

XAVIER PELGRIN

Un problème à frontière libre

Publications de l'Institut de recherche mathématiques de Rennes, 1992, fascicule 1
« Fascicule d'équations aux dérivées partielles », , p. 185-191

http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1992__1_185_0

© Département de mathématiques et informatique, université de Rennes,
1992, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications mathématiques et informatiques de Rennes » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

UN PROBLÈME À FRONTIÈRE LIBRE.

XAVIER PELGRIN

1. Préliminaires.

Soit K un compact de \mathbb{R}^2 dont le complémentaire est connexe.

Soit $j \in L^\infty(\mathbb{R}^2)$ t.q :

$$\begin{cases} \text{supp}(j) \subset K, \\ \int_{\mathbb{R}^2} j \, dx > 0. \end{cases}$$

Pour $u \in H^1(\mathbb{R}^2)$, on note $\Omega_u = \{x \in \mathbb{R}^2 / u(x) \neq 0\}$, $|\Omega_u|$ la mesure de Lebesgue de Ω_u et χ_u l'indicatrice de Ω_u .

On définit :

$$A(\gamma) = \{w \in H^1(\mathbb{R}^2) / |\Omega_w| \leq \gamma\}$$

et :

$$J(v) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} \nabla v^2(x) \, dx - \int_{\mathbb{R}^2} j(x) v(x) \, dx.$$

On considère le problème :

$$(P) \begin{cases} \text{Trouver } u \in A(\gamma) \text{ tel que :} \\ \forall v \in A(\gamma) \quad , \quad J(u) \leq J(v). \end{cases}$$

On admettra :

- Le problème (P) a une solution u_γ .
- $u_\gamma \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^2)$ (donc est lipschitzienne), et a un support borné.
- On a : $-\Delta u_\gamma = j$ dans Ω_{u_γ} (qui est ouvert).
- $(\partial u_\gamma)^2 = s - \lambda T \chi_{u_\gamma}$, où :

$$s(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} (j \partial u)(x-y) y^{-1} \, dy,$$

$$\lambda = -\frac{1}{2\gamma} \int_{\mathbb{R}^2} j \nabla u \cdot \vec{x} \, dx,$$

$$Tg = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \int_{|y| > \varepsilon} g(x-y) y^{-2} \, dy.$$

Remarques :

- Tg est la transformée de Beurling de g .

- On a utilisé les notations :

$$\partial v = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x_1} - i \frac{\partial v}{\partial x_2} \right),$$

$$y = y_1 + i y_2,$$

$$dy = dy_1 dy_2 : \text{mesure de Lebesgue de } \mathbb{R}^2.$$

• Pour γ assez grand, on a : $K \subset \Omega_{u_\gamma}$ et $u_\gamma > 0$ sur Ω_{u_γ} .

• On pose :

$$u_\infty(x) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \ln|x-y| j(y) dy$$

et on a alors $-\Delta u_\infty = j$ dans \mathbb{R}^2 .

On peut montrer que $(u_\gamma(x) - u_\gamma(0)) - (u_\infty(x) - u_\infty(0))$ tend vers 0 quand γ tend vers $+\infty$ dans $\mathcal{C}^\infty(B)$ pour toute boule B .

En utilisant cela, plus le fait que les ensembles de niveau de u_∞ : $\{x/u_\infty(x) \geq u_\infty(x_0)\}$ sont convexes pour $|x_0|$ assez grand, on montre que u_γ a au moins un ensemble de niveau convexe et contenant K , pour γ assez grand. On note $\Lambda = \{x/u_\gamma(x) \geq a\}$ cet ensemble.

2. La frontière est lipschitzienne.

Ce qui précède va nous permettre d'utiliser un "réarrangement étoilé" (*starshaped rearrangement*, cf [1]).

On suppose que $\Lambda = \{(\rho, \theta) \in \mathbb{R}^2, \rho \leq r(\theta)\}$, où r est une fonction donnée telle que : $\forall \theta, r(\theta) > \delta$, δ étant une constante positive et (ρ, θ) désignant les coordonnées polaires de \mathbb{R}^2 .

Soit c fixé. On pose :

$$\begin{cases} D_c = \{x / u_\gamma(x) \geq c\}, \\ D(\theta) = \{t > \delta / (t, \theta) \in D_c\}, \\ \ell(\theta) = \int_{D(\theta)} \frac{dt}{t}, \\ R(\theta) = \delta e^{\ell(\theta)}. \end{cases}$$

On définit alors :

$$D_c^* = \bigcup_{\theta \in [0, 2\pi[} \{(\rho, \theta) \in \mathbb{R}^2, \rho \leq R(\theta)\}$$

et :

$$\begin{cases} \tilde{u}(x) = \sup\{c \in [0, a] / x \in D_c^*\}, \\ u^*(x) = \begin{cases} u(x) & \text{si } x \in \Lambda, \\ \tilde{u}(x) & \text{sinon.} \end{cases} \end{cases}$$

On a alors (cf [1]) $|\Omega_{u^*}| \leq |\Omega_u|$ et $\|\nabla u\|_{L^2} \geq \|\nabla u^*\|_{L^2}$ d'où, en prenant $u = u_\gamma$: $u_\gamma^* \in A(\gamma)$ et $J(u_\gamma^*) \leq J(u_\gamma)$.

Donc, u_γ et u_γ^* sont deux solutions de (P) qui coïncident sur K . En remarquant que Ω_{u_γ} est connexe et que $\Delta(u_\gamma - u_\gamma^*) = 0$ sur $\Omega_{u_\gamma} \cap \Omega_{u_\gamma^*}$, on obtient d'abord : $u_\gamma = u_\gamma^*$ sur $\Omega_{u_\gamma} \cap \Omega_{u_\gamma^*}$.

On en déduit que $\Omega_{u_\gamma} = \Omega_{u_\gamma^*}$ (et donc que $u_\gamma = u_\gamma^*$ sur \mathbb{R}^2) : en effet, sur la frontière de $\Omega_{u_\gamma} \cap \Omega_{u_\gamma^*}$, $u_\gamma = u_\gamma^*$ par continuité, or sur cette frontière $u_\gamma = 0$ ou $u_\gamma^* = 0$, d'où $u_\gamma = u_\gamma^* = 0$ et on en déduit que $\Omega_{u_\gamma} \cap \Omega_{u_\gamma^*} = \Omega_{u_\gamma}$, d'où le résultat.

Or, par construction, la fonction u_γ^* possède certaines propriétés :

- Ses lignes de niveau sont étoilées par rapport à O .
- Elle est décroissante à l'extérieur de Λ sur toute demi-droite issue de O .

u_γ va donc vérifier les mêmes propriétés. De plus, tout point de Λ peut servir d'origine pour les coordonnées polaires à la place de O .

On en déduit :

- Les ensembles de niveau de u_γ sont étoilés par rapport à tous les points de Λ . (C'est donc vrai en particulier pour Ω_{u_γ} .)
- La fonction u_γ est décroissante sur toute demi-droite sortant de Λ .

On déduit de la première propriété que $\partial\Omega_{u_\gamma}$ est *lipschitzienne*. (En effet, comme Ω_{u_γ} est étoilé par rapport à tout point de Λ , pour tout x appartenant à $\partial\Omega_{u_\gamma}$, on peut trouver un cône C_x de sommet x contenant Λ et tel que l'intersection de $\partial\Omega_{u_\gamma}$ avec C_x soit réduite à $\{x\}$.)

3. Comportement de ∇u_γ sur la frontière.

Par un principe du maximum appliqué à $h(x) = (x - x_0)\nabla u_\gamma$, on montre facilement que :

$$\forall x_0 \in \Lambda, \forall x \in (\Omega_{u_\gamma} \setminus \Lambda), (x - x_0)\nabla u_\gamma(x) < 0$$

et donc $\nabla u_\gamma \neq \vec{0}$. On va à présent étudier le comportement de ∇u_γ au voisinage de $\partial\Omega_{u_\gamma}$, et plus précisément : $\lim_{t \rightarrow 1^-} \nabla u_\gamma(tx_0)$ avec $x_0 \in \partial\Omega_{u_\gamma}$.

On utilise : $(\partial u_\gamma)^2 = s - \lambda T\chi_{u_\gamma}$ et $(\partial u_\gamma)^2 = 0$ en dehors de Ω_{u_γ} .

On pose : $h = \frac{x}{|x|}$ et on calcule, pour $\alpha > 0$:

$$(\partial u_\gamma)^2(x - \alpha h) - (\partial u_\gamma)^2(x + \alpha h), \text{ puis on fait tendre } \alpha \text{ vers } 0.$$

Comme s est continue, $\lim_{\alpha \rightarrow 0^-} (s(x - \alpha h) - s(x + \alpha h)) = 0$.

On s'intéresse donc à la limite de

$$T\chi_{u_\gamma}((x - \alpha h) - T\chi_{u_\gamma}(x + \alpha h)).$$

Formellement :

$$T\chi_{u_\gamma}((x - \alpha h) - T\chi_{u_\gamma}(x + \alpha h)) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} T\chi_{u_\gamma}(x + \alpha z) \frac{4zh}{(z^2 - h^2)^2} dz.$$

On suppose que $\partial\Omega_{u_\gamma}$ admet une tangente en x et on note Π_x le demi-plan contenant O et limité par cette tangente.

On a alors : $\chi_{u_\gamma}(x + \alpha z) \xrightarrow{\alpha \rightarrow 0} \chi_{\Pi_x}(x + z)$ pour p.t. z .

On suppose d'abord que $\Pi_x = x + \{(z_1, z_2)/z_2 \geq 0\}$. Alors :

$$\int_{\mathbb{R}^2} T \chi_{\Pi_x}(x + z) \frac{4zh}{(z^2 - h^2)^2} dz = -\pi.$$

Dans le cas général (qui s'en déduit par rotation), on trouve $\pi(\nu_1 - i\nu_2)^2$ où $\vec{\nu}$ est la normale extérieure à Π_x . Donc : $\lim_{\alpha \rightarrow 0^-} (\partial u_\gamma)^2(x - \alpha h) = \frac{\lambda}{2}(\nu_1 - i\nu_2)^2$.

Remarque : $\partial\Omega_{u_\gamma}$ étant lipschitzienne, elle a une tangente en \mathcal{H}^1 presque tout point.

On en déduit : $\lim_{\alpha \rightarrow 0^-} \nabla u_\gamma(x - \alpha h) = \mu \vec{\nu}$, en posant : $\mu = -\sqrt{2\lambda}$.

4. Analyticité de la frontière.

On pose : $\Omega = (\Omega_{u_\gamma} \setminus \Lambda) \setminus S$ où S est un segment reliant Λ à $\partial\Omega_{u_\gamma}$.

On a : $\Delta u_\gamma = 0$ dans Ω , c'est donc la partie imaginaire d'une fonction holomorphe : $f = v + i u_\gamma$.

Comme $\nabla u_\gamma \in L^\infty(\mathbb{R}^2)$, ∇v est dans $L^\infty(\Omega)$; d'où, comme d'autre part $\partial\Omega_{u_\gamma}$ est lipschitzienne, v est (localement) lipschitzienne au voisinage de $\partial\Omega_{u_\gamma}$; on peut donc prolonger v de manière lipschitzienne sur $\partial\Omega_{u_\gamma}$. (En faisant tendre ε vers 0 dans $v((1 - \varepsilon)x) - v((1 - \varepsilon)y)$ où x et y sont deux points de $\partial\Omega_{u_\gamma}$ où il y a une tangente, on obtient que $v = \mu \sigma$ sur $\partial\Omega_{u_\gamma}$, σ étant l'abscisse curviligne sur $\partial\Omega_{u_\gamma}$). On considèrera donc désormais que f et v sont définies sur $\Omega \cup \partial\Omega_{u_\gamma}$.

On considère à présent la ligne de niveau de u_γ : $\mathcal{L} = \{x/u_\gamma(x) = l\}$ paramétrée par son abscisse curviligne σ .

On pose : $V(\sigma) = v(x(\sigma))$; on a : $V'(\sigma) = \pm |\nabla u_\gamma(x(\sigma))|$; le signe dépendant de l'orientation prise sur \mathcal{L} . Donc V est strictement monotone sur \mathcal{L} . On en déduit que f est bijective de $\Omega \cup \partial\Omega_{u_\gamma}$ sur son image; on note $g = f^{-1}$. f' ne s'annule pas sur Ω (puisque $\nabla u_\gamma \neq \vec{0}$), donc g est holomorphe dans $f(\Omega)$ et :

$$g'(v + i u) = \frac{1}{f'(g(v + i u))}.$$

On veut montrer que g est lipschitzienne. Pour cela, on va montrer que $|g'|$ est majorée sur $f(\Omega)$ en montrant que $|f'|$ est minorée.

Pour cela, on se restreint à $\Omega \setminus \Lambda'$, où : $\Lambda' = \{x/u_\gamma(x) \geq a'\}$ (avec $a' < a$ pour avoir $\Lambda \subset \Lambda'$).

On définit : $\varphi(x) = -\vec{x} \cdot \nabla u_\gamma = \vec{y} \cdot \nabla v$, avec $\vec{y} = (-x_2, x_1)$. On sait que φ est strictement positive dans Ω .

Soit $x_0 \in \partial\Omega_{u_\gamma}$, un point en lequel $\partial\Omega_{u_\gamma}$ a une tangente $\vec{\tau}$, prise telle que la base $(\vec{\tau}, \vec{\nu})$ soit directe, $\vec{\nu}$ étant la normale extérieure à $\partial\Omega_{u_\gamma}$.

Comme Ω_{u_γ} est étoilé par rapport à tout point d'une boule B centrée en O , il existe un cône C de sommet x_0 , d'angle au sommet α_0 , tel que $B \subset C$ et $C \cap \partial\Omega_{u_\gamma} = \{x_0\}$ et $\vec{\tau}$ pointe nécessairement vers le complémentaire de C .

On a : $\lim_{t \rightarrow 1^-} \varphi(t x_0) = \vec{y}_0 \cdot \mu \vec{\tau} \geq |x_0| |\mu| \sin \alpha_0$.

Or $\sin \alpha_0 \geq \sin \alpha$ où α est donné par :

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{R}{R'} \quad \text{avec : } B(O, R) \subset \Lambda \subset \Omega_{u_\gamma} \subset B(O, R').$$

Donc $\mu \vec{y}_0 \cdot \vec{\tau} \geq |\mu| R \sin \alpha = \delta_1$.

Comme φ est strictement positive et continue sur Ω , $\delta_2 = \min_{x \in \partial \Lambda'} \varphi(x) > 0$.

On pose $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$. On a : $\varphi \geq \delta$ sur $\partial \Lambda'$ et $\lim_{t \rightarrow 1^-} \varphi(t x_0) \geq \delta$ pour tout point x_0 de $\partial \Omega_{u_\gamma}$, où il y a une tangente, i.e. \mathcal{H}^1 presque partout sur $\partial \Omega_{u_\gamma}$.

Soit :

$$\varphi_t : \begin{cases} \Omega' \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \varphi(t x). \end{cases}$$

La fonction φ_t est harmonique sur Ω' , continue sur $\overline{\Omega'}$, on peut donc écrire en utilisant la mesure harmonique ω^{x_1} : (cf [2],[3])

$$\varphi_t(x_1) = \int_{\partial \Omega'} \varphi_t(x) d\omega^{x_1}(x).$$

On fait ensuite tendre t vers 1 ; comme φ est continue en x_1 , $\varphi_t(x_1)$ tend vers $\varphi(x_1)$; comme d'autre part : $\forall E \subset \partial \Omega', \mathcal{H}^1(E) = 0 \Leftrightarrow \omega^{x_1}(E) = 0$ (car Ω' est lipschitzien, cf [4]), et que : $\lim_{t \rightarrow 1^-} \varphi(t x) \stackrel{\text{def}}{=} F(x) \geq \delta$ pour \mathcal{H}^1 p.t. $x \in \partial \Omega'$, on obtient en utilisant le théorème de convergence dominée de Lebesgue et le fait que ω^{x_1} est une mesure positive :

$$\begin{aligned} \int_{\partial \Omega'} \varphi_t(x) d\omega^{x_1}(x) &\xrightarrow{t \rightarrow 1} \int_{\partial \Omega'} F(x) d\omega^{x_1}(x) \\ &\geq \delta \int_{\partial \Omega'} d\omega^{x_1} = \delta. \end{aligned}$$

donc $\varphi(x_1) \geq \delta$ pour tout $x_1 \in \Omega'$.

On en déduit que $|f'| \geq \delta'$ et donc : $g' \in L^\infty(\Omega')$.

On va étudier g (et g') sur un (petit) rectangle $A =]\alpha_1, \alpha_2[\times]0, \beta[$. g' est bornée sur l'intérieur de A , donc g est uniformément lipschitzienne sur l'intérieur de A , et comme g est continue sur A , on en déduit que g est lipschitzienne sur A .

On pose :

$$\begin{cases} G_u(v) = g'(v + i u) & \text{pour } u > 0, \\ G_0(v) = \text{dérivée au sens de } \mathcal{D}'(] \alpha_1, \alpha_2[) \text{ de } t \xrightarrow{\tilde{g}} g(t). \end{cases}$$

Comme g est holomorphe sur l'intérieur de A , on a : $G_u \in \mathcal{C}^\infty(] \alpha_1, \alpha_2[)$ pour $u > 0$. Comme \tilde{g} est uniformément lipschitzienne sur $] \alpha_1, \alpha_2[$, on en déduit que : $G_0 \in L^\infty(] \alpha_1, \alpha_2[)$.

Soit $x \in \partial\Omega_{u_\gamma}$, on a : $\tilde{g}^{-1}(x) = \mu \sigma(x)$ donc $\mu \tilde{g}'(v) = \vec{\tau}$, où $\vec{\tau}$ est la tangente à $\partial\Omega_{u_\gamma}$ en $\tilde{g}(v)$, d'où : $|G_0| = |\mu|^{-1}$ p.p.

On peut montrer que $G_u(v)$ converge vers $G_0(v)$ pour presque tout v .

Idée de la démonstration : on prend $z = v + iu$, Γ un demi-cercle de centre z , $\Gamma_\varepsilon = \Gamma \cap \{u \geq \varepsilon\}$ et : $\Gamma_\varepsilon \cap \{u = \varepsilon\} = \{a_\varepsilon + i\varepsilon; b_\varepsilon + i\varepsilon\}$.

La formule de Cauchy donne :

$$G_u(v) = \frac{1}{2i\pi} \int_{a_\varepsilon}^{b_\varepsilon} \frac{g'(t+i\varepsilon)}{t+i\varepsilon-z} dt + \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{g'(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta.$$

On fait tendre ε vers 0, en utilisant : $g'(\cdot + i\varepsilon_k) \xrightarrow{L^2 \text{ faible}} G_0$, pour une certaine suite $(\varepsilon_k)_k$, et on obtient :

$$G_u(v) = \frac{1}{2i\pi} \int_{a_0}^{b_0} \frac{G_0(t)}{t-(v+iu)} dt + \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} \frac{g'(\zeta)}{\zeta-(v+iu)} d\zeta.$$

A présent, on fait tendre u vers 0, la première intégrale est en fait $F_u(v) = (\Phi * \frac{1}{\cdot + iu})(v)$ où $\Phi(t) = -G_0(t) \chi_{[a_0, b_0]}(t)$, et en utilisant la transformée de Fourier, on montre que F_u converge dans L^2 , donc presque partout, quitte à extraire une sous-suite.

En utilisant le fait que les lignes de niveau de u_γ sont étoilées par rapport à tous les points d'une boule B , on montre que, à condition de prendre A assez petit, $\arg(g')$ reste dans un intervalle de longueur strictement inférieure à 2π ; on va donc pouvoir définir une fonction h holomorphe dans A par : $h(v+iu) = i \log(\mu g'(v+iu))$.

Si on pose $h_0(v) = i \log(\mu G_0(v))$, d'après ce qui précède, on a :

(*) $h(v+iu)$ converge vers $h_0(v)$ qui est réel, quand u tend vers 0.

On pose :

$$\tilde{h}(v+iu) = \begin{cases} h(v+iu) & \text{si } u > 0, \\ \bar{h}(v+iu) & \text{si } u < 0. \end{cases}$$

Soit Γ_0 un cercle de centre $z_0 \in \{u = 0\}$ et de rayon r_0 ; on le coupe à $u = \pm\varepsilon$.

On pose :

$$\begin{aligned} \Gamma_{+\varepsilon} &= \{u \geq \varepsilon\} \cup (\{u = \varepsilon\} \cap B(z_0, r_0)), \\ \Gamma_{-\varepsilon} &= \{u \leq -\varepsilon\} \cup (\{u = -\varepsilon\} \cap B(z_0, r_0)). \end{aligned}$$

Soit $z \in B(z_0, r_0)$, on a, si $u > 0$:

$$\tilde{h}(z) = h(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma_{+\varepsilon}} \frac{\tilde{h}(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta$$

et :

$$0 = \int_{\Gamma_{-\varepsilon}} \frac{\tilde{h}(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta,$$

d'où, en faisant tendre ε vers 0 et en utilisant (*) :

$$\tilde{h}(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} \frac{\tilde{h}(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Donc \tilde{h} est holomorphe sur $B = B(z_0, \frac{r_0}{2})$, et on en déduit que g est la restriction d'une fonction holomorphe sur B , et donc, comme $\partial\Omega_{u_\gamma}$ est l'image par g de l'axe des réels (i.e. $\{u = 0\}$), on en déduit que $\partial\Omega_{u_\gamma}$ est *analytique*.

Remarque : Une fois que l'on sait que $\partial\Omega_{u_\gamma}$ est analytique, et donc que $|\nabla u_\gamma| = \text{constante}$ sur $\partial\Omega_{u_\gamma}$, on en déduit que $\partial\Omega_{u_\gamma}$ est *convexe*. (cf [5])

Références :

1. B. Kawohl, *Rearrangements and convexity of level set in PDE. Lecture Notes in Mathematics, 1150*, Springer-Verlag, Berlin-New York.
2. R.A. Hunt, R.L. Wheeden, *On the boundary values of harmonic functions*, Trans. Am. Math. soc. **132** (1968), 307-322.
3. _____, *Positive harmonic functions on Lipschitz domains*, Trans. Am. Math. soc. **147** (1970), 507-527.
4. B. Dahlberg, *On estimates of harmonic measure*, Arch. Rational Mech. Anal. **65** no. 3 (1977), 275-288.
5. D.E. Tepper, *Free boundary problem*, SIAM J. Math. Analysis **5** no. 5 (1974), 841-846.