

PASCAL AUSCHER

Étude de l'opérateur $\sqrt{bDaD}$

Publications de l'Institut de recherche mathématiques de Rennes, 1992, fascicule 1
« Fascicule d'équations aux dérivées partielles », , p. 20-29

http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1992__1_20_0

© Département de mathématiques et informatique, université de Rennes,
1992, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications mathématiques et informatiques de Rennes » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ETUDE DE L'OPERATEUR $\sqrt{bDaD}$

Pascal AUSCHER

Nous décrivons dans cet exposé un travail effectué en collaboration avec Ph. Tchamitchian.

Le but de cette étude est d'obtenir des informations précises sur la nature de l'opérateur $\sqrt{bDaD}$, et plus particulièrement, sur son noyau-distribution. On retrouvera en corollaire des résultats dus à C. Kenig et Y. Meyer [K M].

Avant d'énoncer les résultats obtenus, rappelons quelques problèmes de la physique mathématique qui motivent cette étude.

L'opérateur D dénote $-i \frac{d}{dx}$ de domaine $H^1(\mathbb{R})$, $a(x)$ et $b(x)$ sont deux fonctions mesurables et l'on désigne par a et b respectivement les opérateurs de multiplication ponctuelle par $a(x)$ et $b(x)$. On supposera constamment que $a(x)$ et $b(x)$ sont bornées et accrétives :

$$(1) \quad |a(x)| \leq M \quad \text{et} \quad |b(x)| \leq M \quad \text{presque partout}$$

$$(2) \quad \operatorname{Re} a(x) \geq \delta > 0 \quad \text{et} \quad \operatorname{Re} b(x) \geq \delta \quad \text{presque partout.}$$

L'opérateur $bDaD$ est défini comme un opérateur non-borné sur $L^2(\mathbb{R})$, de domaine $\{f \in H^1(\mathbb{R}) ; aDf \in H^1(\mathbb{R})\}$, dont on montre qu'il est dense. On peut alors donner un sens à $\sqrt{bDaD}$ (ce que nous ferons plus loin).

Voici deux équations de la physique mathématique :

$$(3) \quad \partial_t^2 u + bDaD u = 0$$

où $u(x,t)$ est définie sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

$$(4) \quad \partial_t^2 u - bDaD u = 0$$

où $u(x,t)$ est définie sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{++}$.

Pour ces deux conditions, on peut poser soit le problème de Dirichlet, soit le problème de Neumann.

L'équation (3) modélise la propagation d'une onde dans un milieu linéaire non-homogène : les fonctions $a(x)$ et $b(x)$ sont alors positives et dépendent de la résistivité et de la célérité du milieu. Une fonction de la forme $u(x,t) = \exp(it\sqrt{bDaD})(f)(x)$ est formellement solution de (3). On a $u(x,0) = f(x)$. La dérivée $\partial_t u(x,t)|_{t=0}$ est alors donnée par $(i\sqrt{bDaD} f)(x)$. Pour bien poser le problème de Neumann, il importe donc de connaître le domaine de $\sqrt{bDaD}$.

L'autre équation généralise le problème du prolongement harmonique sur le demi-plan supérieur. En effet, si $a = b = 1$ (constante), $u(x,t)$ est une fonction harmonique. Si $u(x,0) = f(x)$ est suffisamment régulière alors on sait relier la dérivée normale $\partial_t u(x,t)|_{t=0}$ à la dérivée tangentielle $(\partial_x u)(x,0)$ par

$$(5) \quad \partial_t u(x,t)|_{t=0} = H(\partial_x u(.,0))(x)$$

où H est la transformée de Hilbert, de symbole $-i \operatorname{sgn} \xi$. En particulier les normes L^p , $1 < p < \infty$, de ces deux dérivées sont équivalentes.

Dans le cas où $a(x)$ et $b(x)$ sont quelconques, on écrit formellement $u(x,t) = \exp(-t\sqrt{bDaD})(f)(x)$, ce qui implique

$$\partial_t u(x,t)|_{t=0} = -(\sqrt{bDaD} f)(x).$$

Ici aussi, le problème du domaine de $\sqrt{bDaD}$ se pose. Si l'on veut également relier dérivée normale et dérivée tangentielle $(\frac{d}{dx} f(x))$, on est amené à factoriser $\sqrt{bDaD}$ en RD et l'égalité ci-dessus devient

$$(6) \quad \partial_t u(x,t)|_{t=0} = [i R(\partial_x u(.,0))](x).$$

Pour que tout cela ait un sens, il faut que $u(x,0) = f(x) \in H^1(\mathbb{R})$ et également que $f(x) \in \operatorname{Dom}(\sqrt{bDaD})$.

Le premier travail est donc d'identifier $H^1(\mathbb{R})$ à ce domaine, ce qui est un théorème de C. Kenig et Y. Meyer.

Mais en comparant (6) à (5) on peut, en outre, se demander si R est un opérateur d'intégrale singulière. Nous allons montrer que c'est toujours le cas. Il faudrait aussi donner un sens aux opérateurs de diffusion $\exp(-t\sqrt{bDaD})$ et $\exp(it\sqrt{bDaD})$, aspect que nous ne discuterons pas ici.

Un cas remarquable est celui où $a(x) = b(x)$. C. Kenig et Y. Meyer montrent alors que R est l'opérateur de Cauchy (correctement normalisé) sur la courbe lipschitzienne dont une représentation paramétrique est $z(x) = \int a(x)^{-1} dx$:

$$(7) \quad Rf(x) = \frac{1}{\pi i} \text{ v. p. } \int \frac{f(y)}{z(y) - z(x)} dy.$$

Pour le vérifier, nous utilisons un autre chemin que celui suivi par ces auteurs et réécrivons (3) et (6) à l'aide de la variable complexe. Soit Γ la courbe lipschitzienne d'équation $z(x) = \int_0^x a^{-1}(y) dy$. Soit $f(z)$, $z \in \mathbb{C}$, une fraction rationnelle, $O(|z|^{-1})$ à l'infini et holomorphe au voisinage de Γ (ces fonctions forment un ensemble dense dans $L^2(\Gamma)$ et tous les calculs sont valides pour de telles fonctions).

Pour $t > 0$, on pose $\omega = z + it$ et $\omega^* = z - it$, $z \in \Gamma$. On pose

$$F_+(\omega) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - \omega} d\zeta,$$

$$F_-(\omega) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - \omega^*} d\zeta,$$

et $F(\omega) = F_+(\omega) - F_-(\omega)$. Remarquer que F_+ est holomorphe mais que F_- n'est pas anti-holomorphe. Des formules de Plemelj

$$\lim_{t \rightarrow 0} F_{\pm}(\omega) = Cf(z) \pm \frac{1}{2} f(z)$$

où $Cf(z) = \frac{1}{2\pi i} \text{ v. p. } \int \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$, on déduit

$$\lim_{t \rightarrow 0} F(\omega) = f(z).$$

On peut aussi calculer $\partial_t F(\omega)$ en dérivant sous le signe intégral puis en intégrant par parties. En passant à la limite, il vient

$$\lim_{t \rightarrow 0} \partial_t F(\omega) = 2i C \left(\frac{d}{dz} f \right) (z).$$

Ces calculs sont valides, en fait, en les $z = z(x)$ où $z'(x)$ existe.

Enfin, on vérifie que

$$\partial_t^2 F(\omega) + \partial_z^2 F(\omega) = 0, \quad \omega = z + it, \quad t > 0, \quad z \in \Gamma.$$

Si maintenant on procède au changement de variable $F(\omega) = u(x, t)$ où $\omega = z(x) + i t$, ∂_z devient $a(x) \partial_x$ avec $a(x) = z'(x)^{-1}$ et on a

$$\partial_t^2 u + a \partial_x a \partial_x u = 0 ,$$

$$u(x, 0) = \tilde{f}(x) = f(z(x)) ,$$

$$\partial_t u(x, t) \big|_{t=0} = \frac{1}{\pi} \text{ v. p. } \int \frac{1}{z(y) - z(x)} \frac{d}{dy} (\tilde{f}(y)) dy.$$

En comparant la dernière égalité à (6), on obtient l'identité (7).

Enonçons maintenant le résultat principal.

Théorème 1.

Soient $a(x)$ et $b(x)$ deux fonctions accrétives. Alors l'opérateur $R = \sqrt{bDaD} D^{-1}$ est un opérateur de Calderon-Zygmund (donc borné sur $L^2(\mathbb{R})$), qui vérifie $R(a^{-1}) = {}^tR(b^{-1}) = 0$ dans BMO . En outre, R est inversible sur $L^2(\mathbb{R})$ et on a l'identité remarquable

$$R^{-1} = -a^{-1} {}^tR b^{-1} ,$$

où tR est ici l'adjoint réel de R .

Corollaire.

Pour tout $f \in H^1(\mathbb{R})$, $\|Df\|_2 \sim \|\sqrt{bDaD}f\|_2$ et $H^1(\mathbb{R}) = \mathcal{D}om(\sqrt{bDaD})$. De plus, pour $1 < p < \infty$ et $f \in W^{1,p}(\mathbb{R})$, $\|Df\|_p \sim \|\sqrt{bDaD}f\|_p$.

La partie $p = 2$ est le résultat de Kenig et Meyer.

Pour démontrer le théorème 1 nous ne disposons plus des identités algébriques du cas où $a(x) = b(x)$. Il nous faut donc revenir à la définition même de $\sqrt{bDaD}$, que nous présentons maintenant.

On commence par définir DaD comme l'opérateur maximal accréatif associé à la forme sesquilinéaire, de domaine $H^1(\mathbb{R})$,

$$J(f, g) = \int_{\mathbb{R}} a Df \overline{Dg} .$$

L'accrétivité de $a(x)$ implique que pour tout λ avec $Re \lambda > 0$,

$$Re \langle (\lambda + DaD) u, u \rangle \geq Re \lambda \langle u, u \rangle, \forall u \in H^1(\mathbb{R}).$$

On en déduit que

$$(\lambda + DaD)^{-1} : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$$

avec

$$(8) \quad \|(\lambda + DaD)^{-1}\| \leq (Re \lambda)^{-1}.$$

L'image de $L^2(\mathbb{R})$ par cet opérateur est un sous-espace dense de $L^2(\mathbb{R})$ qui coïncide avec le domaine $\mathcal{D}$ de DaD . Cet espace n'est autre que l'ensemble des $f \in H^1(\mathbb{R})$ telles que $aDf \in H^1(\mathbb{R})$.

L'opérateur $bDaD$ est bien défini de $\mathcal{D}$ dans $L^2(\mathbb{R})$ et l'on montre l'existence d'un demi-cône ouvert $\mathcal{C}$ d'axe $]-\infty, 0[$ tel que pour tout $\lambda \in \mathcal{C}$, $\lambda + bDaD : \mathcal{D} \rightarrow L^2(\mathbb{R})$ soit un isomorphisme avec

$$(9) \quad \|(\lambda + bDaD)^{-1}\| \leq C (Re \lambda)^{-1}.$$

On déduit (9) de (8) où C et l'ouverture du cône $\mathcal{C}$ ne dépendent que de $\|b\|_\infty$ et $\|b^{-1}\|_\infty$.

Pour $f \in \mathcal{D}$, on voit alors que la fonction $t \rightarrow \|(1 + t^2 bDaD)^{-1} bDaD f\|$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$. Ainsi, l'intégrale au sens de Bochner

$$(10) \quad \frac{2}{\pi} \int_0^\infty (1 + t^2 bDaD)^{-1} bDaD f dt$$

définit une fonction Tf . L'opérateur T n'est pas fermé sur $\mathcal{D}$: son domaine contient $\mathcal{D}$. Par des changements de contour dans l'intégrale, on montre que $T^2 = bDaD$. On note alors $T = \sqrt{bDaD}$.

L'inverse de T , noté $(\sqrt{bDaD})^{-1}$, est donné par

$$(11) \quad (\sqrt{bDaD})^{-1} f = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty (1 + t^2 bDaD)^{-1} f dt$$

et est défini et continu sur $L^2(\mathbb{R})$ et à valeurs dans $\mathcal{D}om(\sqrt{bDaD}) = \mathcal{D}'$. En fait, pour que l'intégrale converge il faut remplacer $bDaD$ par $bDaD + \varepsilon$ avec $\varepsilon > 0$.

Le problème ici est de donner un sens à (10) pour $f \in \mathcal{D}'$. Nous montrerons en fait que les intégrales tronquées $\frac{2}{\pi} \int_\varepsilon^{1/\varepsilon} (1 + t^2 bDaD)^{-1} bDaD f dt$ convergent faiblement dans $L^2(\mathbb{R})$ pour $f \in H^1(\mathbb{R})$, lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$.

Posons $S_t = (b^{-1} + t^2 DaD)^{-1} tDa$. Alors

$$(1 + t^2 bDaD)^{-1} bDaD = S_t \frac{1}{t} D.$$

On a donc formellement

$$\sqrt{bDaD} = \left\{ \frac{2}{\pi} \int_0^\infty S_t \frac{dt}{t} \right\} D.$$

Par un calcul similaire on obtient

$$(\sqrt{bDaD})^{-1} = D^{-1} \left(-a^{-1} \left\{ \frac{2}{\pi} \int_0^\infty {}^tS_\mu \frac{d\mu}{\mu} \right\} b^{-1} \right).$$

Ainsi, la continuité de R , son inversibilité et les propriétés de son noyau-distribution repose sur l'étude des intégrales $\int_0^\infty S_t \frac{dt}{t}$.

Appelons $P_t = (b^{-1} + t^2 DaD)^{-1}$. On note $P_t(x, y)$ le noyau-distribution de P_t et $S_t(x, y)$ celui de S_t .

Théorème fondamental.

Pour toutes fonctions accrétives et bornées $a(x)$ et $b(x)$, il existe $C \geq 0$ et $\alpha > 0$ ne dépendant que de M et δ dans (1) et (2) telles que pour tout $t > 0$, si $p_t(u) = \frac{1}{t} (1 + \frac{|u|}{t})^{-1-\alpha}$,

$$(12) \quad |P_t(x, y)| \leq C p_t(x - y);$$

$$(13) \quad |S_t(x, y)| \leq C (1 + \log_- (\frac{|x-y|}{t})) p_t(x - y);$$

$$(14) \quad |S_t(x+h, y) - S_t(x, y)| \leq C \frac{|h|^\alpha}{|x-y|^\alpha} p_t(x - y), \text{ si } |h| \leq \frac{1}{2} |x-y|;$$

$$(15) \quad |S_t(x, y+h) - S_t(x, y)| \leq C \frac{|h|^\alpha}{|x-y|^\alpha} p_t(x - y), \text{ si } |h| \leq \frac{1}{2} |x-y|.$$

Enfin, pour tout $t > 0$

$$(16) \quad \int_{\mathbb{R}} S_t(x, y) a^{-1}(y) dy = 0 \text{ presque partout};$$

$$(17) \quad \int_{\mathbb{R}} S_t(x, y) b^{-1}(x) dx = 0 \text{ presque partout}.$$

De (13), (14) et (15) on déduit les estimations de Calderon-Zygmund pour le noyau $R(x, y)$ de R . La continuité de R sur $L^2(\mathbb{R})$ se montre à l'aide du théorème

$T(b)$ de David, Journé et Semmes [D J S]. C'est là qu'interviennent les égalités (16) et (17).

L'inégalité fondamentale dans ce résultat est l'inégalité (12).

Elle cache en fait une représentation explicite de $P_t(x,y)$, qui permet ensuite de calculer $S_t(x,y)$ par

$$(18) \quad S_t(x,y) = -i t a(y) \frac{\partial}{\partial y} P_t(x,y)$$

puisque $S_t = P_t (tDa)$. L'égalité (16) est d'ailleurs une conséquence immédiate de (18). L'égalité (17) quant à elle s'obtient en remarquant que changer S_t en $'S_t$ revient à échanger $a(x)$ et $b(x)$ dans la définition de S_t grâce à l'identité $(b^{-1} + t^2 DaD)^{-1} tDa = tbD (a^{-1} + t^2 DbD)^{-1}$.

L'idée de la preuve de (12) est la suivante : on relie $b^{-1} + t^2 DaD$ à un opérateur d'intégrale singulière en effectuant une factorisation "à la Calderon". Les propriétés fonctionnelles de $b^{-1} + t^2 DaD$, notamment l'inversibilité sur les espaces de Sobolev, permettent alors d'inverser l'opérateur d'intégrale singulière associé : grâce aux résultats de Ph. Tchamitchian, cet inverse est encore un opérateur d'intégrale singulière. Cela permet, en retour, d'obtenir les estimées sur $P_t(x,y)$ en même temps qu'une formule de représentation.

Les détails de cet algorithme sont un peu longs à exposer et nous nous contentons de les résumer. On fait appel maintenant aux bases d'ondelettes de $L^2(\mathbb{R})$. On prendra dans la suite $t = 1$ et $P(x,y) = P_1(x,y)$ (on se ramène à ce cas par une technique de renormalisation).

1 - On considère une base orthonormée d'ondelettes "ordinaires" $\mathcal{B}$ de $L^2(\mathbb{R})$ composée des fonctions basses fréquences $\varphi(x - k)$, $k \in \mathbb{Z}$, et des ondelettes hautes fréquences $\Psi_{j,k}(x) = 2^{j/2} \Psi(2^j x - k)$, $j \geq 0$, $k \in \mathbb{Z}$. On supposera autant de décroissance et de régularité que nécessaire [M].

2 - On construit une base d'ondelettes $\mathcal{B}'$ plus adaptée à DaD [A T] : elle est constituée de fonctions $t_k(x)$, $k \in \mathbb{Z}$, (basses fréquences) et de $2^{-j} \tau_{j,k}(x)$, $j \geq 0$, $k \in \mathbb{Z}$ (hautes fréquences), de telle sorte qu'elle est orthogonale pour la forme $\int a(x) f'(x) g'(x) dx$ (sans barre de conjugaison pour une raison technique).

3 - L'opérateur de changement de base U défini par $U \varphi_k = t_k$ et $U \Psi_{jk} = \tau_{jk}$ est un isomorphisme de $L^2(\mathbb{R})$ sur $L^2(\mathbb{R})$, de $H^1(\mathbb{R})$ sur $H^1(\mathbb{R})$ et de $H^2(\mathbb{R})$ sur $\mathcal{D} = \mathcal{D}om(DaD)$.

4 - La factorisation de Calderon de $b^{-1} + DaD$ s'écrit :

$$(19) \quad T = \Lambda^{-1} {}^tU (b^{-1} + DaD) U \Lambda^{-1}$$

où Λ est défini par $\Lambda \varphi_k = \varphi_k$ et $\Lambda \Psi_{jk} = 2^j \Psi_{jk}$. Puisque $\Lambda : H^s \rightarrow H^{s-1}(\mathbb{R})$ est un isomorphisme et que $b^{-1} + DaD : \mathcal{D} \rightarrow L^2(\mathbb{R})$ est un isomorphisme, on voit que $T : H^1(\mathbb{R}) \rightarrow H^1(\mathbb{R})$ est un isomorphisme. Comme, de plus, ${}^tT = T$, on en déduit que pour tout $s \in [-1, 1]$ $T : H^s(\mathbb{R}) \rightarrow H^s(\mathbb{R})$ est un isomorphisme.

5 - La matrice de T dans la base $\mathcal{B}$ se compose des coefficients

$$\int (b^{-1} + DaD) (t_k) t_{k'} ,$$

$$\int (b^{-1} + DaD) (t_k) 2^{-j'} \tau_{j'k'} ,$$

$$\int (b^{-1} + DaD) (2^{-j} \tau_{jk}) t_{k'} ,$$

$$\int (b^{-1} + DaD) (2^{-j} \tau_{jk}) 2^{-j'} \tau_{j'k'} .$$

Grâce aux relations d'orthogonalité du point 2 et aux estimations en $2^{j/2} \exp(-\gamma |2^j x - k|)$ des τ_{jk} et en $\exp(-\gamma |x - k|)$ des t_k on obtient pour ces coefficients la majoration

$$(20) \quad C(\beta) 2^{-|j-j'|(\frac{1}{2}+\beta)} \left(\frac{2^{-j} + 2^{-j'}}{2^{-j} + 2^{-j'} + |k 2^{-j} - k' 2^{-j'}|} \right)^{-1-\beta}$$

où $\beta \in]0, 1[$ est indépendant de $j \geq 0$, $j' \geq 0$, $k, k' \in \mathbb{Z}$ et $C(\beta)$ dépend de β (et aussi de M et δ en (1) et (2)).

6 - Le théorème d'inversion de Tchamitchian s'applique grâce à 4 et 5 et les coefficients de T^{-1} dans la base $\mathcal{B}$ vérifient une estimation du type (20) pour un $\beta \in [0, 1]$.

7 - En utilisant à nouveau la factorisation (19) et des relations d'orthogonalité, on écrit $P(x, y)$ en une somme de 4 séries

$$\sum t_k(x) m_{kk'} t_{k'}(y) + \dots + \sum \tau_{jk}(x) 2^{-j} m_{jkj'k'} 2^{-j'} \tau_{j'k'}(y)$$

où les $m_{kk'}$, ..., $m_{jj'k}$ sont les coefficients de la matrice de T^{-1} dans la base $\mathcal{B}$. On en déduit (12) par des estimations élémentaires, puis (13) et (14) en utilisant (18).

Cela démontre le théorème fondamental.

Terminons par 2 remarques.

Remarque 1. Cet algorithme s'applique aux opérateurs $H = -\frac{d^2}{dx^2} + V(x)$ où $V(x)$ est un potentiel non nécessairement accréatif. Il suffit que $V(x) \in L^\infty(\mathbb{R})$ et soit tel que $H : H^1(\mathbb{R}) \rightarrow H^{-1}(\mathbb{R})$ soit un isomorphisme. Pour passer à la dimension supérieure où $H = -\Delta + V(x)$, cette méthode, globale, nécessite que $H : H^{\frac{n}{2}+1}(\mathbb{R}^n) \rightarrow H^{\frac{n}{2}-1}(\mathbb{R}^n)$ soit un isomorphisme. Il faut donc que $V(x)$ soit au minimum un multiplicateur de $H^{\frac{n}{2}-1}(\mathbb{R}^n)$ (avec $V(x)$ borné).

Remarque 2. Si $a(x)$ et $b(x)$ sont C^∞ (bornées et accréatives) alors (20) est vérifiée pour tout $\beta > 0$ et $T : H^s(\mathbb{R}) \rightarrow H^s(\mathbb{R})$ est un isomorphisme pour tout $s > 0$. Un examen de la preuve du théorème de Tchamitchian montre que les coefficients matriciels de T^{-1} dans la base $\mathcal{B}$ vérifient (20) également pour tout $\beta > 0$. L'opérateur T^{-1} appartient alors à l'algèbre de Bourdaud (voir [M]) et à ce titre, est un opérateur pseudo-différentiel classique de la classe interdite $S_{1,1}^0$ de Hörmander.

Références

- [A T] : P. AUSCHER et Ph. TCHAMITCHIAN
Ondelettes et conjecture de Kato.
 C. R. Acad. Sci. Paris **313** (1991), 63-66.
- [D J S] : G. DAVID - J.L. JOURNE et S. SEMMES
Opérateurs de Calderon–Zygmund, fonctions para–accrétives et interpolation.
 Rev. Mat. Iberoamericana, **1** (1985), 1-56.
- [K M] : C. KENIG et Y. MEYER
The Cauchy integral on Lipschitz curves and the square root of second order accretive operators are the same.
 Recent progress in Fourier analysis, Math. Studies **111** (1985), 123-145.
- [M] : Y. MEYER
Ondelettes et opérateurs.
 Tomes I et II, Hermann, Paris, 1990.
- [T] : Ph. TCHAMITCHIAN
 Ce volume.