta \neq 0$, et donc aussi sur l'axe $x = 0$, par continuité.

Or $\tilde{\varphi}(0,1) = \varphi(Id) = 1$ et $\forall \lambda \in \mathbb{R} - \{0\} \quad \tilde{\varphi}(0, \lambda^{-1}) = \varphi(a(\lambda))$; par conséquent $\forall a \in A, \quad \varphi(a) = 1$.

De cette dernière égalité, on déduit que x_0 est A-invariant, et donc AN-invariant, d'où la propriété suivante

$$\forall g \in G, \forall a \in A, \forall \eta \in N \quad \varphi(ga\eta) = \varphi(g).$$

Un calcul immédiat nous donne alors

$$\forall s \in \mathbb{R}, \forall \lambda \geq 1 \quad g\ a(\lambda)\ \eta(s) = \begin{pmatrix} \alpha\lambda + \beta\lambda^{-1}s & \beta\lambda^{-1} \\ \gamma\lambda + \delta\lambda^{-1}s & \delta\lambda^{-1} \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, comme la fonction φ est AN-invariante à droite, il existe une fonction $\overline{\varphi}$ continue définie sur l'espace projectif $\mathbb{P}^1$ telle que

$$\varphi(g) = \overline{\varphi}(\beta : \delta)$$

où $(\beta : \delta)$ désigne la classe de (β, δ) dans $I\!P^1$. Comme par ailleurs la fonction φ est N-invariante à gauche, on a

$$\forall s \in \mathbb{R}, \forall (\beta : \delta) \in I\!P^1 \quad \overline{\varphi}(\beta : \delta) = \overline{\varphi}(\beta : \beta s + \delta).$$

Par conséquent, $\overline{\varphi}$ est constante sur $I\!P^1 - \{(0 : 1)\}$ et donc sur $I\!P^1$ par continuité. Finalement, on a bien

$$\forall g \in G, \quad \varphi(g) = 1.$$

□

4 Démonstration du théorème 1.2 dans le cas général

On désigne par K le groupe $SO(d, I\!R)$ et par A_d l'ensemble des matrices diagonales

$$diag(a_i) = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & a_2 & & & \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ & & & a_{d-1} & 0 \\ 0 & & \cdots & 0 & a_d \end{pmatrix},$$

telles que $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_d > 0$ et $\prod_{i=1}^{d} a_i = 1$.

Si $i, j \in \{1, \ldots, d\}$, i différent de j, on note $E_{i,j}$ la matrice dont toutes les coordonnées sont nulles sauf celle d'ordre i, j qui est égale à 1. On désigne par $\eta_{i,j}(t)$ la matrice $Id + tE_{i,j}$, $t \in I\!R$, et par $N_{i,j}$ le groupe des matrices $\eta_{i,j}(t)$.

Pour $a = diag(a_i)$ et $t \in I\!R$, on a la relation suivante :

$$a\eta_{i,j}(t)a^{-1} = \eta_{i,j}(\frac{a_i}{a_j}t). \qquad (*)$$

Cette relation jouera un rôle important dans ce qui suit. Considérons un espace de Hilbert H, une représentation unitaire ρ de G dans $U(H)$ et une suite g_n de G telle que $\lim_{n\to+\infty} ||g_n|| = +\infty$.

Notre but est de montrer que :

(i) $\forall x, y \in H$, $\lim_{n\to+\infty}\langle\rho(g_n)x, y\rangle = 0$,

ou bien

(ii) il existe un vecteur non nul G-invariant dans H.

On reprend la démarche du paragraphe précédent. La décomposition de Cartan $G = KA_dK$ permet d'écrire la suite g_n sous la forme $g_n = k_n a_n k'_n$, où $k_n, k'_n \in K$, et $a_n \in A_d$. On peut se restreindre au cas où $g_n = a_n$ en démontrant comme dans le paragraphe 3 le lemme suivant :

Lemme 4.1 *Si pour tous $x, y \in H$, on a $\lim_{n\to+\infty}\langle\rho(a_n)x, y\rangle = 0$, alors on a $\lim_{n\to+\infty}\langle\rho(g_n)x, y\rangle = 0$.*

Notons $a_n = diag(a_{n,i})_{1\leq i\leq d}$. On a $||g_n|| = ||a_n|| = a_{n,1}$, donc $\lim_{n\to+\infty} a_{n,1} = +\infty$ et puisque $\Pi_i a_{n,i} = 1$ et $a_{n,1} \geq a_{n,2} \geq \cdots \geq a_{n,d} > 0$ on obtient $\lim_{n\to+\infty} a_{n,d} = 0$. La relation $(*)$ montre donc qu'on a $\lim_{n\to+\infty} a_n \eta a_n^{-1} = Id$, pour tout $\eta \in N_{d,1}$.

S'il n'y a pas de vecteur $N_{d,1}$-invariant non nul dans H, on applique le lemme 2.2 à $\mathcal{U} = \rho(N_{d,1})$ et $T_n = \rho(a_n)$ et on déduit l'assertion (i). Sinon, l'assertion (ii) est vérifiée grâce au lemme suivant.

Lemme 4.2 *Soit $x \in H$. Si x est $N_{d,1}$-invariant, alors x est G-invariant.*

Démonstration.

Notons G' le sous-groupe des matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} a & 0 & \cdots & 0 & b \\ 0 & 1 & & & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & & 1 & 0 \\ c & 0 & \cdots & 0 & d \end{pmatrix}, \qquad ad - bc = 1$$

et $A' = A_d \cap G'$, l'ensemble des matrices suivantes

$$\begin{pmatrix} a & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & 1 & & & \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ & & & 1 & 0 \\ 0 & & \cdots & 0 & a^{-1} \end{pmatrix}, \quad a \geq 1.$$

Si on identifie G' à $SL(2, \mathbb{R})$, le groupe $N_{d,1}$ s'identifie alors au groupe des matrices 2×2 nilpotentes inférieures, noté N dans le paragraphe 3, et A' s'identifie à l'ensemble A du paragraphe 3.

Supposons que x soit $N_{d,1}$-invariant. Le lemme 3.3 montre que x est G'-invariant, donc A'-invariant.

Soit W l'espace des vecteurs de H qui sont A'-invariants. On a $x \in W$. On va montrer que W est G-invariant, ce qui permettra de conclure. En effet on obtiendra alors une représentation ρ' de G dans $\mathcal{U}(\mathcal{W})$ en prenant les restrictions à W des éléments de $\rho(G)$. Son noyau contient A' par définition. Or G est un groupe simple donc le noyau de ρ' est égal à G, ce qui implique en particulier que x est G-invariant.

On rappelle que G est engendré par les groupes $N_{i,j}$. Pour montrer que W est G-invariant, il suffit donc de montrer que si $i, j \in \{1, \ldots, d\}$, i différent de j, alors W est $N_{i,j}$-invariant. Deux cas alors se présentent.

Ou bien i et j sont différents de 1 et d. Alors A' commute à $N_{i,j}$, donc W est $N_{i,j}$-invariant.

Ou bien i ou j est égal à 1 ou d. Prenons alors un élément a de A',

$$a = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & 1 & & & \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ & & & 1 & 0 \\ 0 & & \cdots & 0 & a_1^{-1} \end{pmatrix}$$

avec $a_1 > 1$ et soit $\eta \in N_{i,j}$. Supposons $i > j$. La relation $a\eta_{i,j}(t)a^{-1} =$

$\eta_{i,j}(\frac{a_i}{a_j}t)$ montre que $a^n\eta a^{-n}$ tend vers l'identité. On peut alors appliquer le lemme 2.1 à tous les $U \in \rho(N_{i,j})$ et à $T = \rho(a)$, ce qui montre que les vecteurs de W sont $N_{i,j}$-invariants. On fait de même pour $i < j$, ce qui termine la demonstration. □

References

[AGH] L. Auslander, L. Green, F. Hahn. *Flows on Homogeneous Spaces*, Ann. of Math. Studies, Princeton Univ. Press. Nr 53 (1963).

[Z] R.J. Zimmer. *Ergodic Theory and Semisimple Groups*, Monographs in Mathematics Vol. 81, Birkhäuser (1984)