

ANNE BROISE

Transformations dilatantes de l'intervalle $[0,1]$ et théorèmes limites

Publications de l'Institut de recherche mathématiques de Rennes, 1992, fascicule 2
« Fascicule de probabilités », , p. 1-42

http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1992__2_A1_0

© Département de mathématiques et informatique, université de Rennes,
1992, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications mathématiques et informatiques de Rennes » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

TRANSFORMATIONS DILATANTES DE L'INTERVALLE $[0, 1]$ ET THEOREMES LIMITES

Anne BROISE

1. Introduction

On veut démontrer un théorème limite central :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{n-1} f \circ T^k = \mathcal{N}(m, \sigma^2)$$

pour certaines transformations dilatantes de l'intervalle $[0, 1]$ dans lui-même, en particulier pour les β -transformations et la transformation "fraction continue". On devra préciser en quel sens il faut comprendre la limite et quelles conditions on doit imposer à f pour que σ^2 ne soit pas nul. Pour faire cela, on va définir une classe de transformations dilatantes de l'intervalle $[0, 1]$ dans lui-même : \mathcal{C} telle que pour chaque T de \mathcal{C} , on puisse :

- définir l'opérateur de Perron-Frobenius associé : Φ
- appliquer le théorème de Ionescu-Tulcea et Marinescu à Φ pour faire l'étude spectrale de Φ et en déduire l'existence d'une mesure μ qui soit T -invariante.

On suppose alors que le système (T, μ) est ergodique. Pour démontrer le théorème central limite, on est amené à perturber analytiquement Φ . A l'aide du théorème des perturbations et en faisant des développements limités, on peut conclure et même donner la vitesse de convergence. Pour terminer, on applique ces résultats aux β -transformations et à la transformation "fraction continue".

On a réalisé ce travail après l'étude de l'article de J. Rousseau-Egele.

2. Notations et premières définitions

On note l'intervalle $[0, 1]$ par I .

On munit I de la tribu de ses boréliens \mathcal{B} et de la mesure de Lebesgue m . On note L_m^1 l'espace des fonctions de I dans \mathbb{C} qui sont intégrables sur I .

Soit f une fonction de I dans \mathbb{C} , on dit que f est à variation bornée si $v(f) = \sup \sum_{i=1}^{n-1} |f(a_i) - f(a_{i+1})|$ est fini, où la borne supérieure est prise sur l'ensemble des subdivisions $(a_i)_{1 \leq i \leq n}$ $n \in \mathbb{N}^*$ finies sur I .

Un élément f de L_m^1 est dit à variation bornée si $v(f) = \inf_{g \in \bar{f}} v(g)$ est fini, où la borne inférieure est prise sur la classe de f modulo $m : \bar{f} = \{g : I \rightarrow \mathbb{C} : f = g \text{ m.p.p.}\}$.

On note V l'ensemble $\{f \in L_m^1 : v(f) < \infty\}$. On peut considérer que V est l'ensemble des fonctions continues à droite sur I , ayant un nombre au plus dénombrable de sauts dans I et qu'à chaque élément f de V , on peut associer une mesure μ dont la variation totale est bornée telle que $f(x) = \mu([0, x])$ pour tout x de I .

V est un sous espace de L_m^1 qui n'est pas fermé pour la norme $\|\cdot\|_1$ [car la suite de fonctions $f_n(x) = \sin \frac{1}{x} 1_{]1/n, 1[}(x)$ est dans V mais elle converge vers $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ qui appartient à L_m^1 mais n'est pas dans V].

On définit alors la norme $\|\cdot\|_v$ sur V par :

$$\|f\|_v = v(f) + \|f\|_1.$$

Cette norme rend l'espace $(V, \|\cdot\|_v)$ complet car la boule unité de l'espace des mesures dont la variation totale est bornée est compacte pour la topologie de la convergence faible des mesures à variation totale bornée.

On a pour tout $f : I \rightarrow \mathbb{C}$, $f \in V$, pour tout x, y dans I :

$$|f|(x) - |f|(y) \leq v(f).$$

Donc $\int_0^1 [|f|(x) - |f|(y)] dy = |f|(x) - \|f\|_1 \leq v(f)$.

Ainsi $\|f\|_\infty - \|f\|_1 \leq v(f)$ i.e. $\|f\|_\infty \leq \|f\|_v$.

On en déduit qu'une suite $(f_n)_{n>0}$ d'éléments de V qui converge dans V vers f converge uniformément sur I .

Comme on a : $\|fg\|_1 \leq \|f\|_\infty \|g\|_1 + \|f\|_1 \|g\|_\infty$ si f et g sont dans V , et comme pour une subdivision $(a_i)_{1 \leq i \leq n}$ finie de I on a :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n-1} |(fg)(a_i) - (fg)(a_{i+1})| &\leq \sum_{i=1}^{n-1} [|f(a_i)| |g(a_i) - g(a_{i+1})| + |g(a_i)| |f(a_i) - f(a_{i+1})|] \\ &\leq \|f\|_\infty \sum_{i=1}^{n-1} |g(a_i) - g(a_{i+1})| + \|g\|_\infty \sum_{i=1}^{n-1} |f(a_i) - f(a_{i+1})|. \end{aligned}$$

Alors $v(fg) \leq \|f\|_\infty v(g) + \|g\|_\infty v(f)$.

$$\begin{aligned} \text{Donc} \quad \|fg\|_v &\leq \|f\|_\infty \|g\|_v + \|g\|_\infty \|f\|_v \\ \|fg\|_v &\leq 2\|f\|_v \|g\|_v. \end{aligned}$$

On construit maintenant une classe de transformations dilatantes pour lesquelles on pourra montrer le théorème limite central.

3. Une classe de transformations dilatantes

On appelle \mathcal{C} la classe des applications T de I dans lui-même telles qu'il existe une subdivision finie ou dénombrable $\{a_j\}_{j \in J}$ de I vérifiant :

- (1) La restriction de T à I_j est strictement monotone et se prolonge en une application C^2 sur \bar{I}_j où l'on note $I_j =]a_j, a_{j+1}[$ $j \in J$.
- (2) $\{T(I_j)\}_{j \in J}$ est composé d'un nombre fini d'intervalles distincts.
- (3) Il existe un entier n tel que $\gamma = \inf_{x \in UI_j} |(T^n)'(x)| > 1$.
- (4) Il existe un entier N vérifiant : $\gamma^N > 2, \gamma^{N-1} \leq 2$ et $\sup \left| \frac{(T^{nN})''(x)}{[(T^{nN})'(x)]^2} \right| < \infty$.

Remarque. Si la subdivision est finie, les conditions (2) et (4) sont évidentes.

Exemples d'éléments de \mathcal{C}

* **Les β -transformations** : elles sont définies par $Tx = \beta x [1]$ où β est un réel strictement supérieur à 1. La subdivision associée à T est $1 < \frac{1}{\beta} < \dots < \frac{[\beta]}{\beta} \leq 1$. Sur chaque intervalle : $[\frac{j}{\beta}, \frac{j+1}{\beta}]$ où $0 \leq j \leq [\beta] - 1$ et sur $[\frac{[\beta]}{\beta}, 1]$, T est linéaire donc on a (1), $\gamma = \beta > 1$ par hypothèse d'où (3) et comme la subdivision est finie on a $T \in \mathcal{C}$.

* On vérifie aisément que la **généralisation des β -transformations**. Les applications $Tx = \beta x + \alpha [1]$ où $\beta > 1, 0 \leq \alpha < 1$ sont encore dans \mathcal{C} .

* **Les applications markoviennes linéaires par morceaux** sont aussi des éléments de \mathcal{C} . En effet, il existe une subdivision (I_k) finie ou dénombrable telle que $T(I_k) = I, T$ est linéaire sur I_k et $|T'x| \geq 1 + \epsilon$ où $\epsilon > 0$. Comme la composée d'une application markovienne linéaire en est encore une, on a (4) et $T \in \mathcal{C}$.

* **La transformation "fraction continue"** : elle est définie par $T(0) = 0$ et pour $x \in]0, 1[$ $Tx = \{\frac{1}{x}\}$.

La subdivision de I associée à T est $(I_n =]\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}[)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et sur $I_n, Tx = \frac{1}{x} - n$ qui est une fonction de classe C^2 strictement monotone sur $[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]$, d'où (1). Pour tout $n > 0, T(I_n) = I$, d'où (2).

On a : $\inf_{x \in UI_n} |(T \circ T)'(x)| = 4,$

en effet $T'x = -\frac{1}{x^2}$ sur $\cup_n I_n, T''x = \frac{2}{x^3},$

et $(T \circ T)'(x) = T'(Tx)T'(x) = \frac{1}{(Tx)^2} \frac{1}{x^2} = \frac{1}{(1-nx)^2}$ si $x \in]\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}[.$

Alors : $\inf_{x \in UI_n} |(T^2)'(x)| = \inf_{n>0} \inf_{x \in I_n} \frac{1}{(1-nx)^2} = \inf_{n>0} \frac{1}{(1-\frac{1}{n+1})^2} = 4$, d'où (3)

$$(T^2)''(x) = T''(x)T'(x) + T''(Tx)(T'(x))^2 = \frac{-2}{x^3} \frac{1}{(Tx)^2} + \frac{2}{(Tx)^3} \frac{1}{x^4} = \frac{2(1-xTx)}{x^4(Tx)^3}$$

$$\frac{(T^2)''(x)}{[(T^2)'(x)]^2} = 2(1-xTx)Tx = 2nx\left(\frac{1}{x} - n\right) \text{ si } x \in]\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}[.$$

D'où $\sup_{x \in UI_n} \left| \frac{(T^2)''(x)}{[(T^2)'(x)]^2} \right| = \sup_{n>0} \frac{2}{n+1} = 1 < \infty$. Ainsi $T \in \mathcal{C}$.

Remarque. On appelle transformation markovienne C^2 une transformation T vérifiant (1), (3) et (2) avec en plus $T(I_j) = I$ pour tout $j \in J$.

Il existe des transformations markoviennes C^2 n'appartenant pas à \mathcal{C} , en effet : soit T définie par

$$\begin{cases} T0 = 0 \\ Tx = \frac{1}{n} \log(nx + b_n) + a_n \text{ sur }]\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}[\quad n \geq 2 \\ Tx = 4x - 2 \text{ sur }]\frac{1}{2}, \frac{3}{4}[\\ Tx = 4x - 3 \text{ sur }]\frac{3}{4}, 1[\end{cases}$$

avec $a_n = \frac{1}{n} \log[(n+1)(e^n - 1)]$, $b_n = \frac{e^{\frac{n}{n+1}} - 1}{1 - e^n}$, ils sont choisis de façon à ce que $T(\frac{1}{n}) = 1$, $T(\frac{1}{n+1}) = 0$, d'où (2). Sur I_n , T est une fonction de classe C^2 , on a :

$$T'x = \frac{1}{nx + \frac{e^{\frac{n}{n+1}} - 1}{1 - e^n}} \text{ qui est une fonction décroissante sur }]-\infty, x_0[\text{ et sur }]x_0, +\infty[$$

où $x_0 = \frac{e^n n / (n+1) - 1}{n(e^n - 1)}$ comme on a : $-\infty < x_0 < \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} < \infty$ et que sur $]x_0, \infty[$ $T'x \in]0, \infty[$ on en déduit que T est strictement croissante sur I_n , la condition (1) est donc vérifiée

$$\begin{aligned} \inf_{x \in I} |T'x| &= \inf \left\{ \inf_{n>2} T'\left(\frac{1}{n}\right), 4 \right\} = \inf \left\{ 4, \frac{(e^n - 1)(n+1)}{(n+1)(e^n - 1) - e^n n + n + 1} \right\} \\ &= \inf \{ 4, (1 - e^{-n})(n+1) \mid n > 2 \} = 3(1 - e^{-2}) \end{aligned}$$

car la fonction $x \rightarrow (x+1)(1 - e^{-x})$ est strictement croissante sur $[1, \infty]$.

$\gamma = 3(1 - e^{-2}) = 2,59 > 1$, la condition (3) est donc vérifiée. Mais la condition (4) n'est pas vérifiée, en effet :

$$\frac{T''(x)}{[T'(x)]^2} = -\left[\frac{1}{T'(x)}\right]' = -[nx + b]' = -n \text{ sur } I_n \text{ pour } n \geq 2.$$

On a donc $\sup_{x \in I} \left| \frac{T''(x)}{[T'(x)]^2} \right| = \infty$.

4. L'opérateur de Perron-Frobenius

On considère un élément T de \mathcal{C} , on définit alors l'opérateur de Perron-Frobenius associé à T , $\Phi_T : L_m^1 \rightarrow L_m^1$ par :

$$\int_0^1 \Phi_T f \cdot g dm = \int_0^1 f \cdot g \circ T dm \text{ où } f \in L_m^1 \text{ et } g \in L_m^\infty.$$

Les principales propriétés de Φ_T sont :

- (i) Φ_T est un opérateur linéaire continu de L_m^1 .
- (ii) Φ_T est positif : $f \geq 0 \Rightarrow \Phi_T f \geq 0$, donc $|\Phi_T f| \leq \Phi_T |f|$ pour $f \in V$.
- (iii) Φ_T est une contraction de L_m^1 .
- (iv) Φ_T préserve l'intégrale : $\int_0^1 \Phi_T f dm = \int_0^1 f dm$.
- (v) $\Phi_{T^n} = (\Phi_T)^n$.
- (vi) $\Phi_T f = f$ si et seulement si $d\mu = f dm$ est une mesure T -invariante.

Preuve de (iii) et de (vi) :

$$\begin{aligned} \|\Phi_T f\|_1 &= \sup_{\|g\|_\infty \leq 1} \left| \int_0^1 \Phi_T f \cdot g dm \right| \\ &\leq \sup_{\|g\|_\infty \leq 1} \int_0^1 |f| \cdot |g \circ T| dm \\ &\leq \sup_{\|g\|_\infty \leq 1} \|f\|_1 \|g \circ T\|_\infty \\ &\leq \|f\|_1 \end{aligned}$$

Si $\Phi_T f = f$ alors $\int_0^1 f g dm = \int_0^1 f g \circ T dm$ pour tout $g \in L_m^\infty$ en particulier pour $g = 1_A$ $A \in \mathcal{B}$ on a $\mu(A) = \mu(T^{-1}(A))$.

Si $\mu = f m$ est T -invariante, pour tout $g \in L_m^\infty$ on a :

$$\int_0^1 g \circ T d\mu = \int_0^1 g d\mu \text{ ie : } \int_0^1 f g \circ T dm = \int_0^1 f g dm \text{ d'où } \Phi_T f = f.$$

Remarque. m est une mesure T -invariante si et seulement si $\Phi_T 1 = 1$.

Les conditions imposées à $T \in \mathcal{C}$ permettent une écriture explicite de Φ_T : $\Phi_T f(x) = \sum_{j \in J} f(\sigma_j x) \chi_j(x) \phi_j(x)$ pour m -presque tout x de I .

$$\text{où } \begin{cases} \sigma_j : T(I_j) \rightarrow I_j \text{ est la réciproque de } T \text{ restreinte à } I_j \\ \chi_j \text{ est l'indicatrice de l'intervalle } T(\bar{I}_j) \\ \phi_j(x) = \frac{1}{|T'(j(\sigma_j x))|}. \end{cases}$$

En effet, l'égalité $\int_0^1 \Phi_T f \cdot g dm = \int_0^1 f \cdot g \circ T dm$ donne par changement de variables :

$$\begin{aligned} \int_0^1 f \cdot g \circ T dm &= \sum_{j \in J} \int_{I_j} f \cdot g \circ T dm = \sum_{j \in J} \int_{T^{-1}(I_j)} f(\sigma_j y) g(y) \frac{1}{|T_j'(\sigma_j y)|} dm(y) \\ &= \sum_{j \in J} \int_I f(\sigma_j x) g(x) \phi_j(x) \chi_j(x) dm(x) \\ &= \int_I \left[\sum_{j \in J} f(\sigma_j x) \phi_j(x) \chi_j(x) \right] g(x) dm(x) \text{ pour tout } g \in L_m^\infty \end{aligned}$$

[par le théorème de la convergence monotone dans le cas d'une subdivision dénombrable et en découpant f en $f^+ - f^-$ avec f^+ et f^- positives.]

D'où : $\Phi_T f(x) = \sum_{j \in J} f(\sigma_j x) \phi_j(x) \chi_j(x)$ m.pp.

Désormais on note Φ à la place de Φ_T et on définit pour tout x de I

$$\Phi f(x) = \sum_{j \in J} f(\sigma_j x) \chi_j(x) \phi_j(x).$$

5. Le théorème de Ionescu-Tulcea et Marinescu

Les hypothèses : $(\mathcal{V}, \|\cdot\|_{\mathcal{V}})$ et $(\mathcal{L}, \|\cdot\|_{\mathcal{L}})$ sont deux espaces de Banach sur \mathbf{C} , \mathcal{V} est contenu dans \mathcal{L} , ils vérifient de plus l'hypothèse :

(a) si $(f_n)_{n \geq 0}$ est une suite d'éléments de \mathcal{V} qui converge dans \mathcal{L} vers f et si pour tout $n \geq 0$ $\|f_n\|_{\mathcal{V}} \leq C$, alors f est dans \mathcal{V} et on a $\|f\|_{\mathcal{V}} \leq C$.
 Φ est un opérateur de \mathcal{L} dans \mathcal{L} qui laisse stable \mathcal{V} et qui est borné par rapport à la norme $\|\cdot\|_{\mathcal{V}}$, il vérifie les conditions :

(b) $\sup_{n \geq 0} \{\|\Phi^n f\|_{\mathcal{L}}, f \in \mathcal{V}, \|f\|_{\mathcal{L}} \leq 1\} \leq H < \infty$.

(c) Il existe $n_0 \geq 0, \alpha < 1$ et $\beta < \infty$ tels que :

$$\|\Phi^{n_0} f\|_{\mathcal{V}} \leq \alpha \|f\|_{\mathcal{V}} + \beta \|f\|_{\mathcal{L}}.$$

(d) si V est une partie bornée de $(\mathcal{V}, \|\cdot\|_{\mathcal{V}})$ alors $\Phi^{n_0} V$ est relativement compacte dans $(\mathcal{L}, \|\cdot\|_{\mathcal{L}})$.

Avant d'énoncer et de prouver le théorème de Marinescu et Ionescu-Tulcea, on remarque que :

Proposition 5.1. Si $T \in \mathcal{C}$, Φ vérifie les hypothèses (a), (b), (c) et (d).

Preuve : On prend pour \mathcal{L} l'espace L_m^1 muni de la norme $\|\cdot\|_1$ et pour \mathcal{V} le sous espace de \mathcal{L} constitué des fonctions dont la variation est finie, on le munit de la norme $\|f\|_v = v(f) + \|f\|_1$, c'est en fait $(V, \|\cdot\|_v)$.

(a) - On a $A = \{f \in L_m^1 : \|f\|_v \leq C\}$ est une partie compacte de L_m^1 . On le voit en remarquant que toute fonction à variation bornée peut être considérée comme la fonction de répartition d'une mesure μ pas obligatoirement positive. On dispose de la convergence faible des mesures.

Soit $(\phi_n)_{n \geq 0}$ une suite de A on associe alors une suite de mesures $(\mu_n)_{n \geq 0}$ de variation totale bornée sur $[0, 1]$. Il existe donc une sous-suite de mesures $(\mu_{n_k})_{k \geq 0}$ qui converge faiblement vers μ . Soit $\phi(x) = \mu([0, x])$, comme l'ensemble des points de discontinuité de μ est dénombrable, on en déduit que $\phi_{n_k} \rightarrow \phi$ p.s. Les ϕ_n sont bornées on peut donc appliquer le théorème de Lebesgue et alors : $\phi_n \rightarrow \phi$ dans L_m^1 et $\|\phi\|_v \leq C$, d'où la compacité de A dans L_m^1 .

Soit alors une suite $(f_n)_{n \geq 0}$ de points de A convergent vers $f \in L_m^1$ et telle que $\|f_n\|_v \leq C$. On a alors $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - f_n\|_1 = 0$ et $\|f_n\|_v \leq C$. Comme A est compacte dans L_m^1 alors $f \in A$ et donc $f \in V$ et $\|f\|_v \leq C$.

(b) - Φ est une contraction de L_m^1 . Soit f un élément de V , on a donc $\|\Phi f\|_1 \leq \|f\|_1$ et donc $\sup_{n \geq 0} \{\|\Phi^n f\|_1, f \in V, \|f\|_1 \leq 1\} \leq 1 < \infty$.

(c) - Par hypothèse, il existe $n_0 > 0$ tel que $\gamma = \inf |(T^{n_0})'(x)| > 1$. Il existe $N > 0$ tel que $\gamma^N > 2, \gamma^{N-1} \leq 2$ et $\sup \left| \frac{(T^{N n_0})''(x)}{[(T^{N n_0})'(x)]^2} \right| < \infty$.

On pose $S = T^{N n_0}$, S est un élément de \mathcal{C} , en effet : la subdivision associée à S est la plus fine contenue dans $\{(T^{-N n_0+1})I_{i_{N n_0-1}} \cap \dots \cap T^{-1}I_{i_1} \cap I_{i_0}\}_{(i_0, \dots, i_{N n_0-1}) \in J^{N n_0}}$, on la note $(J_j)_{j \in J}$. Sur J_j , S est strictement monotone comme composée de fonctions strictement monotones. L'ensemble $\{S^{-1}(J_j)\}_{j \in J}$ est composé d'un nombre fini d'intervalles distincts, on le voit par récurrence, pour $N n_0 = 2$, la subdivision de T^2 est contenue dans $(T^{-1}(I_{i_1}) \cap I_{i_0})_{(i_0, i_1) \in J^2}$.

Pour i_0, i_1 dans I on a : $T(T^{-1}(I_{i_1}) \cap I_{i_0}) = T(I_{i_0}) \cap I_{i_1}$. Mais il n'y a qu'un nombre fini d'intervalles distincts $T(I_{i_0})$ d'où un nombre fini d'intervalles distincts dans $\{S(J_j)\}_{j \in J}$.

On a : $|S'(x)| = |(T^{n_0})'(T^{n_0(N-1)}x)(T^{n_0})'(T^{n_0(N-2)}(x)) \dots (T^{n_0})'(x)| > \gamma^N > 2$ d'où $\inf |S'(x)| \geq 2$.

La condition (4) est évidemment vérifiée.

L'opérateur de Perron-Frobenius associé à S est $\Phi^{N n_0}$ que l'on va écrire sous la forme :

$$\Phi^{N n_0} f(x) = \sum_{j \in J} f(\sigma_j x) \phi_j(x) \chi_j(x),$$

où $\sigma_j(x) = S_j^{-1}(x)$ sur J_j , $\phi_j(x) = \frac{1}{|S'_j(\sigma_j x)|} \leq \gamma^{-N}$ et $\chi_j(x) = 1_{S_j(\overline{J_j})}(x)$.

Soit $f \in V$.

On calcule la variation de $\Phi^{n_0 N} f$

$$v[\Phi^{n_0 N} f] = v\left[\sum_{j \in J} f \circ \sigma_j \phi_j \chi_j\right] \leq \sum_{j \in J} v[f \circ \sigma_j \phi_j \chi_j].$$

On pose $\chi_j = 1_{[a_j, b_j]}$.

On a alors :

$$\begin{aligned} v[f \circ \sigma_j \phi_j \chi_j] &\leq v_{[a_j, b_j]}[f \circ \sigma_j \phi_j] + |(f \circ \sigma_j \phi_j)(a_j)| + |(f \circ \sigma_j \phi_j)(b_j)| \\ &\leq v_{[a_j, b_j]}[f \circ \sigma_j \phi_j] + v_{[a_j, b_j]}[f \circ \sigma_j \phi_j] + 2d_j \end{aligned}$$

où $d_j = \inf\{|(f \circ \sigma_j \phi_j)(x)|, x \in [a_j, b_j]\}$. On a donc :

$$\begin{aligned} d_j &\leq \frac{1}{b_j - a_j} \int_{a_j}^{b_j} |f \circ \sigma_j \phi_j| dm = \frac{1}{m(S(\overline{J_j}))} \int_{a_j}^{b_j} |f \circ \sigma_j| \phi_j dm \\ &\leq \frac{1}{m(S(\overline{J_j}))} \int_{J_j} |f| dm \text{ par changement de variables.} \end{aligned}$$

D'après l'hypothèse (2), il existe $\delta > 0$ tel que

$$\forall j \in J \quad m(S(\overline{J_j})) \geq \delta.$$

on obtient donc :

$$\begin{aligned} v(\Phi^{N n_0} f) &\leq 2 \sum_{j \in J} v_{[a_j, b_j]}[f \circ \sigma_j \cdot \phi_j] + \frac{2}{\delta} \sum_{j \in J} \int_{J_j} |f| dm \\ &\leq 2 \sum_{j \in J} v_{[a_j, b_j]}[f \circ \sigma_j \cdot \phi_j] + \frac{2}{\delta} \|f\|_1. \end{aligned}$$

On calcule maintenant $v_{[a_j, b_j]}[f \circ \sigma_j \cdot \phi_j]$.

$$\begin{aligned} v_{[a_j, b_j]}[f \circ \sigma_j \cdot \phi_j] &= \int_{[a_j, b_j]} |d[f \circ \sigma_j \cdot \phi_j]| \\ &\leq \int_{[a_j, b_j]} |\phi_j| |d[f \circ \sigma_j]| + \int_{[a_j, b_j]} |\phi'_j| |f \circ \sigma_j| dm \\ &\leq \gamma^{-N} \int_{[a_j, b_j]} |df \circ \sigma_j| + \int_{[a_j, b_j]} \left| \frac{\phi'_j}{\phi_j} \right| |\phi_j| |f \circ \sigma_j| dm \\ &\leq \gamma^{-N} \int_{J_j} |df| + K \int_{J_j} |f| dm \end{aligned}$$

où $K = \sup_{j \in J} \sup_{x \in [a_j, b_j]} \left| \frac{\phi'_j}{\phi_j}(x) \right|$. On montre que K est fini :

On a pour x dans $[a_j, b_j]$ $\phi_j(x) = \frac{1}{S'_j(\sigma_j x)} = \sigma'_j(x)$.

Alors :

$$\phi'_j(x) = \frac{S''_j(\sigma_j x)\sigma'_j(x)}{[S'_j(\sigma_j x)]^2} = \frac{S''_j(\sigma_j x)}{[S'_j(\sigma_j x)]^2}\phi_j(x).$$

Ainsi :

$$K = \sup_{j \in J} \sup_{x \in [a_j, b_j]} \left| \frac{S''_j(\sigma_j x)}{[S'_j(\sigma_j x)]^2} \right| = \sup_{j \in J} \sup_{x \in I_j} \left| \frac{S''_j(x)}{[S'_j(x)]^2} \right|$$

qui est fini d'après l'hypothèse (4).

Alors, on a :

$$\begin{aligned} v(\Phi^{N_0} f) &\leq 2 \sum_{j \in J} [K \int_{I_j} |f| dm + \gamma^{-N} \int_{I_j} |df|] + \frac{2}{\delta} \|f\|_1 \\ &\leq 2(K + \frac{1}{\delta}) \|f\|_1 + 2\gamma^{-N} v(f). \end{aligned}$$

Comme $\|\Phi^{N_0} f\|_1 \leq \|f\|_1$, on en déduit que

$$\begin{aligned} \|\Phi^{N_0} f\|_v &\leq 2\gamma^{-N} \|f\|_v + [1 + 2(K + \frac{1}{\delta})] \|f\|_1 \\ &\leq \alpha \|f\|_v + \beta \|f\|_1 \text{ où } \alpha = 2\gamma^{-N} < \frac{2}{2} = 1. \end{aligned}$$

On remarque ici que dans le cas d'une subdivision dénombrable, l'hypothèse (4) sur T est nécessaire.

(d) - Si V est une partie bornée de $(V, \|\cdot\|_v)$, comme Φ est un opérateur borné de V alors $\Phi^n V$ est une partie bornée de $(V, \|\cdot\|_v)$ donc de $(L_m^1, \|\cdot\|_1)$.

On en déduit alors sur $\Phi^{N_0} V$ est une partie relativement compacte de $(V, \|\cdot\|_v)$ car d'après la preuve du (a) l'injection de $(V, \|\cdot\|_v)$ dans $(L_m^1, \|\cdot\|_1)$ est compacte.

Théorème 5.2. *Sous les hypothèses (a), (b), (c) et (d), Φ n'a qu'un nombre fini de valeurs propres de module 1 : $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ et Φ s'écrit alors :*

$$\Phi = \sum_{i=1}^p \lambda_i \Phi_i + \psi.$$

Où les Φ_i sont des opérateurs linéaires bornés de \mathcal{V} dans $\Phi_i(\mathcal{V})$ qui est de dimension finie et est contenu dans \mathcal{V} , et où ψ est un opérateur linéaire borné de \mathcal{V} qui vérifie : $\psi(\mathcal{V}) \subset \mathcal{V}$ et ψ a un rayon spectral $\rho(\psi) < 1$ dans $(\mathcal{V}, \|\cdot\|_{\mathcal{V}})$. De plus on a :

$$\psi \Phi_i = \Phi_i \psi = 0 \quad \Phi_i \Phi_j = 0 \text{ si } i \neq j \quad \Phi_i^2 = \Phi_i.$$

On peut alors écrire : $\Phi^n = \sum_{i=1}^p \lambda_i^n \Phi_i + \psi^n$ pour tout $n > 0$.

Preuve : Elle se fait en plusieurs étapes.

1ère étape : on démontre que Φ a un nombre fini de valeurs propres de module 1 et que les espaces propres associés sont de dimension finie.

Lemme 5.3. Soit $m \geq 1$ alors, $\|\Phi^{m n_0} f\|_{\mathcal{V}} \leq \alpha^m \|f\|_{\mathcal{V}} + L \|f\|_{\mathcal{L}}$.

Preuve : D'après les hypothèses (b) et (c) on a :

$$\text{pour tout } m, \|\Phi^m\|_{\mathcal{L}} \leq H < \infty \text{ donc } \|\Phi^m f\|_{\mathcal{L}} \leq H \|f\|_{\mathcal{L}}$$

$$\text{et } \|\Phi^{n_0} f\|_{\mathcal{V}} \leq \alpha \|f\|_{\mathcal{V}} + \beta \|f\|_{\mathcal{L}}.$$

Alors $m \geq 1$, $\|\Phi^{m n_0}\|_{\mathcal{V}} \leq \alpha \|\Phi^{(m-1)n_0} f\|_{\mathcal{V}} + \beta \|\Phi^{(m-1)n_0} f\|_{\mathcal{L}} \leq \alpha \|\Phi^{(m-1)n_0} f\|_{\mathcal{V}} + \beta H \|f\|_{\mathcal{L}}$ par récurrence on obtient alors :

$$\|\Phi^m f\|_{\mathcal{V}} \leq \alpha^m \|f\|_{\mathcal{V}} + \beta H (1 + \alpha + \dots + \alpha^{m-1}) \|f\|_{\mathcal{L}}.$$

Comme $0 < \alpha < 1$ on en déduit que $\beta H (1 + \alpha + \dots + \alpha^{m-1}) \leq \frac{\beta H}{1-\alpha}$. On en déduit alors le lemme 5.4.

Lemme 5.4. Les normes $(\|\Phi_1^n\|_{\mathcal{V}})_{n \geq 1}$ sont uniformément bornées.

Preuve : D'après le lemme 5.3 on a : $\|\Phi^{m n_0}\|_{\mathcal{V}} \leq \alpha^{m-n_0} + L$ si $m \geq 0$.

Comme Φ est un opérateur borné par rapport à la norme de \mathcal{V} , il en est de même pour Φ^n , $n < n_0$, il existe donc $M > 0$ tel que, $n < n_0$ $\|\Phi^n\|_{\mathcal{V}} \leq M < \infty$.

D'où l'uniforme bornitude de $\{\|\Phi^n\|_{\mathcal{V}}\}_{n \geq 0}$.

On note pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ $\mathcal{V}(\lambda) = \{f \in \mathcal{V} : \Phi f = \lambda f\}$ c'est l'espace propre associé à λ , si $\mathcal{V}(\lambda) \neq \{0\}$ alors λ est une valeur propre de Φ .

Lemme 5.5. $\mathcal{V}(\lambda)$ est de dimension finie si $|\lambda| = 1$.

Preuve : Pour cela, on montre que $X = \mathcal{V}(\lambda) \cap \{f \in \mathcal{V} : \|f\|_{\mathcal{L}} \leq 1\}$ est compact.

Soit $f \in X$, $\|f\|_{\mathcal{L}} \leq 1$ et $\Phi f = \lambda f$.

Alors $\|\Phi^{n_0} f\|_{\mathcal{V}} = \|\lambda^{n_0} f\|_{\mathcal{V}} = \|f\|_{\mathcal{V}} \leq \alpha \|f\|_{\mathcal{V}} + \beta \|f\|_{\mathcal{L}} \leq \alpha \|f\|_{\mathcal{V}} + \beta$. Comme $0 < \alpha < 1$ alors : $\|f\|_{\mathcal{V}} \leq \frac{\beta}{1-\alpha}$.

X est donc une partie bornée de \mathcal{V} , par (d) elle est transformée en une partie compacte de \mathcal{L} par Φ^{n_0} . Mais X est Φ^{n_0} -invariant. X est donc une partie compacte de \mathcal{L} donc $\dim \mathcal{V}(\lambda) < +\infty$.

Lemme 5.6. Φ n'admet qu'un nombre fini de valeurs propres de module 1.

Preuve : Dans le cas contraire, il existerait une suite infinie de valeurs propres distinctes de module 1 : $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \dots$ $\lambda_i \neq \lambda_j$ si $i \neq j$. Pour tout n , on choisit f_n dans $\mathcal{V}(\lambda_n)$, $f_n \neq 0$. Les $(f_n)_{n \geq 0}$ sont linéairement indépendants (dans \mathcal{L} comme dans \mathcal{V}).

On note $X(n) = \text{vect} \{f_1, \dots, f_n\}$. On a $X(n) \subset X(n+1)$. (l'inclusion est stricte)

Le lemme de F. Riesz prouve alors l'existence d'une suite g_1, \dots, g_n, \dots telle que $\|g_n\|_{\mathcal{L}} = 1$ et $\|g_n - f\|_{\mathcal{L}} \geq \frac{1}{2}$ où $f \in X(n)$ et $g_n \in X(n)$.

On a :

Si $f \in X(n)$, $f = \sum_{i=1}^n a_i f_i$, alors $\Phi^m(f) = \sum_{i=1}^n \lambda_i^m a_i f_i \in X(n)$

et donc $\Phi^m(f) \in X(n)$.

Si $f \in X(m)$ alors pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{\lambda_m^p} \Phi^p(f) - f \in X(m-1)$. Car $\frac{1}{\lambda_m^p} \Phi^p f - f = \sum_{i=1}^m a_i (\frac{\lambda_i}{\lambda_m})^p f - \sum_{i=1}^m a_i f_i = \sum_{i=1}^{m-1} a_i ((\frac{\lambda_i}{\lambda_m})^p - 1) f_i$.

Pour $n \geq n_0$ $\|\frac{1}{\lambda_j^n} \Phi^n g_j\|_{\mathcal{V}} = \|\Phi^n g_j\|_{\mathcal{V}} \leq \alpha^{k(n)} \|g_j\|_{\mathcal{V}} + L \|g_j\|_{\mathcal{L}} = \alpha^{k(n)} \|g_j\|_{\mathcal{V}} + L$. Comme $0 < \alpha < 1$, il existe alors $n(j) > 0$ tel que

pour tout $n \geq n(j)$ et $n \geq n_0$, $\alpha^{k(n)} \|g_j\|_{\mathcal{V}} \leq 1$.

D'où l'ensemble $\{\frac{1}{\lambda_j^n} \Phi^n g_j, j \in \mathbb{N}^*, n \geq \sup\{n(j), n_0\}\}$ est la transformée par Φ^{n_0} d'une partie bornée de \mathcal{V} , d'après (4) c'est donc une partie compacte de \mathcal{L} , il existe donc deux sous-suites (λ_s) et (n_s) croissantes de (j) et (s) telles que la suite $(\frac{1}{\lambda_{j_s}^{n_s}} \Phi^{n_s} g_{j_s})_{s > 0}$ converge dans \mathcal{L} . Mais :

$$D = \left\| \frac{1}{\lambda_{j_s}^{n_s}} \Phi^{n_s} g_{j_s} - \frac{1}{\lambda_{j_{s+1}}^{n_{s+1}}} \Phi^{n_{s+1}} g_{j_{s+1}} \right\|_{\mathcal{L}}$$

$$D = \left\| g_{j_{s+1}} + \frac{1}{\lambda_{j_{s+1}}^{n_{s+1}}} \Phi^{n_{s+1}} g_{j_{s+1}} - g_{j_{s+1}} + \frac{1}{\lambda_{j_s}^{n_s}} \Phi^{n_s} g_{j_s} \right\|_{\mathcal{L}}$$

Comme $\frac{1}{\lambda_{j_{s+1}}^{n_{s+1}}} \Phi^{n_{s+1}} g_{j_{s+1}} - g_{j_{s+1}}$ est dans $X(j_{s+1} - 1)$ et comme $\frac{1}{\lambda_{j_s}^{n_s}} \Phi^{n_s} g_{j_s}$ est dans $X(j_s)$ qui est contenu dans $X(j_{s+1} - 1)$ on en déduit que $D \geq \frac{1}{2}$ par hypothèse sur la suite $(g_n)_{n \geq 0}$. Ceci contredit le fait que $(\frac{1}{\lambda_{j_s}^{n_s}} \Phi^{n_s} g_{j_s})$ converge dans \mathcal{L} et donc il existe un nombre fini de valeurs propres de module 1.

2ème étape : On construit les opérateurs Φ_λ .

Lemme 5.7. *Quelque soit le nombre complexe λ de module 1, quelque soit f dans \mathcal{V} , il existe \bar{f} dans \mathcal{V} tel que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \frac{1}{n} \sum_{k=n_0}^{n_0+n-1} \frac{1}{\lambda^k} \Phi^k f - \bar{f} \right\|_{\mathcal{L}} = 0.$$

Preuve : Soit $\bar{\mathcal{V}} = \{f \in \mathcal{L} : \lim_{n \rightarrow \infty} \|f - g_n\|_{\mathcal{L}} = 0 \text{ où } (g_n)_{n>0} \text{ est une suite de } \mathcal{V}\}$ $\bar{\mathcal{V}}$ est un espace de Banach quand on le munit de la norme $\|\cdot\|_{\bar{\mathcal{V}}}$ qui est la restriction à $\bar{\mathcal{V}}$ de la norme $\|\cdot\|_{\mathcal{L}}$.

$\Phi : \mathcal{V} \rightarrow \Phi(\mathcal{V}) \subset \mathcal{V}$ est un opérateur linéaire tel qu'il existe $H > 0$, $\|\Phi^n\|_{\mathcal{L}} \leq H$ pour $m = 1, 2, \dots$, par le théorème de Hahn-Banach il existe un prolongement $\hat{\Phi} : \bar{\mathcal{V}} \rightarrow \hat{\Phi}(\bar{\mathcal{V}}) \subset \bar{\mathcal{V}}$ de Φ vérifiant :

$$\forall f \in \mathcal{V}, \forall m > 0 \quad \hat{\Phi}^m f = \Phi^m f \text{ et } \|\hat{\Phi}^m\|_{\bar{\mathcal{V}}} \leq H \text{ pour } m = 1, 2, \dots$$

Le lemme 5.4. entraîne que les normes $\|\Phi^m\|_{\mathcal{V}}$ $m = 1, 2, \dots$ sont uniformément bornées par $M = \sup_{1 \leq m < \infty} \|\Phi^m\|_{\mathcal{V}}$.

Soit $f \in \mathcal{V}$, on a :

$$\begin{aligned} \left\| \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\lambda^{k+n_0}} \hat{\Phi}^k f \right\|_{\mathcal{V}} &\leq \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \|\hat{\Phi}^k f\|_{\mathcal{V}} \leq \frac{n-1}{n} M \|f\|_{\mathcal{V}} + \frac{1}{n} \|f\|_{\mathcal{V}} \\ &\leq \begin{cases} \|f\|_{\mathcal{V}} & \text{si } M \leq 1 \\ M \|f\|_{\mathcal{V}} & \text{si } M > 1 \end{cases} \end{aligned}$$

L'ensemble $\{\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\lambda^{k+n_0}} \hat{\Phi}^k f, n \in \mathbb{N}^*\}$ est une partie bornée de \mathcal{V} par (d) elle est transformée par Φ^{n_0} en une partie compacte de \mathcal{L} . C'est $\{\frac{1}{n} \sum_{k=n_0}^{n+n_0-1} \frac{1}{\lambda^k} \Phi^k f, n > 0\}$. On peut donc en extraire une sous-suite convergente dans \mathcal{L} donc dans $\bar{\mathcal{V}}$. En fait c'est la suite elle-même qui converge dans \mathcal{L} donc dans $\bar{\mathcal{V}}$.

Donc il existe $\bar{f} \in \bar{\mathcal{V}}$ tel que $\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \frac{1}{n} \sum_{k=n_0}^{n_0+n-1} \frac{1}{\lambda^k} \Phi^k(f) - \bar{f} \right\|_{\mathcal{L}} = 0$. On montre maintenant que \bar{f} est dans \mathcal{V} , on observe que :

$$\left\| \frac{1}{n} \sum_{k=n_0}^{n_0+n-1} \frac{1}{\lambda^k} \Phi^k f \right\|_{\mathcal{V}} \leq \frac{1}{n} \sum_{k=n_0}^{n_0+n-1} \|\Phi^k f\|_{\mathcal{V}} \leq M \|f\|_{\mathcal{V}}.$$

\bar{f} est donc limite dans \mathcal{L} d'une suite de points de \mathcal{V} qui sont bornés par $M \|f\|_{\mathcal{V}}$ dans \mathcal{V} , l'hypothèse (a) permet de conclure que $\bar{f} \in \mathcal{V}$ et $\|\bar{f}\|_{\mathcal{V}} \leq M \|f\|_{\mathcal{V}}$.

On peut alors poser pour tout f dans \mathcal{V} $\bar{f} = \Phi_{\lambda} f$. L'opérateur Φ est un opérateur linéaire de \mathcal{V} dans $\Phi_{\lambda}(\mathcal{V}) \subset \mathcal{V}$. L'inégalité $\|\bar{f}\|_{\mathcal{V}} \leq M \|f\|_{\mathcal{V}}$ entraîne alors que

$$\|\Phi_{\lambda}\|_{\mathcal{V}} \leq M \text{ pour tout } \lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| = 1.$$

On a aussi,

$$\left\| \frac{1}{n} \sum_{k=n_0}^{n_0+n-1} \Phi^k f \right\|_{\mathcal{L}} \leq \frac{1}{n} \sum_{k=n_0}^{n_0+n-1} \|\Phi^k f\| \leq H \|f\|_{\mathcal{L}} \text{ pour tout } n,$$

on a donc :

$$\|\Phi_\lambda f\|_{\mathcal{L}} \leq H \|f\|_{\mathcal{L}} \text{ et donc } \|\Phi_\lambda\|_{\mathcal{L}} \leq H.$$

3ème étape : On démontre les dernières assertions du théorème.

Lemme 5.8. $\Phi_\lambda(\mathcal{V}) = \mathcal{V}(\lambda)$.

Preuve : Soit $f \in \mathcal{V}(\lambda)$, on a : $\Phi^k f = \lambda^k f$ $k \geq 1$.

Alors : $\frac{1}{n} \sum_{k=n_0}^{n_0+n-1} \frac{1}{\lambda^k} \Phi^k f = \frac{1}{n} \sum_{k=n_0}^{n_0+n-1} f = f \Rightarrow \Phi_\lambda f = f$ et $\mathcal{V}(\lambda) \subset \Phi_\lambda(\mathcal{V})$.

Soit $f \in \Phi_\lambda(\mathcal{V})$ alors il existe g dans \mathcal{V} tel que $f = \Phi_\lambda g$ pour tout $n > 0$ on a :

$$\Phi \left[\frac{1}{n} \sum_{k=n_0}^{n_0+n-1} \frac{1}{\lambda^k} \Phi^k(g) \right] = \frac{1}{n} \sum_{k=n_0}^{n_0+n-1} \frac{1}{\lambda^k} \Phi^{k+1}(g) = \frac{n+1}{n} \lambda \frac{1}{n+1} \sum_{k=n_0}^{n_0+n} \frac{1}{\lambda^k} \Phi^k(g) - \frac{1}{n} \frac{1}{\lambda^{n_0-1}} \Phi^{n_0} g.$$

On passe alors à la limite dans \mathcal{L} , $\Phi_\lambda f = \lambda f$.

On en déduit alors que pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| = 1$, non valeur propre de Φ , $\Phi_\lambda = 0$.

Lemme 5.9. Soit λ une valeur propre de module 1 de Φ alors $\Phi_\lambda^2 = \Phi_\lambda$.

Preuve : Soit $f \in \mathcal{V}$ alors $\Phi_\lambda f \in \mathcal{V}(\lambda)$ comme si $f \in \mathcal{V}(\lambda)$ $\Phi_\lambda f = f$ on en déduit que $\Phi_\lambda^2 f = \Phi_\lambda f$. Φ_λ est donc une projection de \mathcal{V} sur $\mathcal{V}(\lambda)$.

Lemme 5.10. Si μ et λ sont distinctes alors $\Phi_\lambda \Phi_\mu = 0$.

Preuve : Si $f \in \mathcal{V}$, $\Phi_\mu f \in \mathcal{V}(\mu) \Rightarrow \Phi_\lambda \Phi_\mu f \in \mathcal{V}(\mu) \cap \mathcal{V}(\lambda) = \{0\}$.

On peut alors décomposer \mathcal{V} en : $\mathcal{V} = \bigoplus_{i=1}^p \mathcal{V}(\lambda_i) \oplus \mathcal{W}$. On note maintenant Φ_i à la place de Φ_{λ_i} . Les Φ_i sont des projections de \mathcal{V} dans $\mathcal{V}(\lambda_i)$ qui sont de dimension finie. $f \in \mathcal{V}$ s'écrit alors de façon unique

$$f = \Phi_1 f + \cdots + \Phi_p f + g \text{ où } g \in \mathcal{W}.$$

Alors pour tout $m > 0$ on a :

$$\Phi^m f = \lambda_1^m \Phi_1 f + \cdots + \lambda_p^m \Phi_p f + \Phi^m g,$$

en effet :

Soit σ la projection de \mathcal{V} sur \mathcal{W} , on pose $\psi f = \Phi g = \Phi \sigma f = \sigma \Phi f$. On a $\sigma \psi = \psi$ car $\psi : \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{W}$.

On a donc : $\Phi^m \sigma = \psi^m$ ce qui entraîne $\psi \Phi_i = \Phi_i \psi = 0$ car $\mathcal{V}(\lambda_i) \cap \mathcal{W} = \{0\}$.

Par construction, ψ n'a pas de valeur propre de module 1 dans \mathcal{V} . C'est un opérateur borné de \mathcal{V} et de \mathcal{L} on a :

$$\|\psi^m\|_{\mathcal{L}} = \|\Phi^m - \lambda_1^m \Phi_1 - \dots - \lambda_p^m \Phi_p\|_{\mathcal{L}} \leq \|\Phi^m\|_{\mathcal{L}} + \|\Phi_1\|_{\mathcal{L}} + \dots + \|\Phi_p\|_{\mathcal{L}} \leq (p+1)M.$$

De même on a : $\|\psi^m\|_{\mathcal{V}} \leq (p+1)H$. Ainsi on a $\psi(\mathcal{V}) \subset \mathcal{V}$ et ψ a un rayon spectral $\rho(\psi) < 1$ dans $(\mathcal{V}, \|\cdot\|_{\mathcal{V}})$.

Conséquences : D'après la proposition 5.1., on peut appliquer ce théorème à Φ . On s'intéresse à la valeur $\lambda = 1$, on définit alors $h = \Phi_1(1)$. Comme la fonction 1 est un élément de V , d'après la preuve du théorème (2ème étape) on sait que $h \in V$, il reste à montrer que h n'est pas nulle. On a $\int_0^1 h dm = 1$.

En effet h est définie comme la limite dans \mathcal{V} des fonctions $h_n = \frac{1}{n} \sum_{k=n_0}^{n+n_0-1} \Phi^k(1)$ on a pour tout $n > 0$, $\int_0^1 h_n dm = \frac{1}{n} \sum_{k=n_0}^{n+n_0-1} \int_0^1 \Phi^k(1) dm = 1$ d'après la propriété (iv) de l'opérateur de Perron-Frobenius. Comme h est dans V donc dans L_m^1 , on en déduit alors que $\int_0^1 h dm = 1$ donc que h n'est pas nulle.

Par construction h est positive d'après (ii) et (iv). On en déduit alors que Φ admet 1 pour valeur propre et qu'une fonction propre associée est h .

Exemples :

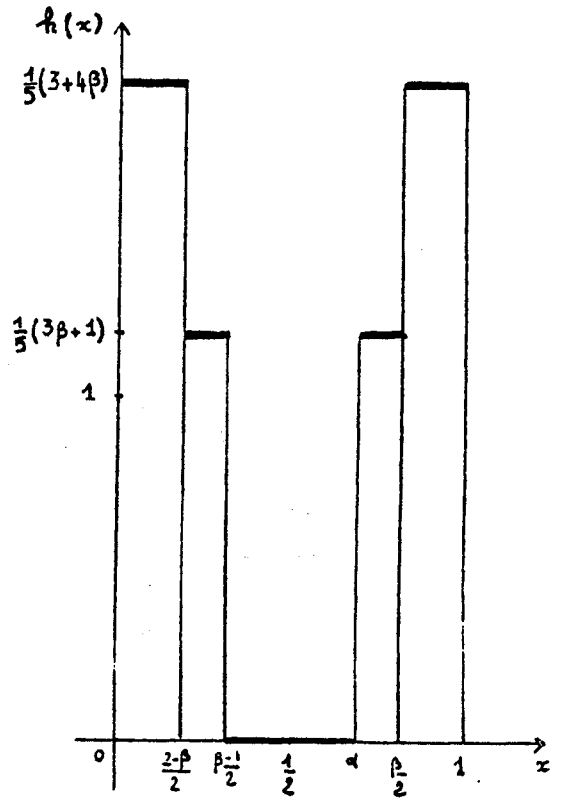
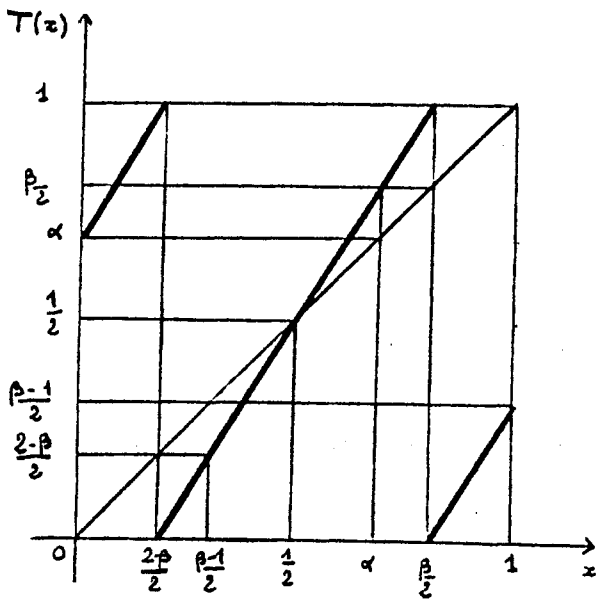
La transformation "fraction continue" : sur $]\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}[$, on a : $Tx = \frac{1}{x} - n$. La réciproque vaut donc : $\sigma_n x = \frac{1}{x+n}$ et $\sigma'_n x = \frac{-1}{(x+n)^2}$. L'opérateur Φ vaut alors : $\Phi f(x) = \sum_{n \geq 1} f(\frac{1}{x+n}) \frac{-1}{(x+n)^2}$. $h(x) = \frac{1}{\log 2} \frac{1}{1+x}$ car $\int_0^1 h(x) dx = 1$ et $\Phi h(x) = \frac{1}{\log 2} \sum_{n \geq 1} \frac{1}{1+\frac{1}{x+n}} \frac{1}{(x+n)^2} = \frac{1}{\log 2} \sum_{n \geq 1} \frac{1}{x+n+1} \frac{1}{x+n} = \frac{1}{\log 2} \sum_{n \geq 1} (\frac{1}{x+n} - \frac{1}{x+n+1}) = \frac{1}{\log 2} \frac{1}{1+x}$.

Dans le cas d'une transformation markovienne linéaire on a $h = 1$ et m est T -invariante.

Pour les β -transformations, si $\beta \in \mathbb{N}$ et $\alpha = 0$, $\Phi f(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{\beta-1} f(\frac{x+k}{\beta})$ et $\Phi 1 = 1$ donc $h = 1$.

Remarque : h n'est pas obligatoirement strictement positive, par exemple si on prend $Tx = \beta x + \alpha[1]$ $\beta > 0, \beta^2 = \beta + 1$ et $\alpha = \frac{3-\beta}{2}$.

$$h(x) = \frac{1}{5}(3+4\beta)(1_{[0, (2-\beta)/2[}(x) + 1_{[\beta/2, 1[}(x)) + \frac{1}{5}(3\beta+1)(1_{[(2-\beta)/2, (\beta-1)/2[}(x) + 1_{[\alpha, \beta/2[}(x)).$$



On a $\int_0^1 h(x)dx = 1$ et $\Phi h = h$ en effet :

$$\Phi f(x) = (\beta - 1)\left[f\left(\frac{x - \alpha}{\beta}\right)1_{[\alpha, 1]}(x) + f\left(\frac{x - \alpha + 1}{\beta}\right) + f\left(\frac{x - \alpha + 2}{\beta}\right)1_{[0, \frac{\beta-1}{2}]}(x)\right].$$

$$\begin{aligned} \Phi h(x) &= \frac{1}{5}(\beta - 1)(3 + 4\beta)\left[(1_{[\alpha, 1]}(x) + 1_{[2, \frac{3+\beta}{2}]}(x))1_{[\alpha, 1]}(x) + 1_{[\alpha-1, 0]}(x)\right. \\ &\quad \left.+ 1_{[1, \frac{1+\beta}{2}]}(x) + (1_{[\alpha-2, 1]}(x) + 1_{[0, \frac{\beta-1}{2}]}(x))1_{[0, \frac{\beta-1}{2}]}(x)\right] + \frac{1}{5}(\beta - 1)(3\beta + 1)\left[(1_{[1, \frac{2-\beta}{2}]}(x)\right. \\ &\quad \left.+ 1_{[\frac{\beta+2}{2}, 1]}(x))1_{[\alpha, 1]}(x) + 1_{[0, \frac{1-\beta}{2}]}(x) + 1_{[\frac{\beta}{2}, 1]}(x) + (1_{[-1, -\frac{\beta}{2}]}(x) + 1_{[\frac{\beta}{2}-1, 0]}(x))1_{[0, \frac{\beta-1}{2}]}(x)\right] \\ &= \frac{1}{5}(3\beta + 1)\left[1_{[\alpha, 1]}(x) + 1_{[0, \frac{\beta-1}{2}]}(x)\right] + \frac{1}{5}(\beta + 2)\left[1_{[0, \frac{2-\beta}{2}]}(x) + 1_{[\frac{\beta}{2}, 1]}(x)\right] = h(x). \end{aligned}$$

On a ainsi construit une mesure $\mu = hm$ absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue mais non nécessairement équivalente à m tel que (T, μ) soit un système dynamique.

Hypothèse : Dans toute la suite, on suppose que **1** est une valeur propre simple de Φ .

Alors le système (T, μ) est ergodique.

On en déduit que les autres valeurs propres de module 1 de Φ sont toutes simples en effet :

On montre d'abord que :

Si $\Phi u = \lambda u$ $u \in V, u \neq 0$ et $|\lambda| = 1, \lambda \neq 1$, il existe $v \in V$ ne s'annulant pas sur I tel que $u = vh$.

Car $|\Phi u| = |u|$, mais d'après (ii) $|\Phi u| \leq \Phi|u|$ donc $\Phi|u| \geq |u| \geq 0$. D'après (iv) $\int_0^1 \Phi|u| dm = \int_0^1 |u| dm$. Ainsi $\Phi|u| = |u|$ m.p.p. donc on a $\Phi|u| = |u|$ dans V , comme 1 est valeur propre simple de Φ associée à h , on en déduit que $|u| = kh$ où k est une constante positive.

On peut donc écrire $u = vh$, v étant un élément de V ne s'annulant pas sur I tel que : $\Phi(vh) = \lambda vh$.

Sur $\{h \neq 0\}$, on peut poser $P(v) = \frac{\Phi(vh)}{h}$. P admet T pour adjoint dans L_μ^2 et est une contraction de L_μ^2 , en effet, on note $\langle v, w \rangle_\mu$ le produit scalaire de L_μ^2 :

$$\langle Pv, w \rangle_\mu = \int_0^1 \Phi(vh) \cdot w dm = \int_0^1 v \cdot w \circ T \cdot h dm = \langle v, w \circ T \rangle_\mu$$

$$\|Pv\|_{2,\mu} = \sup_{\|w\|_{2,\mu} \leq 1} |\langle Pv, w \rangle_\mu|.$$

Comme

$$\begin{aligned} |\langle Pv, w \rangle_\mu| &= \left| \int_0^1 \Phi(vh) w dm \right| = \left| \int_0^1 v \cdot w \circ T d\mu \right| \leq \int_0^1 |v \cdot w \circ T| d\mu \\ &\leq \left[\int_0^1 v^2 d\mu \right]^{\frac{1}{2}} \left[\int_0^1 w^2 \circ T d\mu \right]^{\frac{1}{2}} = \|v\|_{2,\mu} \|w\|_{2,\mu}, \end{aligned}$$

on a $\|Pv\|_{2,\mu} \leq \|v\|_{2,\mu}$.

Soit, maintenant, $\lambda \neq 1$ une valeur propre de module 1 de Φ . Il existe donc $v \in V$ ne s'annulant pas sur I tel que :

$$\Phi(vh) = \lambda vh \text{ donc } Pv = \lambda v,$$

λ est donc une valeur propre de module 1 de P et v est un point fixe de l'opérateur $\frac{P}{\lambda}$.

$\frac{P}{\lambda}$ est une contraction de L_μ^2 car $|\lambda| = 1$ et son adjoint est λT , en effet :

$$\left\langle \frac{P}{\lambda} v, w \right\rangle_\mu = \frac{1}{\lambda} \int_0^1 \Phi(vh) w dm = \frac{1}{\lambda} \int_0^1 v \cdot w \circ T d\mu = \frac{1}{\lambda} \langle v, w \circ T \rangle = \left\langle v, \frac{1}{\lambda} w \circ T \right\rangle$$

et $\lambda \bar{\lambda} = 1$ d'où $\frac{1}{\lambda} = \lambda$.

Dans un espace de Hilbert, les points fixes d'une contraction sont ceux de son adjoint.

Ainsi $\lambda v \circ T = v$.

Si $v_1 \in V$ vérifie $\lambda v_1 \circ T = v_1$ alors comme v ne s'annule pas sur I on a :
 $(\frac{v_1}{v}) \circ T = \frac{v_1}{v}$.

Alors $\Phi(\frac{v_1}{v} \circ T \cdot h) = \Phi(\frac{v_1}{v} \cdot h)$ i.e. $\frac{v_1}{v} h = \Phi(\frac{v_1}{v} \cdot h)$.

Donc $\frac{v_1}{v}$ est une constante et $\frac{P}{\lambda}$ n'admet qu'un espace vectoriel de dimension 1 comme invariant, c'est-à-dire λ est une valeur propre simple de P et donc de Φ .

On suppose donc que toutes les valeurs propres de Φ sont simples.

On veut maintenant démontrer le théorème central limite : soit f un élément de V à valeurs réelles, sous l'hypothèse $\sigma^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 (\frac{S_n f}{\sqrt{n}})^2 h dm > 0$ et si $\mu(f) = 0$ on a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu[\frac{S_n f}{\sigma \sqrt{n}} \leq v] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^v e^{-u^2/2} du \text{ pour tout } v \in \mathbb{R}.$$

D'après le théorème de Paul Lévy, il suffit de prouver que pour tout t de \mathbb{R}
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 e^{it \frac{S_n f}{\sigma \sqrt{n}}} h dm = e^{-t^2/2}$.

On remarque que :

$$\int_0^1 e^{it \frac{S_n f}{\sigma \sqrt{n}}} h dm = \int_0^1 e^{it \frac{S_n f}{\sigma \sqrt{n}}} \cdot h \cdot 1 \circ T^n dm = \int_0^1 \Phi^n[e^{it \frac{S_n f}{\sigma \sqrt{n}}} \cdot h] dm.$$

On est donc amené à étudier $\Phi^n[e^{it \frac{S_n f}{\sigma \sqrt{n}}} \cdot h]$ et pour cela à construire un nouvel opérateur $\Phi_f(i\theta)$ vérifiant : $\Phi_f^n(i\theta)(g) = \Phi^n[e^{i\theta S_n f} g]$ pour tout g de V et tout θ réel.

6. Les perturbations de l'opérateur Φ

On perturbe l'opérateur Φ : soit f une fonction réelle appartenant à V , pour tout θ dans \mathbb{R} , on définit l'opérateur $\Phi_f(i\theta)$ par :

$$\Phi_f(i\theta)(g) = \Phi[\exp(i\theta f) \cdot g] \quad \text{où } g \text{ est dans } V.$$

Propriétés de l'opérateur $\Phi_f(i\theta)$:

[P1] $\Phi_f(0) = \Phi$.

[P2] Pour tout θ de \mathbb{R} , $\Phi_f(i\theta)$ est un opérateur continu de V .

[P3] L'application $\theta \rightarrow \Phi_f(i\theta)$ est analytique.

[P4] Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a l'égalité m -presque-partout

$$\Phi_f^n(i\theta)(g) = \Phi^n[\exp(i\theta S_n f) \cdot g] \quad \text{où } S_n f = \sum_{k=0}^{n-1} f \circ T^k.$$

La propriété [P4] permet de faire l'étude de $S_n f$ en utilisant les propriétés spectrales de $\Phi_f(i\theta)$.

Preuves :

[P2] : On montre d'abord que si f est dans V et θ dans \mathbb{R} alors $\exp(i\theta f)$ est dans V . On a :

$$\|\exp(i\theta f)\|_1 = \int_0^1 |\exp(i\theta f)| dm = 1 \quad \text{donc } \exp(i\theta f) \in L_m^1.$$

Pour toute subdivision $(a_i)_{1 \leq i \leq n}$ finie de $[0, 1]$, on a :

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{n-1} |\exp(i\theta f)(a_j) - \exp(i\theta f)(a_{j+1})| &= \sum_{j=0}^{n-1} [|\cos(\theta f(a_{j+1})) - \cos(\theta f(a_j))|^2 \\ &\quad + |\sin(\theta f(a_{j+1})) - \sin(\theta f(a_j))|^2]^{\frac{1}{2}} \\ &= \sqrt{2} \sum_{j=0}^{n-1} [1 - \cos(\theta f(a_j)) \cos(\theta f(a_{j+1})) \\ &\quad - \sin(\theta f(a_j)) \sin(\theta f(a_{j+1}))]^{\frac{1}{2}} \\ &= \sqrt{2} \sum_{j=0}^{n-1} [1 - \cos(\theta(f(a_{j+1}) - f(a_j)))]^{\frac{1}{2}} \\ &= 2 \sum_{j=0}^{n-1} \left| \sin\left(\frac{\theta}{2}(f(a_{j+1}) - f(a_j))\right) \right| \\ &\leq 2\pi \frac{|\theta|}{2} \sum_{j=0}^{n-1} |f(a_{j+1}) - f(a_j)| \quad \text{car } |\sin \alpha| \leq \pi |\alpha| \end{aligned}$$

d'où

$$v[\exp(i\theta f)] \leq \pi |\theta| v(f) < \infty.$$

On fixe maintenant θ dans \mathbb{R} et g dans V

$$\|\Phi_f(i\theta)(g)\|_v \leq \|\Phi\|_v \cdot \|\exp(i\theta f) \cdot g\|_v \leq 2\|\Phi\|_v \cdot \|\exp(i\theta f)\|_v \cdot \|g\|_v.$$

D'où la continuité de $\Phi_f(i\theta)$ dans V et on a : $\|\Phi_f(i\theta)\|_v \leq 2\|\Phi\|_v \cdot \|\exp(i\theta)\|_v$.

[P3] : Comme

$$\left\| \frac{(i\theta)^n}{n!} \Phi(f^n \cdot g) \right\|_v \leq \frac{|\theta|^n}{n!} \|\Phi\|_v \cdot \|f^n g\|_v \leq 2\|\Phi\|_v \cdot \|g\|_v \frac{[2|\theta| \cdot \|f\|_v]^n}{n!},$$

la série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\theta)^n}{n!} \Phi(f^n g)$ est normalement convergente dans V et sa limite vaut $\Phi_f(i\theta)(g)$. Ainsi la fonction $\theta \rightarrow \Phi_f(i\theta)$ est analytique.

[P4] : On montre d'abord pour $f \in V$ et $g \in V$ que

$$\Phi[f \circ T \cdot g] = f \cdot \Phi g \quad m\text{-presque partout.}$$

On note $\langle f, \phi \rangle$ pour $\int_0^1 f \cdot \phi dm$ si $f \in V$ et $\phi \in L_m^\infty$. On a par définition de Φ , pour tout ϕ de L_m^∞ :

$$\begin{aligned} \langle \Phi(f \circ T \cdot g), \phi \rangle &= \langle f \circ T \cdot g, \phi \circ T \rangle \\ &= \langle g, (f\phi) \circ T \rangle \text{ car } f \in V \Rightarrow f \in L_m^\infty \\ &= \langle \Phi g, \phi \cdot f \rangle = \langle f \cdot \Phi g, \phi \rangle. \end{aligned}$$

Ceci étant vrai pour tout ϕ de L_m^∞ , on en déduit que $\Phi[f \circ T \cdot g] = f \cdot \Phi g$ m -presque partout.

On peut alors démontrer [P4] par récurrence sur n :

c'est vrai au rang 1 par définition de $\Phi_f(i\theta)$.

Supposons que $\Phi_f^n(i\theta)(g) = \Phi^n[\exp(i\theta S_n f) \cdot g]$ m.p.p.

Alors, il existe $N_1 \in \mathcal{B}$, $m(N_1) = 0$ et sur $I \setminus N_1$ on a :

$$\begin{aligned} \Phi_f^{n+1}(i\theta)(g) &= \Phi_f^n(i\theta)[\Phi_f(i\theta)(g)] \\ &= \Phi^n[\exp(i\theta S_n f) \cdot \Phi_f(i\theta)(g)] \\ &= \Phi^n[\exp(i\theta S_n f) \Phi(\exp(i\theta f)g)]. \end{aligned}$$

Il existe $N_2 \in \mathcal{B}$ tel que $m(N_2) = 0$ et sur $I \setminus N_2$ on a :

$$\begin{aligned} \Phi[\exp(i\theta f) \cdot g] \exp(i\theta S_n f) &= \Phi[\exp(i\theta S_n f) \circ T \cdot \exp(i\theta f) \cdot g] \\ &= \Phi[\exp(i\theta S_{n+1} f) \cdot g]. \end{aligned}$$

Soit alors $N_3 = N_1 \cup N_2$, on a : $m(N_3) = 0$ et sur $I \setminus N_3$,

$$\Phi_f^{n+1}(i\theta)(g) = \Phi^n[\Phi((\exp i\theta S_{n+1} f) \cdot g)] = \Phi^{n+1}[\exp(i\theta S_{n+1} f)g].$$

Le spectre de $\Phi_f(i\theta)$ est donné par le théorème des perturbations.

Proposition 6.1. *Il existe un réel $a > 0$ tel que si $|\theta| < a$, alors pour tout $n \geq 1$, pour tout $g \in V$, on peut écrire :*

$$\Phi_f^n(i\theta)(g) = \lambda_1^n(i\theta)\Phi_1(i\theta)(g) + \sum_{k=2}^p \lambda_k^n(i\theta)\Phi_k(i\theta)(g) + \psi_f^n(i\theta)(g).$$

Avec :

- les applications $\theta \rightarrow \Phi_k(i\theta)$, $\theta \rightarrow \lambda_k(i\theta)$ et $\theta \rightarrow \psi_f(i\theta)$ sont analytiques dans un voisinage de $\theta = 0$.

- $\lambda_k(0) = \lambda_k, (\lambda_1 = 1)$ et $\lambda_k(i\theta)$ est une valeur propre de $\Phi_f(i\theta)$ de module plus grand que $\frac{2+\rho(\psi)}{3} = \rho_2$ (plus petit que 1 car $\|\Phi_f(i\theta)\|_1 \leq \|\Phi\|_1 \leq 1$).

- les opérateurs $\Phi_k(i\theta)$ sont des projections de V sur le sous espace propre $V(\lambda_k(i\theta))$ qui est de dimension 1 et $\Phi_k(0) = \Phi_k, (\Phi_1(f) = m(fh) \cdot h)$.

- l'opérateur $\psi_f(i\theta)$ est un opérateur sur V de rayon spectral $\rho(\psi_f(i\theta)) \leq \rho_2$, $\psi_f(0) = \psi$ et pour tout $1 \leq k \leq p$:

$$\psi_f(i\theta)\Phi_k(i\theta) = \Phi_k(i\theta)\psi_f(i\theta) = 0 \quad \text{et} \quad \|\psi_f^n(i\theta)(h)\|_v \leq C\rho_2^{n+1}|\theta|.$$

Preuve :

Résultats préliminaires :

Notations :

\mathcal{D} est l'ensemble des opérateurs de V à valeurs dans V .

Si $\Phi \in \mathcal{D}$

$$\begin{aligned} \rho(\Phi) &= \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - \Phi \text{ est inversible dans } \mathcal{D}\} \\ \sigma(\Phi) &= \mathbb{C} \setminus \rho(\Phi) \end{aligned}$$

Si $\lambda \in \rho(\Phi)$, $R(\lambda, \Phi) = (\lambda I - \Phi)^{-1}$ existe dans V .

$\mathcal{F}(\Phi)$ est l'ensemble de toutes les fonctions f qui sont analytiques dans un voisinage de $\sigma(\Phi)$. Si $f \in \mathcal{F}(\Phi)$, si $U \subset \sigma(\Phi)$ est un ouvert dont la frontière B est constituée d'un nombre fini d'arcs rectifiables de Jordan orientés positivement et si $U \cup B$ est contenu dans le domaine d'analyticité de f , alors $f(\Phi)$ est défini par :

$$f(\Phi) = \frac{1}{2\pi} \int_B f(\lambda) R(\lambda, \Phi) d\lambda.$$

Lemme 6.2. *L'ensemble \mathcal{G} des éléments de \mathcal{D} qui admettent un inverse dans \mathcal{D} est un ouvert pour la topologie de la convergence uniforme des opérateurs dans \mathcal{D} .*

De plus l'application $\begin{cases} \mathcal{G} & \rightarrow \mathcal{G} \\ A & \rightarrow A^{-1} \end{cases}$ est un homéomorphisme pour la topologie de la convergence des opérateurs dans \mathcal{D} .

Preuve : \mathcal{G} n'est pas vide, car l'opérateur identité est dans \mathcal{G} .

Si A est dans \mathcal{G} , alors \mathcal{G} contient la sphère $S_A = \{B \in \mathcal{D} : \|B - A\|_v < \|A^{-1}\|_v^{-1}\}$ et si B est dans S_A , B^{-1} vaut $A^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} ((A - B)A^{-1})^n$

$$\begin{aligned} \|B^{-1} - A^{-1}\|_v &\leq 2\|A^{-1}\|_v \sum_{n=1}^{\infty} \|((A - B)A^{-1})^n\|_v \\ &\leq 2\|A^{-1}\|_v \sum_{n=1}^{\infty} 4^n \|A - B\|_v^n \cdot \|A^{-1}\|_v^n \end{aligned}$$

$$\leq \frac{8\|A^{-1}\|_v^2\|A-B\|_v}{1-4\|A^{-1}\|_v\|A-B\|_v}$$

d'où $\begin{cases} \mathcal{G} & \rightarrow \mathcal{G} \\ A & \rightarrow A^{-1} \end{cases}$ est un homéomorphisme

Corollaire 6.3. Si Φ_1 et Φ sont dans \mathcal{D} , si $\lambda \in \rho(\Phi)$ et si $\|\Phi - \Phi_1\|_v < \frac{1}{4}\|R(\lambda, \Phi)\|_v^{-1}$ alors $\lambda \in \rho(\Phi_1)$ et :

$$R(\lambda, \Phi_1) = R(\lambda, \Phi) \sum_{n=0}^{\infty} [(\Phi - \Phi_1)R(\lambda, \Phi)]^n.$$

Lemme 6.4. Soit U un ouvert de \mathbb{C} vérifiant $\bar{U} \subset \rho(\Phi)$, alors il existe $r > 0$ tel que si $|\theta| < r$, on a : $\bar{U} \subset \rho(\Phi_f(i\theta))$ et pour tout $\lambda \in U$, $R(\lambda, \Phi_f(i\theta))$ est une fonction analytique au voisinage de $\theta = 0$.

Preuve : D'après le corollaire 2, on sait que pour tout $\lambda \in \rho(\Phi)$,

$$\text{si } \|\Phi - \Phi_f(i\theta)\|_v < \frac{1}{4}\|R(\lambda, \Phi)\|_v^{-1} \text{ alors } \lambda \in \rho(\Phi_f(i\theta)).$$

Soit $\bar{U} \subset \rho(\Phi)$, alors pour tout $\lambda \in \bar{U}$, $R(\lambda, \Phi) \in V$ et n'est pas nul.

Comme

$$\lim_{|\lambda| \rightarrow \infty} \|R(\lambda, \Phi)\|_v = \lim_{|\lambda| \rightarrow \infty} \frac{1}{|\lambda|} \|(I - \frac{\Phi}{\lambda})^{-1}\|_v = 0$$

on a alors $\delta = \inf_{\lambda \in \bar{U}} \frac{1}{4}\|R(\lambda, \Phi)\|_v^{-1} > 0$.

Pour tout $\lambda \in \bar{U} \subset \rho(\Phi)$ on a alors :

$$\|\Phi - \Phi_f(i\theta)\|_v < \delta$$

entraîne

$$\|\Phi - \Phi_f(i\theta)\|_v < \frac{1}{4}\|R(\lambda, \Phi)\|_v^{-1}$$

et donc $\lambda \in \rho(\Phi_f(i\theta))$, ainsi $\bar{U} \subset \rho(\Phi_f(i\theta))$.

De plus $R(\lambda, \Phi_f(i\theta)) = R(\lambda, \Phi) \sum_{n=0}^{\infty} [(\Phi - \Phi_f(i\theta))R(\lambda, \Phi)]^n$ est une série qui converge normalement pour $\|\cdot\|_v$ et pour la norme de la convergence uniforme des opérateurs de \mathcal{D} . Comme la fonction $\theta \rightarrow \Phi - \Phi_f(i\theta)$ est analytique au voisinage de 0, on en déduit alors que $\theta \rightarrow R(\lambda, \Phi_f(i\theta))$ est analytique pour tout $\lambda \in U$ dès que $\|\Phi - \Phi_f(i\theta)\|_v < \delta$. Cette condition, à cause de [P1] et [P4] revient à $|\theta| < r$. D'où le lemme 3.

Lemme 6.5. Soit g un élément de $\mathcal{F}(\Phi)$, alors il existe un réel $r > 0$ tel que pour tout $|\theta| < r$, $g \in \mathcal{F}(\Phi_f(i\theta))$ et $g(\Phi_f(i\theta))$ est un opérateur qui dépend analytiquement de θ au voisinage de $\theta = 0$.

Preuve : Soit U un voisinage de $\sigma(\Phi)$ sur lequel g est analytique. Soit U_1 un voisinage de $\sigma(\Phi)$ dont la frontière B est constituée d'un nombre fini d'arcs de Jordan orientés positivement et tel que $U_1 \cup B \subseteq U$. D'après le lemme 3, il existe un réel $r > 0$ tel que $|\theta| < r$ entraîne $\theta \rightarrow R(\lambda, \Phi_f(i\theta))$ est une fonction analytique le long de B et la série $R(\lambda, \Phi_f(i\theta)) = R(\lambda, \Phi) \sum_{n=0}^{\infty} [(\Phi - \Phi_f(i\theta))R(\lambda, \Phi)]^n$ converge uniformément pour la topologie de la convergence uniforme des opérateurs de \mathcal{D} et normalement dans $(V, \|\cdot\|_v)$.

Ainsi $g(\Phi_f(i\theta)) = \frac{1}{2i\pi} \int_B g(\lambda)R(\lambda, \Phi_f(i\theta))d\lambda$ se développe au voisinage de 0 en une série entière en θ et donc $g(\Phi_f(i\theta))$ est un opérateur qui dépend analytiquement de θ si $|\theta| < r$.

Preuve de la proposition (6.1.)

Les points $(\lambda_k)_{1 \leq k \leq p}$ sont des points isolés du spectre de Φ , il existe donc pour tout k , $r_k > 0$ tel que :

$$B(\lambda_k, r_k) \cap \sigma(\Phi) = \{\lambda_k\},$$

on prend par exemple $r_k = \inf\{\frac{1-\rho(\psi)}{3}, \frac{|\lambda_k - \lambda_j|}{2} \text{ } j \neq k\}$. Ainsi les cercles $(C(\lambda_k, r_k))_k$ et $C(0, \frac{2\rho(\psi)+1}{3}) = C(0, \rho_2)$ sont entièrement contenus dans $\rho(\Phi)$. On note B la réunion de tous ces cercles, c'est une courbe constituée d'un nombre fini d'arcs rectifiables de Jordan, on va supposer que B est orientée positivement.

On peut alors définir les projections par :

- Soit n_k une fonction analytique dans un voisinage de $\sigma(\Phi)$, qui vaut 1 sur $B(\lambda_k, r_k)$ et 0 sur le reste de $\sigma(P)$, alors d'après le lemme 4, il existe $\alpha_k > 0$ tel que $|\theta| < \alpha_k$ entraîne : $n_k \in \mathcal{F}(\Phi_f(i\theta))$ et $n_k(\Phi_f(i\theta))$ est analytique en θ .

On a alors pour $|\theta| < \alpha_k$.

$$n_k(\Phi_f(i\theta)) = \Phi_k(i\theta) = \frac{1}{2i\pi} \int_B n_k(\lambda)R(\lambda, \Phi_f(i\theta))d\lambda = \frac{1}{2i\pi} \int_{C(\lambda_k, r_k)} R(\lambda, \Phi_f(i\theta))d\lambda.$$

- Soit m une fonction analytique dans un voisinage de $\sigma(\Phi)$ qui vaut 1 sur $B(0, \rho_2)$ et 0 sur le reste de $\sigma(\Phi)$, de même il existe $\alpha > 0$ tel que $m \in \mathcal{F}(\Phi_f(i\theta))$ et $m(\Phi_f(i\theta))$ est analytique en θ si $|\theta| < \alpha$. On a alors pour $|\theta| < \alpha$:

$$m(\Phi_f(i\theta)) = M(i\theta) = \frac{1}{2i\pi} \int_B m(\lambda)R(\lambda, \Phi_f(i\theta))d\lambda = \frac{1}{2i\pi} \int_{C(0, \rho_2)} R(\lambda, \Phi_f(i\theta))d\lambda.$$

On a alors pour $|\theta| < \theta_0 = \inf\{\alpha_k \text{ } 1 \leq k \leq p, \alpha\}$

$$M(i\theta)\Phi_k(i\theta) = \Phi_k(i\theta)M(i\theta) = 0 \text{ pour } 1 \leq k \leq p.$$

De plus pour $|\theta| < \theta_0$ on peut écrire :

$$I = \Phi_1(i\theta) + \Phi_2(i\theta) + \dots + \Phi_p(i\theta) + M(i\theta)$$

où les fonctions $\theta \rightarrow \Phi_k(i\theta)$ et $\theta \rightarrow M(i\theta)$ sont analytiques en θ et $\Phi_k(0) = \Phi_k$.

Il existe $0 < b_k \leq \theta_0$ tel que $|\theta| < b_k$ entraîne $\dim \Phi_k(i\theta)(V) = \dim \Phi_k(V) = 1$.

En effet, il existe $0 < b_k \leq \theta_0$ tel que :

$$|\theta| < b_k \Rightarrow \|\Phi_k(i\theta) - \Phi_k\|_v < 1$$

car $\Phi_k(0) = \Phi_k$ et $\theta \rightarrow \Phi_k(i\theta)$ est analytique en θ .

On suppose que $\dim \Phi_k(i\theta)(V) \geq 2$, alors il existe h_1 et h_2 dans $\Phi_k(i\theta)(V)$ qui sont linéairement indépendantes. Comme $\dim \Phi_k(V) = 1$, il existe un scalaire λ tel que : $\Phi_k(h_1) = \lambda \Phi_k(h_2)$ et on pose $h = h_1 - \lambda h_2$. h n'est pas nulle et appartient à V .

Comme on a : $[\Phi_k - \Phi_k(i\theta)](h) = -h$, la condition $\|\Phi_k - \Phi_k(i\theta)\|_v < 1$ n'est pas valable.

Donc si $|\theta| < b_k$ on a $\dim \Phi_k(i\theta)(V) = 1$.

Soit g_k une base $\Phi_k(V)$, il existe $0 < \bar{b}_k \leq b_k$ tel que $|\theta| < \bar{b}_k$ implique $\Phi_k(i\theta)(g_k)$ est une base de $\Phi_k(i\theta)(V)$. En effet $\Phi_k(g_k) = g_k$ qui n'est pas nulle en $\theta = 0$ donc elle n'est pas nulle dans un voisinage de 0 car $\theta \rightarrow \Phi_k(i\theta)$ est analytique en θ . $\Phi_k(i\theta)(g_k)$ est donc bien une base de $\Phi_k(i\theta)(V)$ si $|\theta| < \bar{b}_k$.

On a alors pour $|\theta| < \bar{b}_k$:

$$\Phi_f(i\theta)[\Phi_k(i\theta)(g_k)] = \Phi_k(i\theta)[\Phi_f(i\theta)(g_k)] = \lambda_k(i\theta)\Phi_k(i\theta)(g_k).$$

La fonction $\theta \rightarrow \lambda_k(i\theta)$ vaut λ_k en 0 et est analytique en θ comme produit de fonctions analytiques en θ . On en déduit alors qu'il existe $0 < \bar{\bar{b}}_k \leq \bar{b}_k$ tel que $\lambda_k(i\theta) \in B(\lambda_k, r_k)$ si $|\theta| < \bar{\bar{b}}_k$.

On a alors démontré que $\lambda_k(i\theta)$ est une valeur propre de $\Phi_f(i\theta)$ et que l'espace propre associé $\Phi_k(i\theta)(V)$ est de dimension 1 pour $|\theta| \leq \bar{\bar{b}}_k$.

On pose alors $a = \inf\{\bar{\bar{b}}_k, 1 \leq k \leq p\} > 0$. Pour $|\theta| < a$, on a :

$$\Phi_k(i\theta)\Phi_j(i\theta) = 0 \text{ si } k \neq j.$$

On pose maintenant $\psi_f(i\theta) = M(i\theta)\Phi_f(i\theta) = \Phi_f(i\theta)M(i\theta)$. Pour $|\theta| < a$, la fonction $\theta \rightarrow \psi_f(i\theta)$ est analytique en θ comme composée de fonctions analytiques en θ et on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$|\theta| < a \Rightarrow \Phi_f^n(i\theta)(g) = \sum_{k=1}^p \lambda_k^n(i\theta)\Phi_k(i\theta)(g) + \psi_f^n(i\theta)(g), \text{ si } g \text{ est dans } V.$$

On a $\psi_f(i\theta) = \Phi_f(i\theta)M(i\theta)$.

Comme $\Phi_f(i\theta) = \frac{1}{2i\pi} \oint_B \lambda R(\lambda, \Phi_f(i\theta)) d\lambda$, on en déduit que

$$\begin{aligned} \psi_f(i\theta) &= \frac{1}{2i\pi} \oint_B \lambda R(\lambda, \Phi_f(i\theta)) M(i\theta) d\lambda \\ &= \frac{1}{2i\pi} \oint_{C(0, \rho_2)} \lambda R(\lambda, \Phi_f(i\theta)) d\lambda \end{aligned}$$

car le long de $C(\lambda_k, r_k)$, $R(\lambda, \Phi_f(i\theta)) M(i\theta) = 0$

le long de $C(0, \rho_2)$, $R(\lambda, \Phi_f(i\theta)) M(i\theta) = R(\lambda, \Phi_f(i\theta))$.

On a donc de même pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\psi_f^n(i\theta) = \frac{1}{2i\pi} \oint_{C(0, \rho_2)} \lambda^n R(\lambda, \Phi_f(i\theta)) d\lambda = \frac{1}{2\pi} \rho_2^{n+1} \int_0^{2\pi} e^{i\alpha(n+1)} R(\rho_2 e^{i\alpha}, \Phi_f(i\theta)) d\alpha.$$

Alors :

$$\|\psi_f^n(i\theta)(h)\|_v \leq \frac{\rho_2^{n+1}}{2\pi} \int_0^{2\pi} \|R(\rho_2 e^{i\alpha}, \Phi_f(i\theta))(h)\|_v d\alpha.$$

Mais $R(\rho_2 e^{i\alpha}, \Phi_f(i\theta))(h)$ vaut 0 en $\theta = 0$.

Comme $\theta \rightarrow R(\rho_2 e^{i\alpha}, \Phi_f(i\theta))$ est un opérateur analytique pour tout $\alpha \in [0, 2\pi]$ on en déduit que :

$$\|R(\rho_2 e^{i\alpha}, \Phi_f(i\theta))\|_v \leq C|\theta|$$

où

$$C = \sup_{\substack{\alpha \in [0, 2\pi] \\ |\theta| < \alpha}} \|R(\rho_2 e^{i\alpha}, \Phi) \left(\frac{\Phi - \Phi_f(i\theta)}{\theta} \right) R(\rho_2 e^{i\alpha}, \Phi_f(i\theta))\|_v < \infty$$

car $\theta \rightarrow \frac{\Phi - \Phi_f(i\theta)}{\theta}$ est analytique en θ . Alors :

$$\|\psi_f^n(i\theta)(h)\| < \int_0^{2\pi} C|\theta| d\alpha \frac{\rho_2^{n+1}}{2\pi} = C \rho_2^{n+1} |\theta|.$$

Ce qui termine la preuve de la proposition (6.1.).

On peut alors démontrer le :

7. Théorème limite central

On fixe f un élément de V , à valeurs réelles, on suppose quitte à lui enlever une constante que $\mu(f) = m(f \cdot h) = 0$. On veut étudier le comportement de la somme $= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} f \circ T^k$. On va d'abord démontrer le résultat capital de cette partie.

Proposition 7.1. *La suite $M_N = \int_0^1 (\frac{S_N f}{\sqrt{N}})^2 h dm$ est convergente dans \mathbb{R}_+ , soit σ^2 sa limite. On a les équivalences suivantes.*

$$\begin{aligned} \sigma^2 = 0 &\Leftrightarrow f = u - u \circ T \text{ dans } L^2(hm) \cdot u \in L^2(hm) \text{ } u \cdot h \in V \\ &\Leftrightarrow f \cdot h = u \cdot h - u \circ T \cdot h \text{ dans } V. \end{aligned}$$

Preuve. Elle se fait en plusieurs étapes.

1ère étape : On démontre l'existence de la limite de la suite $(M_N)_{N>0}$

$$\begin{aligned} M_N &= \int_0^1 (\frac{S_N f}{\sqrt{N}})^2 h dm = \frac{1}{N} \langle S_N f, S_N f \rangle_{hm} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{\ell=0}^{N-1} \langle f \circ T^k, f \circ T^\ell \rangle_{hm} \\ &= \frac{1}{N} \left[N \langle f, f \rangle_{hm} + 2 \sum_{k=1}^{N-1} (N-k) \langle f \circ T^k, f \rangle_{hm} \right] \end{aligned}$$

car la mesure hm est invariable par T .

On désigne par P l'opérateur adjoint de T par rapport à la mesure hm dans l'espace de Hilbert $L^2(hm)$, P est défini par l'égalité :

$$\langle P f, g \rangle_{hm} = \langle f, g \circ T \rangle_{hm} \quad f, g \in L^2(hm).$$

Les deux remarques suivantes vont permettre de donner la décomposition spectrale de P au point f .

Remarque 1 : Si f et g sont dans V , alors P est aussi l'opérateur adjoint de T pour la dualité $L^1(hm) - L^\infty(hm)$.

Remarque 2 : Si f est dans V , donc dans $L^1(hm)$ et $L^2(hm)$ on a :

$$P f \cdot h = \Phi(f \cdot h) \quad m\text{-p.p.}$$

et donc

$$P f = \frac{\Phi(f \cdot h)}{h} 1_{\{h \neq 0\}} \quad hm\text{-p.p.}$$

Comme $f \in V$, on en déduit que pour tout $k > 0$, on a :

$$\begin{aligned} P^k f &= \Phi^k \frac{(f \cdot h)}{h} 1_{\{h \neq 0\}} = m(f \cdot h) 1_{\{h \neq 0\}} \\ &+ \sum_{j=2}^p \lambda_j^k \Phi_j \frac{(f \cdot h)}{h} 1_{\{h \neq 0\}} + \frac{\psi^k(f \cdot h)}{h} 1_{\{h \neq 0\}} \\ P^k f &= \sum_{j=2}^p \lambda_j^k \Phi_j \frac{(f \cdot h)}{h} 1_{\{h \neq 0\}} + \frac{\psi^k(f \cdot h)}{h} 1_{\{h \neq 0\}} \end{aligned}$$

où $\|\frac{\psi^k(f \cdot h)}{h} 1_{\{h \neq 0\}}\|_{1, hm} \leq \|\psi^k(f \cdot h)\|_v \leq \rho^k \|f \cdot h\|_v \leq C_f \rho^k \|f\|_{1, hm}$ avec $0 < \rho < 1$.

$$\text{car } \|fh\|_v = \|f \cdot h\|_1 + v(f \cdot h) = \|f\|_{1, hm} + v(f \cdot h).$$

$v(f \cdot h)$ étant fini, il existe donc une constante $C_f \geq 1$ telle que $v(f \cdot h) \leq (C_f - 1)\|f\|_{1, hm}$

Ainsi :

$$\begin{aligned} M_N &= \langle f, f \rangle_{hm} + 2 \sum_{k=1}^{N-1} \left(1 - \frac{k}{N}\right) \langle f \circ T^k, f \rangle_{hm} \\ &= -\langle f, f \rangle_{hm} + 2 \sum_{k=0}^{N-1} \left(1 - \frac{k}{N}\right) \langle f, P^k f \rangle_{hm} \\ &= -\langle f, f \rangle_{hm} + 2 \left\langle \sum_{k=0}^{N-1} \left(1 - \frac{k}{N}\right) P^k f, f \right\rangle_{hm} \end{aligned}$$

Maintenant, on démontre que la suite $(\sum_{k=0}^{N-1} (1 - \frac{k}{N}) P^k f)_{N>0}$ converge dans $L^1(hm)$.

D'après la décomposition spectrale, on a :

$$\sum_{k=0}^{N-1} \left(1 - \frac{k}{N}\right) P^k f = \sum_{k=0}^{N-1} \left(1 - \frac{k}{N}\right) \left[\sum_{j=2}^p \lambda_j^k \Phi_j(f \cdot h) + \psi^k(f \cdot h) \right] \frac{1}{h} 1_{\{h \neq 0\}}.$$

Comme $\sum_{k=0}^{N-1} \lambda_j^k = \frac{1 - \lambda_j^N}{1 - \lambda_j}$ et comme $\sum_{k=0}^{N-1} k \lambda_j^k = -\frac{N \lambda_j^N}{1 - \lambda_j} - \frac{1 - \lambda_j^N}{(1 - \lambda_j)^2}$ alors :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{N-1} \left(1 - \frac{k}{N}\right) P^k f &= \sum_{j=2}^p \left[\frac{1}{1 - \lambda_j} + \frac{1}{N} \frac{1 - \lambda_j^N}{(1 - \lambda_j)^2} \right] \frac{\Phi_j(f \cdot h)}{h} 1_{\{h \neq 0\}} \\ &+ \sum_{k=0}^{N-1} \frac{\psi^k(f \cdot h)}{h} 1_{\{h \neq 0\}} - \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} k \frac{\psi^k(f \cdot h)}{h} 1_{\{h \neq 0\}}. \end{aligned}$$

Comme $\|\frac{\psi^k(f \cdot h)}{h} 1_{\{h \neq 0\}}\|_{1, hm} \leq C_f \rho^k \|f\|_{1, hm}$, on en déduit que les suites $\sum_{k=0}^{N-1} \frac{\psi^k(f \cdot h)}{h}$ et $\sum_{k=0}^{N-1} k \frac{\psi^k(f \cdot h)}{h} 1_{\{h \neq 0\}}$ sont convergentes dans $L^1(hm)$.

Comme $\lim_{N \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{1 - \lambda_j} + \frac{1}{N} \frac{1 - \lambda_j^N}{(1 - \lambda_j)^2} \right] = \frac{1}{1 - \lambda_j}$, on en déduit la convergence dans $L^1(hm)$ de la suite $\sum_{k=0}^{N-1} (1 - \frac{k}{N}) P^k f$, soit $G \in L^1(hm)$ sa limite. G vérifie $(I - P)G = f$. G vaut d'ailleurs $\frac{1}{h} \left[\sum_{j=2}^p \frac{1}{1 - \lambda_j} \Phi_j(fh) + \sum_{k=0}^{\infty} \psi^k(fh) \right] 1_{\{h \neq 0\}}$.

Exactement de la même façon, on montre que $h \cdot \sum_{k=0}^{N-1} (1 - \frac{k}{N}) P^k f$ converge dans V , sa limite vaut $G \cdot h$.

Ainsi on en déduit que la suite M_N admet une limite dans \mathbb{R}_+ et $\sigma^2 = -\langle f, f \rangle_{hm} + 2\langle G, f \rangle_{hm}$ avec $G \in L^1(hm)$ $Gh \in V$ et $(I - P)G = f$. On a aussi :

$$\sigma^2 = 2 \left[\sum_{j=2}^p \frac{1}{1 - \lambda_j} \langle \Phi_j(fh), f \rangle_m + \sum_{k=0}^{\infty} \langle \psi^k(fh), f \rangle_m \right] - \langle f, f \rangle_{hm}.$$

2ème étape : On suppose que $\sigma^2 = 0$, on montre les deux assertions annoncées.

Lemme 7.2. *La suite $(S_N f)_{N>0}$ est uniformément bornée dans $L^2(hm)$ en N .*

Preuve.

$$\begin{aligned} \|S_N f\|_{2,hm}^2 &= NM_N \\ &= 2N \sum_{k=N}^{+\infty} \langle \psi^k(fh), f \rangle_m - 2 \sum_{k=0}^{N-1} k \langle \psi^k(fh), f \rangle_m \\ &\quad + \sum_{j=2}^p \frac{1 - \lambda_j^N}{1 - \lambda_j} \langle \Phi_j(fh), f \rangle_m \text{ car } \sigma^2 = 0 \end{aligned}$$

On a :

$$\begin{aligned} |\langle \psi^k(fh), f \rangle_m| &= \left| \int_0^1 \psi^k(fh) \cdot f dm \right| \leq \|\psi^k(fh)\|_v \cdot \|f\|_1 \\ &\leq C \rho^k \text{ où } 0 < \rho < 1 \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} \left| N \sum_{k=N}^{+\infty} \langle \psi^k(fh), f \rangle_m \right| &\leq CN \frac{\rho^N}{1 - \rho} \\ \left| \sum_{k=0}^{N-1} k \langle \psi^k(fh), f \rangle_m \right| &\leq C \sum_{k=0}^{N-1} k \rho^k = C \left[\frac{1 - \rho^N}{(1 - \rho)^2} - \frac{N \rho^N}{1 - \rho} \right] \end{aligned}$$

λ_j est de module 1 donc $|1 - \lambda_j^N| \leq 2$.

$$\text{Ainsi : } \|S_N f\|_{2,hm}^2 \leq \frac{2C}{(1-\rho)^2} + 2 \sum_{j=2}^p \frac{1}{(1-\lambda_j)^2} |\langle \Phi_j(fh), f \rangle_m| \leq r^2.$$

Lemme 7.3. *Pour tout $g \in L^2(hm)$ on a $\lim_{N \rightarrow \infty} \langle S_N f, g \rangle_{nm} = \langle S, g \rangle_{hm}$ où $S \in L^2(hm) \cap L^1(hm)$, $m(S \cdot h) = \mu(S) = 0$.*

Preuve : D'après le lemme 1, la suite $(S_N f)_{N>0}$ est une suite d'éléments de $L^2(hm)$ qui est uniformément bornée par r . L'espace $L^2(hm)$ est réflexif, la suite $(S_N f)_{N>0}$ est donc faiblement convergente dans $L^2(hm)$, on appelle S sa limite faible. Alors pour tout $g \in L^2(hm)$, on en déduit que :

$$\langle S, 1 \rangle_{hm} = \lim_{N \rightarrow \infty} \langle S_N f, 1 \rangle_{hm}.$$

Or

$$\langle S_N f, 1 \rangle = \sum_{k=0}^{N-1} \langle f \circ T^k, 1 \rangle_{hm} = N \langle f, 1 \rangle_{hm} = 0$$

Donc $\langle S, 1 \rangle_{hm} = m(S h) = \mu(S) = 0$.

Comme la fonction signe de S est dans $L^2(hm)$ on en déduit que $m(|S|h) < \infty$ donc que $S \in L^1(hm)$.

Lemme 7.4. $f = S - S \circ T$ dans $L^2(hm)$.

Preuve : Pour tout $N > 0$ on a $f - f \circ T^N = S_N f - S_N f \circ T$.

Donc, pour tout $g \in L^2(hm)$, on a :

$$\begin{aligned} \langle f - f \circ T^N, g \rangle_{hm} &= \langle S_N f - S_N f \circ T, g \rangle_{hm} \\ &= \langle S_N f, g \rangle_{hm} - \langle S_N f \circ T, g \rangle_{hm} \\ &= \langle S_N f, g \rangle_{hm} - \langle S_N f, P g \rangle_{hm} \end{aligned}$$

On en déduit que :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \langle f - f \circ T^N, g \rangle_{hm} = \langle S, g \rangle_{hm} - \langle S, P g \rangle_{hm}$$

donc

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \langle f \circ T^N, g \rangle_{hm} = -\langle S, g \rangle_{hm} + \langle S \circ T, g \rangle_{hm} + \langle f, g \rangle_{hm}$$

Or $\langle f \circ T^N, g \rangle_{hm} = \langle f \circ T^N, g \cdot h \rangle_m$.

D'abord si $g \cdot h$ est dans V on a : $\langle f \circ T^N, g \rangle_{hm} = \langle f, \Phi^N(g \cdot h) \rangle_m$ que l'on peut décomposer :

$$\begin{aligned} \langle f \circ T^N, g \rangle_{hm} &= \sum_{j=2}^p \lambda_j^N \langle \Phi_j(g \cdot h), f \rangle_m + m(gh) \langle h, f \rangle_m \\ &\quad + \langle \psi^N(g \cdot h), f \rangle_m \\ &= \sum_{j=2}^p \lambda_j^N \langle \Phi_j(g \cdot h), f \rangle_m + \langle \psi^N(g \cdot h), f \rangle_m \end{aligned}$$

on a $\lim_{N \rightarrow \infty} \langle \psi^N(g \cdot h), f \rangle_m = 0$ car ψ a un rayon spectral $\rho < 1$. La quantité $\sum_{j=2}^p \lambda_j^N \langle \Phi_j(g \cdot h), f \rangle_m$ "tourne" quand N varie, elle est bornée et admet une limite, elle est donc nulle.

Maintenant si $g \cdot h$ n'est pas dans V , gh est donc simplement dans $L^2(hm)$. V est dense dans $L^2(hm)$, il existe donc une suite d'éléments de V qui approche uniformément $g \cdot h$ dans $L^2(hm)$. Le même raisonnement prouve que $\lim_{N \rightarrow \infty} \langle f \circ T^N, g \rangle_{hm} = 0$.

Ainsi pour tout $g \in L^2(hm)$ on a :

$$\langle f, g \rangle_{hm} = \langle S - S \circ T, g \rangle_{hm}.$$

Donc $f = S - S \circ T$ dans $L^2(hm)$.

Maintenant on veut calculer explicitement S .

Lemme 7.5. $P(S \circ T) = S$ dans $L^2(hm)$.

Preuve : On sait que $S \in L^2(hm)$ donc $S \circ T \in L^2(hm)$ car $\int_I (S \circ T)^2 hdm = \int_I S^2 \circ T \cdot hdm = \int_I S^2 \cdot hdm < \infty$.

Par définition de P on a pour tout $g \in L^2(hm)$

$$\langle P(S \circ T), g \rangle_{hm} = \langle S \circ T, g \circ T \rangle_{hm} = \langle S, g \rangle_{hm}$$

et donc $P(S \circ T) = S$ dans $L^2(hm)$

Lemme 7.6. $S = -G + f$ dans $L^1(hm)$ et $S \cdot h = (f - G) \cdot h$ dans V .

Preuve : Du lemme 7.5., on déduit que pour tout $N > 0$, on a :

$$\sum_{k=1}^N P^k f = P^N S - S.$$

Dans $L^1(hm)$, la suite $\sum_{k=1}^N P^k f$ est convergente, sa limite est $G - f + S$ est aussi dans $L^1(hm)$.

On en déduit que $P^N S = \sum_{k=1}^N P^k f + S$ admet pour limite dans $L^1(hm)$ $G - f + S$. D'autre part, comme on peut approcher S par une suite d'éléments de V de mesure nulle on en déduit que $\lim P^N S = 0$ dans $L^1(hm)$.

Donc $S = f - G$ dans $L^1(hm) \cap L^2(hm)$.

Ainsi $S \cdot h = f \cdot h - G \cdot h$ est dans V .

3ème étape : On démontre la réciproque.

Si $f = u \circ T - u$ $u \in L^2(hm), u \cdot h \in V$.

Alors $S_N f = u \circ T^N - u$.

Donc $\int_0^1 (\frac{1}{\sqrt{N}} S_N f)^2 hdm = \frac{1}{N} \int_0^1 (u^2 \circ T^N - 2u \circ T^N \cdot u + u^2) hdm$ qui tend bien vers 0 quand N tend vers $+\infty$ donc $\sigma^2 = 0$.

On peut alors démontrer le théorème limite central.

Définition : On dit que f vérifie l'hypothèse (H) si :

* $f \in V, \mu(f) = 0$

* il existe $u \in L^2(hm), u \cdot h \in V$ tel que $f = u - u \circ T$ dans $L^2(hm)$ ou $f \cdot h = u \cdot h - u \circ T \cdot h$ dans V .

Théorème 7.7. Si $f - \mu(f)$ ne vérifie pas (H), alors pour tout réel v , on a :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mu \left[\frac{S_N f - N \mu(f)}{\sigma \sqrt{N}} \leq v \right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^v e^{-t^2/2} dt.$$

La preuve de ce théorème se fait en plusieurs étapes.

1ère étape : On montre que $\lambda'_1(0) = \mu(f)$.

On a :

$$\begin{aligned} \int_0^1 \exp(i\theta S_n f) \cdot h dm &= \int_0^1 \Phi^n(\exp(i\theta S_n f) \cdot h) dm = \int_0^1 \Phi_f^n(i\theta)(h) dm \\ &= \sum_{k=1}^p \lambda_k^n(i\theta) \int_0^1 \Phi_k(i\theta)(h) dm + \int_0^1 \psi^n(i\theta)(h) dm \end{aligned}$$

pour tout $|\theta| < a$ d'après la proposition 6.1. avec toutes les fonctions écrites analytiques en θ .

On fixe t dans \mathbb{R} , alors pour n suffisamment grand, on a : $|\frac{t}{n}| < a$.

Alors

$$\int_0^1 \exp(it \frac{S_n f}{n}) \cdot h dm = \sum_{k=1}^p \lambda_k^n(\frac{it}{n}) \int_0^1 \Phi_k(\frac{it}{n})(h) dm + \int_0^1 \psi^n(\frac{it}{n})(h) dm.$$

On peut alors développer $\int_0^1 \exp(it \frac{S_n f}{n}) \cdot h dm$:

$$\begin{aligned} \lambda_k^n(\frac{it}{n}) &= [\lambda_k + \frac{it}{n} \lambda'_k(0) - \frac{t^2}{2n^2} \lambda''_k(0) + \frac{t^2}{n^2} \epsilon(\frac{it}{n})]^n \text{ avec } \lim_{n \rightarrow \infty} \epsilon(\frac{it}{n}) = 0 \\ &= \lambda_k^n \exp(it \frac{\lambda'_k(0)}{\lambda_k}) \left[1 - \frac{t^2}{2n} \left(\frac{\lambda''_k(0)}{\lambda_k} - \frac{\lambda_k'^2(0)}{\lambda_k^2} \right) + \frac{t^2}{n^2} \bar{\epsilon}(\frac{it}{n}) \right] \end{aligned}$$

$\Phi_k(\frac{it}{n}) = \Phi_k + \frac{it}{n} \Phi_k^{(1)} + \frac{it}{n} \epsilon(\frac{it}{n})$ où $\Phi_k^{(1)}$ et $\epsilon(\frac{it}{n})$ sont des opérateurs bornés de V et où $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\epsilon(\frac{it}{n})\|_v = 0$.

Alors :

$$\int_0^1 \Phi_k(\frac{it}{n})(h) dm = \int_0^1 \Phi_k(h) dm + \frac{it}{n} \int_0^1 \Phi_k^{(1)}(h) dm + \frac{it}{n} \bar{\epsilon}(\frac{it}{n}),$$

$$\text{avec } \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{\epsilon}(\frac{it}{n}) = 0 \text{ et } \int_0^1 \Phi_k(h) dm = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq 1 \\ 1 & \text{si } k = 1. \end{cases}$$

On obtient alors :

$$\begin{aligned} \int_0^1 \exp(it \frac{S_n f}{n}) h dm &= \exp(it \lambda'_1(0)) + \frac{it}{n} \left[\int_0^1 \Phi_1^{(1)}(h) dm \cdot \exp(it \lambda'_1(0)) \right. \\ &\quad - \frac{t}{2} (\lambda''_1(0) - \lambda_1'^2(0)) \exp(it \lambda'_1(0)) \\ &\quad \left. + \sum_{k=2}^p \lambda_k^n \exp(it \frac{\lambda'_k(0)}{\lambda_k}) \int_0^1 \Phi_k^{(1)}(h) dm \right] + \int_0^1 \psi^n(\frac{it}{n})(h) dm + \frac{it}{n} \epsilon(\frac{it}{n}). \end{aligned}$$

Comme $\|\psi^n(\frac{it}{\sqrt{n}})(h)\|_v \leq \frac{t}{n} |C\rho_2^{n+1}|$, on peut passer à la limite dans le second membre, on obtient alors :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \exp(it \frac{S_n f}{n}) h dm = \exp[it\lambda'_1(0)].$$

Mais le théorème de Birkhoff entraîne, comme (T, hm) est un système dynamique ergodique et que f est dans L_m^1 donc dans L_{hm}^1 , que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n f}{n} = \mu(f)$ hm p.p, cette dernière fonction étant hm intégrable on en déduit que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \exp(it \frac{S_n f}{n}) h dm = \exp(it\mu(f)) = \exp(it\lambda'_1(0)).$$

Ainsi pour tout t fixé dans \mathbb{R} , on a $\exp(it\mu(f)) = \exp(it\lambda'_1(0))$. C'est-à-dire $\mu(f) = \lambda'_1(0)$ que l'on suppose pour la suite de la preuve égale à 0.

2ème étape : On démontre que $\sigma^2 = \lambda''_1(0)$.

On remarque d'abord que $\int_0^1 [\frac{S_n f}{\sqrt{n}}]^2 h dm = -\frac{\partial^2}{\partial t^2} [\int_0^1 \exp(\frac{it}{\sqrt{n}} S_n f) h dm]_{t=0}$.

En effet, la fonction $t \rightarrow \exp(it \frac{S_n f}{\sqrt{n}})$ est une fonction analytique pour tout $t \in \mathbb{R}$, elle est uniformément bornée par 1 pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $\frac{\partial^2}{\partial t^2} [\exp(it \frac{S_n f}{\sqrt{n}})] = -(\frac{S_n f}{\sqrt{n}})^2 \exp(it \frac{S_n f}{\sqrt{n}})$ qui est intégrable par rapport à la mesure hm pour tout $t \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, donc $\frac{\partial^2}{\partial t^2} \{ \int_0^1 \exp(it \frac{S_n f}{\sqrt{n}}) h dm \}$ existe et vaut $-\int_0^1 \exp(it \frac{S_n f}{\sqrt{n}}) \cdot (\frac{S_n f}{\sqrt{n}})^2 h dm$. Ainsi on a le résultat annoncé quand on prend $t = 0$. On fixe t dans \mathbb{R} , alors pour n suffisamment grand :

$$\int_0^1 \exp(\frac{it}{\sqrt{n}} S_n f) h dm = \sum_{k=1}^p \lambda_k^n(\frac{it}{\sqrt{n}}) \int_0^1 \Phi_k(\frac{it}{\sqrt{n}})(h) dm + \int_0^1 \psi^n(\frac{it}{\sqrt{n}})(h) dm,$$

on peut alors faire un développement de $\frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_0^1 \exp(\frac{it}{\sqrt{n}} S_n f) h dm$, car toutes les fonctions écrites sont analytiques en $\frac{t}{\sqrt{n}}$.

Pour dériver le premier terme on utilise $(uv)'' = u''v + uv'' + 2u'v'$,

avec $u(t) = \lambda_k^n(\frac{it}{\sqrt{n}})$ et $v(t) = \int_0^1 \Phi_k(\frac{it}{\sqrt{n}})(h) dm$.

$$\begin{aligned} \text{Si } k \neq 1, \quad & v(0) = 0 \\ & u(0) = \lambda_k^n \\ & u'(0) = i\sqrt{n} \lambda_k^{n-1} \lambda'_k(0). \end{aligned}$$

$\Phi_k(\frac{it}{\sqrt{n}})(h) = \frac{it}{\sqrt{n}} \Phi_k^{(1)}(h) - \frac{t^2}{2n} \Phi_k^{(2)}(h) + \frac{t^2}{n} \epsilon(\frac{it}{\sqrt{n}})(h)$ où les opérateurs $\Phi_k^{(1)}$, $\Phi_k^{(2)}$ et $\epsilon(\frac{it}{\sqrt{n}})$ sont des opérateurs bornés de V et $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\epsilon(\frac{it}{\sqrt{n}})\|_v = 0$.

Ainsi :

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} [\lambda_k^n(\frac{it}{\sqrt{n}}) \int_0^1 (\frac{it}{\sqrt{n}})(h) dm] = -\lambda_k^n \frac{1}{n} \int_0^1 \Phi_k^{(1)}(h) dm - 2\lambda_k^{n-1} \lambda'_k(0) \int_0^1 \Phi_k^{(1)}(h) dm.$$

Si $k = 1, v(0) = 1, u(0) = 1, u'(0) = 0, u''(0) = -\lambda_1''(0)$.

$$v'(0) = \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^1 \Phi_1^{(1)}(h) dm \text{ et } v''(0) = \frac{-1}{n} \int_0^1 \Phi_1^{(2)}(h) dm.$$

On sait que $\psi_f^n(\frac{it}{\sqrt{n}})(h) = \frac{1}{2i\pi} \int_{C(0, \rho_2)} \lambda^n R(\lambda, \Phi_t(\frac{it}{\sqrt{n}}))(h) d\lambda$. La fonction $\theta \rightarrow R(\lambda, \Phi(i\theta))$ est analytique si $|\theta| < a$, il existe donc $N > 0$ tel que $n > N$ entraîne que :

$$R(\lambda, \Phi(\frac{it}{\sqrt{n}})) = R(\lambda, \Phi) - \frac{it}{\sqrt{n}} R^{(1)}(\lambda, \Phi) - \frac{t^2}{2n} R^{(2)}(\lambda, \Phi) + \frac{t^2}{n} \bar{R}(\frac{it}{\sqrt{n}})$$

où les opérateurs $R^{(1)}(\lambda, \Phi), R^{(2)}(\lambda, \Phi)$ et $\bar{R}(\frac{it}{\sqrt{n}})(\lambda)$ sont des opérateurs bornés de V et où $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\bar{R}(\frac{it}{\sqrt{n}})(\lambda)\|_v = 0$.

Ainsi $\frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_0^1 \psi_f^n(\frac{it}{\sqrt{n}})(h) dm = \frac{1}{n} \frac{1}{2i\pi} \int_{C(\rho_2, 0)} \lambda^n R^{(2)}(\lambda) d\lambda$ qui tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

Ainsi :

$$\begin{aligned} \int_0^1 (\frac{S_n f}{\sqrt{n}})^2 h dm &= \lambda_1''(0) + 2 \sum_{k=2}^p \lambda_k^{n-1} \lambda_k'(0) \int_0^1 \Phi_k^{(1)}(h) dm \\ &+ \frac{1}{n} [\int_0^1 \Phi_1^{(2)}(h) dm + \sum_{k=2}^p \lambda_k^n \int_0^1 \Phi_k^{(2)}(h) dm] + o(\frac{1}{n}). \end{aligned}$$

Comme $\sigma^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 (\frac{S_n f}{\sqrt{n}})^2 h dm$. Et comme dans le second terme tout a une limite sauf éventuellement le terme borné $2 \sum_{k=2}^p \lambda_k^{n-1} \lambda_k'(0) \int_0^1 \Phi_k^{(1)}(h) dm$ qui "tourne", on en déduit que $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=2}^p \lambda_k^{n-1} \lambda_k'(0) \int_0^1 \Phi_k^{(1)}(h) dm = 0$.

Et donc $\sigma^2 = \lambda_1''(0)$.

3ème étape : On démontre que $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \Phi_f^n(\frac{it}{\sqrt{n}})(h) dm = \exp(\frac{-t^2 \sigma^2}{2})$.

On fixe t dans \mathbb{R} , alors pour n suffisamment grand, on peut écrire d'après la proposition 6.1. :

$$\begin{aligned} \int_0^1 \Phi_f^n(\frac{it}{\sqrt{n}})(h) dm &= \lambda_1^n(\frac{it}{\sqrt{n}}) \int_0^1 \Phi_1(\frac{it}{\sqrt{n}})(h) dm \\ &+ \sum_{k=2}^p \lambda_k^n(\frac{it}{\sqrt{n}}) \int_0^1 \Phi_k(\frac{it}{\sqrt{n}})(h) dm + \int_0^1 \psi_f^n(\frac{it}{\sqrt{n}})(h) dm. \end{aligned}$$

On a : $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \psi_f^n(\frac{it}{\sqrt{n}})(h) dm = 0$ comme dans la 1ère étape.

$$\begin{aligned} [\lambda_1(\frac{it}{\sqrt{n}})]^n &= [1 - \frac{t^2}{2n} \lambda_1''(0) - \frac{it^3}{3n\sqrt{n}} \lambda_1'''(0) + \frac{t^3}{n\sqrt{n}} \epsilon(\frac{it}{\sqrt{n}})]^n \\ &= e^{-t^2 \lambda_1''(0)/2} [1 - \frac{it^3}{\sqrt{n}} \lambda_1'''(0) + \frac{t^3}{\sqrt{n}} \epsilon(\frac{it}{\sqrt{n}})] \text{ avec } \lim_{n \rightarrow \infty} \epsilon(\frac{it}{\sqrt{n}}) = 0 \end{aligned}$$

$$\int_0^1 \Phi_1\left(\frac{it}{\sqrt{n}}\right)(h)dm = 1 + \frac{it}{\sqrt{n}} \int_0^1 \Phi_1^{(1)}(h)dm + \frac{it}{\sqrt{n}} \epsilon\left(\frac{it}{\sqrt{n}}\right). \text{ Pour } k \neq 1,$$

$$\begin{aligned} [\lambda_k\left(\frac{it}{\sqrt{n}}\right)]^n &= \lambda_k^n \left[1 - \frac{it}{\sqrt{n}} \frac{\lambda_k'(0)}{\lambda_k} - \frac{t^2}{2n} \frac{\lambda_k''(0)}{\lambda_k} - \frac{it^3}{6n\sqrt{n}} \frac{\lambda_k'''(0)}{\lambda_k} + \frac{it^3}{n\sqrt{n}} \epsilon\left(\frac{it}{\sqrt{n}}\right)\right]^n \\ &= \lambda_k^n \exp\left[\sqrt{n} \frac{\lambda_k'(0)}{\lambda_k} it\right] \exp\left[-t^2 \frac{\lambda_k''(0)}{\lambda_k} + \frac{2\lambda_k'(0)}{\lambda_k^2}\right] \left[1 - \frac{it^3}{6\sqrt{n}} B_k + \frac{it}{\sqrt{n}} \epsilon\left(\frac{it}{\sqrt{n}}\right)\right] \end{aligned}$$

$$\int_0^1 \Phi_k\left(\frac{it}{\sqrt{n}}\right)(h)dm = \frac{it}{\sqrt{n}} \int_0^1 \Phi_1^{(1)}(h)dm + \frac{it}{\sqrt{n}} \epsilon\left(\frac{it}{\sqrt{n}}\right).$$

D'où :

$$\int_0^1 \Phi_f^n\left(\frac{it}{\sqrt{n}}\right)(h)dm = e^{-t^2 \lambda_1''(0)/2} + \frac{it}{\sqrt{n}} \sum_{k=2}^p \lambda_k^n e^{it \lambda_k'(0) \frac{\sqrt{n}}{\lambda_k}} e^{-t^2 [A_k]} \int_0^1 \Phi_k^{(1)}(h)dm + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

Comme $\theta \rightarrow \lambda_k(i\theta)$ est une fonction analytique tel qu'il existe $a > 0$ tel que $|\theta| < a \Rightarrow |\lambda_k(i\theta)| \leq 1$, on en déduit $\frac{\lambda_k'(0)}{\lambda_k}$ est réel.

En effet : $\lambda_k(i\theta) = \lambda_k \left[1 + i\theta \frac{\lambda_k'(0)}{\lambda_k} - \frac{\theta^2}{2} \frac{\lambda_k''(0)}{\lambda_k} + o(\theta^2)\right]$. On passe au module :

$$1 \geq \left[1 - \theta \operatorname{Im}\left(\frac{\lambda_k'(0)}{\lambda_k}\right) - \frac{\theta^2}{2} \operatorname{Re}\left(\frac{\lambda_k''(0)}{\lambda_k}\right)\right]^2 + \left[\theta \operatorname{Re}\left(\frac{\lambda_k'(0)}{\lambda_k}\right) - \frac{\theta^2}{2} \operatorname{Im}\left(\frac{\lambda_k''(0)}{\lambda_k}\right)\right]^2 + o(\theta^2)$$

d'où

$$1 \geq 1 - 2\theta \operatorname{Im}\left(\frac{\lambda_k'(0)}{\lambda_k}\right) + \theta^2 \left[\left[\operatorname{Re}\left(\frac{\lambda_k'(0)}{\lambda_k}\right)\right]^2 + \left[\operatorname{Im}\left(\frac{\lambda_k'(0)}{\lambda_k}\right)\right]^2 - \operatorname{Re}\left(\frac{\lambda_k''(0)}{\lambda_k}\right)\right] + o(\theta^2)$$

ce qui est possible uniquement si $\operatorname{Im}\left(\frac{\lambda_k'(0)}{\lambda_k}\right) = 0$. Donc on peut passer à la limite et on a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \Phi_f^n\left(\frac{it}{\sqrt{n}}\right)(h)dm = e^{-t^2 \frac{\lambda_1''(0)}{2}} = e^{-t^2 \frac{\sigma^2}{2}}.$$

4ème étape : Conclusion.

On a démontré que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \Phi_f^n\left(\frac{it}{\sqrt{n}}\right)(h)dm = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \exp\left(\frac{it}{\sqrt{n}} S_n f\right) h dm = e^{-t^2 \frac{\sigma^2}{2}}.$$

On a donc aussi : $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \exp\left(it \frac{S_n f}{\sigma \sqrt{n}}\right) h dm = e^{-\frac{t^2}{2}}$ qui est la transformée de Fourier de la loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$. Le théorème de Paul Lévy entraîne alors la convergence en loi de $\frac{S_n f}{\sigma \sqrt{n}}$ vers la loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$.

Donc pour tout $v \in \mathbb{R}$ on a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu\left[\frac{S_n f}{\sigma \sqrt{n}} \leq v\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^v e^{-\frac{u^2}{2}} du$$

où μ désigne la mesure hm .

8. Diverses remarques à propos de la condition H.

Pratiquement, pour appliquer le théorème central limite à une fonction f , on doit être capable de décider si elle vérifie l'hypothèse H ou non.

Dans le cas particulier où le système (T, μ) est faiblement mélangeant (Φ n'admet que 1 comme valeur propre de module 1) et si f est l'indicatrice d'un borélien on a :

Proposition 8.1. *Si $f = 1_A$, $A \in \mathcal{B}$ et (T, μ) est faiblement mélangeant, la condition $f = \phi - \phi \circ T + \mu(A)$ (partout) équivaut à $\mu(A) = 1$ ou 0.*

Preuve :

$$\text{On a } e^{2if\pi} = e^{2i1_A\pi} = 1 = e^{i\phi} e^{2i\pi\phi \circ T} e^{2i\pi\mu(A)}.$$

$$\text{D'où : } e^{2i\pi\phi} \circ T = e^{2i\pi\phi} e^{2i\pi\mu(A)}.$$

Comme les valeurs propres d'une contraction (Φ) sont les mêmes que celles de son adjoint ($f \rightarrow f \circ T$), on en déduit alors que : $e^{2i\pi\mu(A)} = 1$ donc $\mu(A) = 1$ ou 0.

Dans le cas où f est une fonction continue sauf en un nombre dénombrable (au plus) de points de $I : \mathcal{T}_f$, on peut préciser H.

Si $f = u - u \circ T$ hm-p.p ($\mu(f) = 0$), la proposition 7.1. et le lemme 7.6. donnent la valeur de u :

$$u = s = \frac{1}{h} \left[\sum_{j=1}^{\infty} \psi^j(hf) + \sum_{k=2}^p \frac{1}{1 - \lambda_k} \Phi_k(fh) \right] 1_{\{h \neq 0\}}.$$

On peut maintenant trouver les points de discontinuité de u , ils correspondent aux points de discontinuité de h , de $(\psi^j(fh))_{j \in \mathbf{N}^*}$ et de $(\Phi_k(fh))_{2 \leq k \leq p}$ [ce sont les points de discontinuité de $(\Phi^j(fh))_{j \geq n_0}$ car $\Phi_k(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=n_0}^{n+n_0-1} \Phi^j(fh)_{\lambda_k^j}$ on utilise ici le fait que si $f_n \rightarrow f$ dans V alors $f_n \rightarrow f$ uniformément sur I].

Points de discontinuité de h , h est définie comme la limite dans V de la suite $\frac{1}{n} \sum_{j=n_0}^{n+n_0-1} \Phi^k(1)$, ses points de discontinuité sont donc ceux des fonctions $(\Phi^k(1))$. On a : $\Phi(1)(x) = \sum_{j \in J} \phi_j(x) \chi_j(x)$, la fonction $x \rightarrow \phi_j(x)$ étant continue sur I , les points de discontinuité de $\Phi(1)$ sont donc les $\{T(a_j), j \in J\}$. L'ensemble des sauts de h est donc $\mathcal{T}_h = \{T^n(a_j) | j \in J, n \geq 1\}$.

Points de discontinuité de $\Phi(fh)$, on a $\Phi(fh)(x) = \sum_{j \in J} (fh) \sigma_j(x) \phi_j(x) \chi_j(x)$. Les sauts de $\Phi(fh)$ sont alors les sauts de $(f\sigma_j)_{j \in J}$ donc l'ensemble $T(\mathcal{T}_f)$, ceux de $(h\sigma_j)_{j \in J}$ donc $T(\mathcal{T}_h)$ et l'ensemble $\{T(a_j)\}_{j \in J}$.

Donc $\mathcal{T}_{\Phi(fh)} = T(\mathcal{T}_h \cup \mathcal{T}_f \cup \{a_j\}_{j \in J})$.

Alors les sauts de Φ_k sont dans l'ensemble $\cup_{n \geq n_0} T^n[\mathcal{T}_h \cup \mathcal{T}_f \cup \{a_j\}_{j \in J}]$.

Comme $\psi^j(fh) = \Phi^j(fh) - \lambda_2^n \Phi_2(fh) - \dots - \lambda_p^n \Phi_p(fh)$ car $m(fh) = 0$ on a :

$$\mathcal{T}_u = \cup_{n \geq 1} T^n[\mathcal{T}_h \cup \mathcal{T}_f \cup \{a_j\}_{j \in J}].$$

Soit $\mathcal{T} = \mathcal{T}_u \cup \mathcal{T}_f \cup T^{-1}(\mathcal{T}_u)$.

C'est un ensemble dénombrable de points de I et on a

$$\text{sur } (I \setminus \{h \neq 0\}) \setminus \mathcal{T} \quad f = \phi - \phi \circ T.$$

\mathcal{T} se compose de l'ensemble des images par T^n , $n \geq 0$ des points de discontinuité de f et des points de la subdivision de I associée à T

$$\mathcal{T} = \cup_{n \geq 0} T^n[\{a_j, j \in J\} \cup \mathcal{T}_f].$$

Ainsi si on est capable de montrer qu'un point T -périodique de période k n'est pas dans $\mathcal{T} \cup T^{-1}(\mathcal{T}) \cup \dots \cup T^{-k}(\mathcal{T})$, on peut utiliser le test des points périodiques pour décider si f vérifie la condition H ou non.

9. La vitesse de convergence.

La méthode employée pour démontrer le théorème central limite permet aussi de donner la vitesse de convergence.

Théorème 9.1. *Sous les hypothèses du théorème 7.7. et si $\mu(f) = 0$, il existe une constante $C > 0$ telle que :*

$$\sup_{v \in \mathbb{R}} \left| \mu\left[\frac{S_n f}{\sigma \sqrt{n}} \leq v\right] - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^v e^{-\frac{u^2}{2}} du \right| \leq \frac{C}{\sqrt{n}}.$$

La preuve de ce théorème repose sur l'inégalité de Berry-Essen qui peut s'écrire ici :

Il existe $K > 0$ tel que pour tout $U > 0$, tout n vérifiant $\frac{U}{\sigma \sqrt{n}} < a$, on a :

$$\sup_{v \in \mathbb{R}} \left| \mu\left[\frac{S_n f}{\sigma \sqrt{n}} \leq v\right] - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^v e^{-\frac{u^2}{2}} du \right| \leq \frac{K}{U} + \frac{1}{\pi} \int_{-U}^U \frac{\left| \int_0^1 e^{iu \frac{S_n f}{\sigma \sqrt{n}}} h dm - e^{-\frac{u^2}{2}} \right|}{|u|} du.$$

Comme $\frac{U}{\sigma\sqrt{n}} < a$, alors pour tout $u \in [-U, U]$, $\frac{u}{\sigma\sqrt{n}} < a$, on peut alors utiliser la proposition 6.1., pour $u \in [-U, U]$ on a :

$$\begin{aligned} \int_0^1 e^{iu \frac{S_n f}{\sigma\sqrt{n}}} h dm &= \int_0^1 \Phi_f^n\left(\frac{iu}{\sigma\sqrt{n}}\right)(h) dm \\ &= \lambda_1^n\left(\frac{iu}{\sigma\sqrt{n}}\right) \int_0^1 \Phi_1\left(\frac{iu}{\sigma\sqrt{n}}\right)(h) dm \\ &\quad + \sum_{k=2}^p \lambda_k^n\left(\frac{iu}{\sigma\sqrt{n}}\right) \int_0^1 \Phi_k\left(\frac{iu}{\sigma\sqrt{n}}\right)(h) dm + \int_0^1 \psi_f^n\left(\frac{iu}{\sigma\sqrt{n}}\right)(h) dm \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned} \left| \int_0^1 e^{iu \frac{S_n f}{\sigma\sqrt{n}}} h dm - e^{-\frac{u^2}{2}} \right| &\leq \sum_{k=2}^p \left| \lambda_k^n\left(\frac{iu}{\sigma\sqrt{n}}\right) \int_0^1 \Phi_k\left(\frac{iu}{\sigma\sqrt{n}}\right)(h) dm \right| + \left| \int_0^1 \psi_f^n\left(\frac{iu}{\sigma\sqrt{n}}\right)(h) dm \right| \\ &\quad + \left| \lambda_1^n\left(\frac{iu}{\sigma\sqrt{n}}\right) \int_0^1 \Phi_1\left(\frac{iu}{\sigma\sqrt{n}}\right)(h) dm - e^{-\frac{u^2}{2}} \right|. \end{aligned}$$

Les applications $\frac{u}{\sigma\sqrt{n}} \rightarrow \lambda_k\left(\frac{iu}{\sigma\sqrt{n}}\right)$ sont analytiques. Les opérateurs $\frac{u}{\sigma\sqrt{n}} \rightarrow \Phi_k\left(\frac{iu}{\sigma\sqrt{n}}\right)$ et $\psi_f\left(\frac{iu}{\sigma\sqrt{n}}\right)$ sont analytiques on a alors :

$$\left| \int_0^1 \psi_f^n\left(\frac{iu}{\sigma\sqrt{n}}\right)(h) dm \right| \leq \frac{C \rho_2^{n+1}}{\sigma\sqrt{n}} |u|.$$

D'après les calculs de la 3ème étape de la preuve du théorème limite central on a :

$$\begin{aligned} \left| \lambda_1^n\left(\frac{iu}{\sigma\sqrt{n}}\right) \int_0^1 \Phi_1\left(\frac{iu}{\sigma\sqrt{n}}\right)(h) dm - e^{-\frac{u^2}{2}} \right| &= \left| e^{-\frac{u^2}{2}} \left[\frac{-iu^3}{6\sigma^3\sqrt{n}} \lambda_1''(0) + \frac{iu}{\sigma\sqrt{n}} \int_0^1 \Phi_1^{(1)}(h) dm \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{k}{\sqrt{n}} \epsilon\left(\frac{iu}{\sigma\sqrt{n}}\right) \right] \right| \leq e^{-\frac{u^2}{2}} \left[\frac{A|u|^3}{\sqrt{n}} + \frac{B|u|}{\sqrt{n}} \right]. \end{aligned}$$

$\left| \lambda_k^n\left(\frac{iu}{\sigma\sqrt{n}}\right) \int_0^1 \Phi_k\left(\frac{iu}{\sigma\sqrt{n}}\right)(h) dm \right| \leq \exp\left[-\frac{u^2}{\sigma^2} C_k^2\right] D_k \frac{|u|}{\sqrt{n}}$ où $C_k \in \mathbb{R}$. On peut alors intégrer

$$\int_{-U}^U \frac{\left| \int_0^1 e^{iu \frac{S_n f}{\sigma\sqrt{n}}} h dm - e^{-\frac{u^2}{2}} \right|}{|u|} du \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \int_{-U}^U \left[e^{-\frac{u^2}{2}} (Au^2 + B) + \sum_{k=2}^p D_k e^{-\frac{u^2}{\sigma^2} C_k^2} + \frac{C \rho_2^{n+1}}{\sigma} \right] du$$

comme $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du = \sqrt{2\pi}$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} u^2 e^{-\frac{u^2}{2}} du = \sqrt{2\pi}$ on obtient :

$$\begin{aligned} \int_{-U}^U \frac{\left| \int_0^1 e^{iu \frac{S_n f}{\sigma\sqrt{n}}} h dm - e^{-\frac{u^2}{2}} \right|}{|u|} du &\leq \left(\frac{A}{\sqrt{n}} + \frac{B}{\sqrt{n}} \right) \sqrt{2\pi} \sum_{k=2}^p D_k \frac{\sigma\sqrt{n}}{C_k\sqrt{n}} + \frac{2C \rho_2^{n+1} U}{\sigma\sqrt{n} U} \\ &= \frac{C_1}{\sqrt{n}} + C_2 \rho_2^{n+1} \frac{U}{\sqrt{n}}. \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\sup_{v \in \mathbb{R}} \left| \mu\left[\frac{S_n f}{\sigma\sqrt{n}} \leq v\right] - \int_{-\infty}^v e^{-\frac{u^2}{2}} du \right| \leq \frac{K}{U} + \frac{C_1}{\pi\sqrt{n}} + C_2 \rho_2^{n+1} \frac{U}{\sqrt{n}}$$

et ceci pour $\frac{U}{\sigma\sqrt{n}} < a$, on peut prendre $U = \alpha\sqrt{n}\sigma$ avec $\alpha < a$. On a alors :

$$\dots \leq \frac{K}{\sigma\alpha\sqrt{n}} + \frac{C_1}{\pi\sqrt{n}} + \frac{C_2\rho_2^{n+1}}{\sigma\alpha}$$

comme ρ_2^{n+1} est négligeable devant $\frac{1}{\sqrt{n}}$ car $\rho_2 < 1$ on a le résultat voulu en posant $C = \frac{k}{\sigma\alpha} + \frac{C_1}{\pi} + \frac{C_2}{\sigma\alpha}$:

$$\sup_{v \in \mathbb{R}} |\mu[\frac{S_n f}{\sigma\sqrt{n}} \leq v] - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^v e^{-\frac{u^2}{2}} du| \leq \frac{C}{\sqrt{n}}.$$

10. Applications sur des exemples.

1er exemple : Les polynômes trigonométriques et la transformation $Tx = 2x[1]$, généralisation au cas où $Tx = rx[1]$ $r \in \mathbb{N}, r > 2$:

L'opérateur de Perron-Frobenius associé à T est : $\Phi f(x) = \frac{1}{2}[f(\frac{x}{2}) + f(\frac{x+1}{2})]$. On vérifie facilement que Φ n'admet comme valeur propre de module 1 la valeur 1 et que cette valeur propre est simple associée à la fonction constante 1. Le système ergodique (T, m) est donc faiblement mélangeant. On peut donc appliquer le théorème central limite à T . On choisit pour fonction f un polynôme trigonométrique, on l'écrit :

$$f(x) = \sum_{k=1}^N a_k \cos(2k\pi x) + \sum_{\ell=1}^N b_\ell \sin(2\pi\ell x).$$

On a $\int_0^1 f(x) dx = 0$.

Conditions sur les a_k, b_ℓ pour que f vérifie la condition H :

Supposons $f = \phi - \phi \circ T$.

ϕ admet un développement en série trigonométrique :

$$\phi(x) = \sum_k \alpha_k \cos(2\pi kx) + \sum_\ell \beta_\ell \sin(2\pi\ell x).$$

On a :

$$\begin{aligned} \phi(x) - \phi(Tx) &= \sum_k \alpha_k \cos(2\pi kx) + \sum_\ell \beta_\ell \sin(2\pi\ell x) - \sum_k \alpha_k \cos(4\pi kx) - \sum_\ell \beta_\ell \sin(4\pi\ell x) \\ &= \sum_k (\alpha_{2k} - \alpha_k) \cos(4\pi kx) + \sum_k \alpha_{2k+1} \cos(2(2k+1)\pi x) \\ &\quad + \sum_\ell (\beta_{2\ell} - \beta_\ell) \sin(4\pi\ell x) + \sum_\ell \beta_{2\ell+1} \sin(2(2\ell+1)\pi x) \end{aligned}$$

$f = \phi - \phi \circ T$ si on a :

$$1 \leq k \leq \left[\frac{N}{2} \right] \begin{cases} a_{2k} & = \alpha_{2k} - \alpha_k \\ a_{2k+1} & = \alpha_{2k+1} \end{cases} \text{ et } k > N \quad \alpha_k = 0$$

$$1 \leq \ell \leq \left\lfloor \frac{M}{2} \right\rfloor \begin{cases} b_{2\ell} & = \beta_{2\ell} - \beta_{\ell} \\ b_{2\ell+1} & = \beta_{2\ell+1} \end{cases} \quad \text{et } \ell > M \quad \beta_{\ell} = 0.$$

On en déduit alors que : $\alpha_1 = a_1$, $\alpha_2 = a_1 + a_2$, $\alpha_n = a_1 + a_2 + a_n, \dots, \alpha_{2^k} = \sum_{\ell=0}^k a_{2^\ell}$ si $2^k \leq N$ i.e $k \leq \frac{\log N}{\log 2}$ et $\alpha_{2^k} = \sum_{\ell=0}^{\lfloor \log N / \log 2 \rfloor} a_{2^\ell}$ si $2^k > N$ de même : $\alpha_3 = a_3$, $\alpha_6 = a_3 + a_6$, $\alpha_{12} = a_3 + a_6 + a_{12}, \dots, \alpha_{3 \cdot 2^k} = \sum_{\ell=0}^k a_{3 \cdot 2^\ell}$ si $2^k \leq \frac{N}{3}$ i.e $k \leq \frac{\log N - \log 3}{2}$ et $\alpha_{3 \cdot 2^k} = \sum_{\ell=0}^{\lfloor (\log N - \log 3) / \log 2 \rfloor} a_{3 \cdot 2^\ell}$ si $3 \cdot 2^k > N$. On obtient donc les relations si $f = \phi - \phi \circ T$

$$\sum_{\ell=0}^{\lfloor (\log N - \log k) / \log 2 \rfloor} a_{k2^\ell} = 0 \quad \text{pour } k \text{ entier non multiple de 2 compris entre 1 et } N.$$

$$\sum_{\ell=0}^{\lfloor (\log M - \log k) / \log 2 \rfloor} b_{k2^\ell} = 0 \quad \text{pour } k \text{ entier non multiple de 2 compris entre 1 et } M.$$

Généralisation pour $T = rx[1]$, on obtient les relations

$$\sum_{\ell=0}^{\lfloor (\log N - \log k) / \log r \rfloor} a_{kr^\ell} = 0 \quad \text{pour } k \text{ entier non multiple de } r \text{ compris entre 1 et } N.$$

$$\sum_{\ell=0}^{\lfloor (\log M - \log k) / \log r \rfloor} b_{kr^\ell} = 0 \quad \text{pour } k \text{ entier non multiple de } r \text{ compris entre 1 et } M.$$

Si l'une de ces conditions n'est pas vérifiée, on sait alors que σ^2 est strictement positif. Ici, on peut même calculer la valeur exacte de σ^2

$$\sigma^2 = \int_0^1 f^2 dm + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^1 f \cdot f \circ T^k dm.$$

On remarque que :

$$\begin{aligned} \int_0^1 \cos(2k\pi x) \cos(2q\pi x) dx &= \begin{cases} 0 & \text{si } q \neq k \\ \frac{1}{2} & \text{si } q = k \end{cases} \\ \int_0^1 \sin(2k\pi x) \sin(2q\pi x) dx &= \begin{cases} 0 & \text{si } q \neq k \\ \frac{1}{2} & \text{si } q = k \end{cases} \\ \int_0^1 \sin(2k\pi x) \cos(2q\pi x) dx &= 0 \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} \int_0^1 f^2 dm &= \frac{1}{2} \left[\sum_{k=1}^N a_k^2 + \sum_{\ell=1}^M b_\ell^2 \right] \\ \int_0^1 f \cdot f \circ T^p dm &= \frac{1}{2} \left[\sum_{k=1}^{\lfloor N/2^p \rfloor} a_k a_{k2^p} + \sum_{\ell=1}^{\lfloor M/2^p \rfloor} b_\ell b_{\ell 2^p} \right]. \end{aligned}$$

Dans le cas où $\lfloor \frac{N}{2^p} \rfloor$ ou $\lfloor \frac{M}{2^p} \rfloor$ est nul on impose à la somme correspondante d'être nulle.

On obtient alors :

$$\sigma^2 = \frac{1}{2} \left[\sum_{k=1}^N a_k^2 + \sum_{\ell=1}^M b_\ell^2 \right] + \sum_{p=1}^{\infty} \left[\sum_{k=1}^{\lfloor N/2^p \rfloor} a_{k2^p} a_k + \sum_{\ell=1}^{\lfloor M/2^p \rfloor} b_{\ell 2^p} b_\ell \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left[\sum_{1 \leq k \text{ impair} \leq N} \left[\sum_{p=0}^{[(\log N - \log k) / \log 2]} a_{k2^p} \right]^2 + \sum_{1 \leq \ell \text{ impair} \leq M} \left[\sum_{p=0}^{[(\log M - \log \ell) / \log 2]} b_{\ell 2^p} \right]^2 \right].$$

Généralisation pour $Tx = rx[1]$ $r \in \mathbb{N}$ on trouve :

$$\sigma^2 = \frac{1}{2} \left[\sum_{1 \leq k \text{ non multiple de } r \leq N} \left[\sum_{p=0}^{[(\log N - \log k) / \log r]} a_{kr^p} \right]^2 + \sum_{1 \leq \ell \text{ non multiple de } r \leq M} \left[\sum_{p=0}^{[(\log M - \log \ell) / \log r]} b_{\ell r^p} \right]^2 \right].$$

On peut alors appliquer le théorème central limite et même donner la vitesse de convergence pour f un polynôme trigonométrique.

2ème exemple : Utilisation de la proposition 8.1.

On peut appliquer le théorème central limite à $f = 1_J$ où J est un intervalle $\mu(J) \neq 0$ ou 1 contenu dans I dans le cas où (T, μ) est un système faiblement mélangeant. C'est le cas pour la transformation "fraction continue" et les β -transformations $Tx = \beta x + \alpha[1]$ où :

$$\begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta > 1 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \alpha \neq 0 \\ \beta > 2 \end{cases}$$

3ème exemple : Calcul direct de σ^2

On prend $Tx = 2x[1]$ et f un polynôme de degré 1.

$$\begin{aligned} f(x) &= ax + b \\ \mu(f) &= \int_0^1 ax + b = \frac{a}{2} + b = 0 \Leftrightarrow b = -\frac{a}{2}. \end{aligned}$$

On va donc prendre $f(x) = a(x - \frac{1}{2})$

$$\sigma^2 = \int_0^1 f^2 dm + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, f \circ T^n \rangle.$$

On a :

$$\int_0^1 f^2 dm = a^2 \int_0^1 (x - \frac{1}{2})^2 dx = \frac{a^2}{12}$$

pour tout $n \geq 1$ on a :

$$\begin{aligned} \int_0^1 f \cdot f \circ T^n dm &= \int_0^1 (x - \frac{1}{2})(T^n x - \frac{1}{2}) dx \\ &= \int_0^1 x T^n x dx + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \left[\int_0^1 x dx + \int_0^1 T^n x dx \right] = \int_0^1 x T^n x dx - \frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^1 x T^m x dx &= \int_0^1 x \{2^m x\} dx = \sum_{k=0}^{2^m-1} \int_{k/2^m}^{(k+1)/2^m} x (2^m (x - \frac{k}{2^m})) dx \\
&= \sum_{k=0}^{2^m-1} 2^m \left[\frac{x^3}{3} - \frac{k}{2^m} \frac{x^2}{2} \right]_{k/2^m}^{(k+1)/2^m} \\
&= \sum_{k=0}^{2^m-1} \frac{1}{6(2^m)^2} [2(k+1)^3 - 3k(k+1)^2 + 2k^3 + 3k^3] = \frac{1}{6(2^m)^2} \sum_{k=0}^{2^m-1} (3k+2)
\end{aligned}$$

d'où :

$$\langle f, f \circ T^m \rangle = \frac{1}{4} + \frac{1}{12} \frac{1}{2^m} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12} \frac{1}{2^m}.$$

Ainsi

$$\sigma^2 = \left(\frac{2}{12} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{2^m} - \frac{1}{12} \right) a^2 = \frac{a^2}{12} \left[\frac{2}{1 - \frac{1}{2}} - 1 \right] = \frac{a^2}{4}.$$

On en déduit que si a n'est pas nul, on peut appliquer le théorème central limite aux polynômes de degré 1.

Pour un polynôme de degré 2, on prend $f(x) = a(x^2 - \frac{1}{3}) + b(x - \frac{1}{2})$. On trouve par un calcul analogue.

$$\sigma^2 = \frac{32a^2 + 27b^2 + 45ab}{108}$$

qui est positif si $(a, b) \neq (0, 0)$ car

$$\Delta = (45)^2 - 4 \times 32 \times 27 = -1431 < 0.$$

Conjecture, tous les polynômes vérifient la condition H et on peut alors leur appliquer le théorème central limite.

4ème exemple : Utilisation des points périodiques

On prend $Tx = \{\frac{1}{x}\}$ et f une transformation homographique : $f(x) = \frac{1}{ax+b}$, on suppose $-\frac{b}{a} \notin [0, 1]$ et $a \neq 0$. $\mu(f) = \frac{1}{\log 2} \int_0^1 \frac{1}{1+x} \frac{1}{ax+b} dx$ est donc non nul car c'est l'intégrale d'une fonction qui garde un signe constant sur I . $\mathcal{T} = \{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\}$ f et h sont continues sur I , u aussi donc si on trouve deux points (x, y) T -périodiques de période m et n et n'appartenant pas à $\mathcal{T} \cup T^{-1}(\mathcal{T}) \dots \cup T^{-n}(\mathcal{T})$ tels que : $\frac{f(x) + \dots + f(T^{n-1}x)}{n} \neq \frac{f(y) + \dots + f(T^{m-1}y)}{m}$ on sait que f vérifie H et donc qu'on peut appliquer le théorème central limite.

Les points T -périodiques de période 1 sont les solutions des équations $x^2 + nx - 1 = 0$ où $n \in \mathbb{N}^*$. Il sont donc de la forme $\frac{\sqrt{n^2+4}-n}{2}$

$$f\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) = \frac{1}{a\frac{\sqrt{5}-1}{2} + b}, \quad f\left(\frac{\sqrt{8}-2}{2}\right) = \frac{1}{a(\sqrt{2}-1) + b}$$

on a l'égalité si $a\frac{\sqrt{5}-1}{2} + b = a(\sqrt{2}-1) + b$ i.e $a = 0$ ce qui est exclu.

f vérifie donc H et on peut appliquer le théorème central limite.

5ème exemple : une autre utilisation des points périodiques

On prend $Tx = \beta x + \alpha[1]$ $\beta > 0$ $\beta^2 = \beta + 1$ et $\alpha = \frac{3-\beta}{2}$. h a pour points de discontinuité l'ensemble $\{0, \frac{2-\beta}{2}, \frac{\beta-1}{2}, \alpha, \frac{\beta}{2}, 1\}$. Cet ensemble est invariant par T .

Si on prend f une fonction continue sur I , on a alors $\mathcal{T}_f = \emptyset$ et $\mathcal{T} = \cup_{n \geq 0} T^n \{0, \frac{2-\beta}{2}, \frac{\beta-1}{2}, \alpha, \frac{\beta}{2}, 1\} = \{0, \frac{2-\beta}{2}, \frac{\beta-1}{2}, \alpha, \frac{\beta}{2}, 1\}$. On peut donc appliquer le test des points périodiques à f en prenant des points n'appartenant pas à \mathcal{T} ni à $[\frac{\beta-1}{2}, \alpha]$ qui est l'ensemble $\{h = 0\}$.

Ainsi on peut appliquer le théorème central limite à T et f "bien choisie" continue sur I . C'est un ensemble de β -transformation tel que le système (T, μ) est ergodique et non faiblement mélangeant.

References

- [1] N. DUNFORD ET J.T. SCHWARTZ *Linear operators part I*. Interscience New York, 1958.
- [2] B.V. GNEDENKO ET A.N. KOLMOGOROV *Limit distributions for sums of independent random variables*. Addison Wesley Reading, 1954.
- [3] Y. GUIVARC'H ET J. HARDY *Théorèmes limites pour une classe de chaînes de Markov et applications aux difféomorphismes d'Anosov*. Annales de l'Institut Henri Poincaré, vol. 24, p. 73-98, 1988.
- [4] C.T. IONESCU-TULCEA ET G. MARINESCU *Théorie ergodique pour des classes d'opérations non complément continues*. Ann. Math. 47, p. 140-147, 1946.
- [5] G. KELLER *Piecewise monotonic transformations and exactness*. Séminaires de Probabilités de Rennes, 1978.
- [6] A. LASOTA ET J.A. YORKE *On the existence of invariant measures for piecewise monotonic transformations*. Trans. Amer. Math. Soc., 186, p. 481-488, 1973.
- [7] S.V. NAGAEV *Some limit theorems for Markov chains*. Theor. Prob. Appl. 2, p. 378-416, 1957.
- [8] W. PARRY *Representation for real numbers*. Acta Math. Acad. Sc. Hungar, 15, p. 95-105, 1964.
- [9] A. RENYI *Representation for real numbers and their ergodic properties*. Acta Math. Acad. Sc. Hungar, 8, p. 477-493, 1957.

- [10] J. ROUSSEAU-EGELE *Un théorème de la limite locale pour une classe de transformations dilatantes et monotones par morceaux* Annals of Probability, 3, p. 772-788, 1983.