PUBLICATIONS MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUES DE RENNES

YVES HELLEGOUARCH

À la recherche de l'arithmétique qui se cache dans la musique

Publications de l'Institut de recherche mathématiques de Rennes, 1986, fascicule 2
« Science, histoire et société », , p. 49-59

<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1986___2_49_0>

© Département de mathématiques et informatique, université de Rennes, 1986, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications mathématiques et informatiques de Rennes » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

A LA RECHERCHE DE L'ARITHMETIQUE QUI SE CACHE DANS LA MUSIQUE

Yves HELLEGOUARCH

1. De l'art de l'harmonie à l'art des sons.
2. L'intuition musicale et l'arithmétique.
3. La construction eulérienne.
4. L'immanence du groupe Z .
5. Apologie des nombres rationnels.

1. De l'art de l'harmonie à l'art des sons.

Avant de jouer de la musique, il est bon d'accorder ses instruments et avant d'en parler il n'est peut-être pas inutile de dire quelle musique on a en tête. Un de mes amis m'a dit un jour : *la musique, qui était l'art de l'harmonie, est en train de devenir l'art des sons, et personne ne le remarque !* Et bien, nous allons le remarquer ici ...

Pendant deux millénaires au moins — de Pythagore à Rameau — la musique occidentale a été en grande partie l'art de l'harmonie par excellence. Au XVIIIe siècle, L. Euler définissait la musique comme *la science de combiner les sons de manière qu'il en résulte une harmonie agréable* et il ajoutait qu'après avoir consulté des métaphysiciens il était en mesure de dire avec certitude que *toute perfection fait naître le plaisir* et que *les choses dans lesquelles nous découvrons un manque de perfection ou une imperfection, nous déplaisent.* Euler étant Euler, il se lance vers 1731 dans la rédaction d'un monumental *Tentamen novae theoriae musicae, ex certissimis harmoniae principiis dilucide expositae* que j'appellerai ici *L'Essai* (figure 1).

Ce parti pris intellectualiste ne signifiait pas qu'Euler ignorait l'importance de la "matière" sonore en tant que telle. Ne dit-il pas : *La nature des instruments a d'ailleurs une si grande influence dans les charmes de la musique, qu'il importe beaucoup de savoir lequel, pour une composition donnée, mérite la préférence. Aussi ce choix a-t-il généralement lieu, et d'ordinaire l'auteur d'une mélodie indique l'instrument pour lequel il l'a écrite.*

Cependant ce côté "pratique" de la musique n'est pas son affaire : *Comme la partie pratique de la musique n'est autre chose que l'art de se servir des instruments de musique, elle n'appartient pas à notre sujet et nous ne nous en occuperons pas* (pour toutes ces citations, voir [1]).

A. Einstein [2] caractérise cette attitude avec netteté : *nous discutons souvent du médium le plus approprié aux œuvres pour clavier de J.S. Bach; mais peu importe, au fond, que nous en confiions l'exécution au clavecin, au clavicorde, à notre piano moderne ou à l'orgue — encore que la piano risque de leur conférer quelque chose d'exagérément matériel.*

Cependant, du vivant d'Euler déjà, le préromantisme se taillait un chemin dans les consciences et commençait à instruire le fameux "proçès de Newton" (procès bien mal dénommé par ailleurs).

(Cet article doit paraître dans la "Gazette des Mathématiciens n° 33, avril 1987)

Comme le dit G. Gusdorf [3] : *la réaction contre la pensée galiléenne consistera à faire du sensible, jusque-là simple point d'appui pour les généralisations de la connaissance abstraite, une instance de vérité qui possède en soi-même sa propre justification* ce qui se traduit, dans le domaine musical, par une mutation du sens de la musique instrumentale : *elle perd son caractère d'art mondain et devient le moyen par excellence de communiquer l'indicible, d'exprimer des sentiments plus profonds que ne peut le faire la parole* [2].

Pour un Novalis *l'univers est une musique pétrifiée et le vrai savant réveillera cette musique endormie. D'où l'importance symbolique de la flûte de Pan, de la harpe éolienne, du glasharmonika dans la poésie, la peinture et la musique romantiques; ces instruments et d'autres encore ont la vertu de faire parler les éléments, l'air et le vent ou l'eau* [4].

Je suppose que c'est dans cette perspective qu'il faut placer certaines œuvres de la maturité de Mozart : n'écrivit-il pas en 1791 un quintette pour glasharmonika, flûte, hautbois, alto et violoncelle et aussi ... *La flûte enchantée* ?

Et de nos jours les compositeurs contemporains, lointains descendants des théosophes du XIXe siècle, parcourent la nature, un magnétophone en bandoulière, à la recherche d'une matière sonore toujours plus neuve ...

2. L'intuition musicale et l'arithmétique.

A partir de maintenant, je n'utiliserai plus le mot musique que dans le sens eulérien d'art de l'harmonie. Comme je l'ai mentionné plus haut, cette conception remonte à la nuit des temps et on attribue à Pythagore un certain nombre de lois des cordes vibrantes comme la relation

$$NL = c^{te}$$

entre la fréquence N du son émis par une corde et la longueur L de la partie de la corde qui vibre.

Cette tradition a bien traversé les siècles (jusqu'au XVIIIe) et de nombreux érudits ont repris et discuté les conceptions pythagoriciennes [5] : Platon, Plotin, Saint-Augustin, Al-Farabi, Avicenne, Saint-Thomas, Zarlino, le père Mersenne, Descartes, Rameau, d'Alembert, Euler.

Mais le texte que je trouve le plus fascinant à ce sujet est la lettre du 17 avril 1712 de Leibniz à Christian Gotdbach, dont voici quelques passages célèbres [5] :

De même qu'on a coutume de dire que les primitifs — en arithmétique — sont incapables de compter au-delà de trois, de même nos oreilles civilisées ne saisissent — en musique — que des rapports tirés des nombres 1, 2, 3 et 5; si elles étaient mieux exercées, elles seraient en mesure d'aller juqu'à 7.

Peut-être y parviendront-elles un jour ?

Mais, en revanche, il y a peu de chances que l'homme puisse jamais accéder aux nombres 11 et 13. Il faut donc penser que la raison des consonances réside dans l'accord des mouvements vibratoires. La musique est un exercice caché d'arithmétique tel que l'esprit ignore qu'il compte. Cette ignorance provient du fait qu'il y a, dans les perceptions confuses ou non sensibles, quelque chose qu'on ne peut saisir distinctement.

Il est faux de prétendre qu'il n'y a rien dans l'âme que la conscience ne connaisse; l'âme, lors même qu'elle ne sent pas qu'elle compte, éprouve néanmoins le résultat de son calcul secret : soit qu'elle se délecte aux consonances, soit qu'elle subisse la blessure des dissonances, ce qu'elle ressent résulte des rapports numériques.

C'est ainsi que la délectation trouve sa source dans de nombreux accords imperceptibles. Quelle erreur de ne vouloir attribuer à l'âme que les seules opérations dont elle est consciente ! On dénonce pareille inconséquence non seulement chez des philosophes antérieurs à Descartes, mais aussi chez les cartésiens et chez d'autres auteurs plus récents tels que Locke et Bayle.

Mais, pour revenir au sujet, on dira que dans l'octave un mouvement sur deux des vibrations du son aigu s'accorde avec les

mouvements du son grave; dans la quinte, un mouvement sur trois de l'aigu avec un sur deux du grave ...

On ne dira pas cependant que les rapports numériques insaisissables à l'ouïe plaisent en soi à l'âme, sinon en ce sens qu'ils déplaisent lorsqu'ils s'écartent de ce qui est rationnel : encore que, par accident, les dissonances plaisent parfois et sont utilisées à bon escient en vue de la délectation au même titre que les ombres lorsqu'elles sont associées avec ordre aux lumières, etc.

3. La construction eulérienne.

Euler était en filiation avec Leibniz par l'intermédiaire de son "professeur", J. Bernoulli et il me paraît probable qu'il connaissait les idées de Leibniz sur la musique; en tout cas *l'Essai* apparaît comme une sorte de mise en application d'un programme leibnizien.

Un des buts d'Euler était de construire des "genres" (c'est-à-dire des échelles musicales) harmonieux, donc simples, mais suffisamment riches pour permettre la création d'œuvres variées.

Conformément aux suggestions de Leibniz (et à la tradition), Euler utilise surtout les nombres du groupe multiplicatif $\langle 2,3,5\rangle$. Il associe à chaque entier du monoïde engendré par 3 et 5 un "genre" et il classe les éléments de ce monoïde dans l'ordre suivant :

$$1\,,\ \underbrace{3,5}\,,\ \underbrace{3^2,3.5,5^2}\,,\ \underbrace{3^3,3^2.5,3.5^2,5^3}\,,\text{etc.}$$

Si e désigne un élément de ce monoïde (l'exposant du genre), Euler construit une échelle dont le nombre de notes dans une octave est égal à $\sigma_0(e)$ c'est-à-dire au nombre de diviseurs de e . Si d désigne un diviseur de e , la construction d'Euler revient à lui associer l'intervalle $\dfrac{d}{2^{n(d)}}$ où $n(d)$ désigne la partie entière de $\log_2(d)$. On a donc

$$1 \leq \frac{d}{2^{n(d)}} < 2\,.$$

Puis, Euler range les intervalles par ordre croissant et leur donne des noms, avec une sûreté de somnambule, en se frayant un chemin à travers une véritable jungle de termes musicaux, on y reviendra ... Les premiers genres qu'Euler considère sont très harmonieux, mais d'une simplicité proche de l'indigence. Arrivé au dix-huitième genre, c'est-à-dire à $e = 3^3.5^2$, Euler s'émerveille [1] :

Notre dix-huitième genre est absolument le même que le genre diatonico-chromatique principalement employé aujourd'hui; il contient en effet dans une octave douze sons séparés l'un de l'autre par des intervalles presqu'égaux, qui sont des demi-tons et des limmas majeurs et mineurs.

Bien que depuis longtemps ce genre soit consacré par l'usage, cependant les musiciens n'ont cessé d'y faire des changements afin de le rendre plus agréable à l'oreille, et ils ont si bien réussi que la disposition de sons qui obtient le plus d'approbation, ne s'éloigne de la vraie harmonie que par le seul son marqué $la^\sharp = si^\flat$ *, et qu'ainsi ils sont parvenus à un degré de concordance auquel on aurait à peine pu espérer d'atteindre avec le secours de l'ouïe.*

Par acquis de conscience, Euler examine quelques genres de rang plus élevé et constate qu'ils ne présentent aucun avantage décisif sur le dix- huitième genre. Au passage, il rencontre des intervalles nouveaux qu'il continue à désigner avec la même sûreté de somnambule.

Dix-huitième genre : $e = 3^3.5^2$.

d	$n(d)$	$d/2^{n(d)}$	dans l'ordre ↗	nom de la note
1	0	1	1	do
3	1	3/2	$3^3.5/2^7$	do$^\sharp$
3^2	3	$3^2/2^3$	$3^2/2^3$	ré
3^3	4	$3^3/2^4$	$3.5^2/2^6$	ré$^\sharp$
5	2	$5/2^2$	$5/2^2$	mi
3.5	3	$3.5/2^3$	$3^3.5^2/2^9$	fa
$3^2.5$	5	$3^2.5/2^5$	$3^2.5/2^5$	fa$^\sharp$
3^35	7	$3^3.5/2^7$	3/2	sol
5^2	4	$5^2/2^4$	$5^2/2^3$	sol$^\sharp$
3.5^2	6	$3.5^2/2^6$	$3^3/2^4$	la
$3^2.5^2$	7	$3^2.5^2/2^7$	$3^2.5^2/2^7$	la$^\sharp$
$3^3.5^2$	9	$3^3.5^2/2^9$	3.5/2	si

Intervalles :

Nom de l'intervalle	Fréquences
demi-tons	25/24 , 27/25 , 16/15 , 135/128
tons	9/8 , 10/9 , 256/225
tierces mineures	75/64 , 6/5 , 32/27
tierces majeures	5/4 , 32/25
quartes	675/512 , 4/3 , 27/20
quartes augmentées	25/18 , 45/32 , 64/45 , 36/25
quintes	40/27 , 3/2 , 1024/675
sixtes mineures	25/16 , 8/5
sixtes majeures	5/3 , 27/16 , 128/75
septièmes mineures	9/5 , 16/9 , 225/128
septièmes majeures	15/8 , 48/25 , 50/27 , 256/135

Remarque : Le nombre de demi-tons correspond à celui des septièmes majeures et on peut les ordonner pour que leur produit soit égal à 2 , etc. La quarte augmentée (l'"affreux triton") se correspond à elle-même.

4. L'immanence du groupe Z.

Lorsque L. Euler découvre les propriétés du dix-huitième genre il trouve dans une octave "douze sons séparés l'un de l'autre par des intervalles presqu'égaux", c'est-à-dire une échelle presque "tempérée".

L'invention de l'échelle tempérée, c'est-à-dire du groupe multiplicatif engendré par $2^{1/12}$, est généralement attribuée à Werckmeister (1645-1706), mais en fait il n'y a rien de moins sûr et il est probable qu'elle était "dans l'air", depuis déjà longtemps, à l'époque de Werckmeister.

L'échelle tempérée constitue un modèle mathématique puissant mais rigide pour mettre de l'ordre dans la théorie des intervalles; malheureusement, les seuls intervalles qui soient "parfaits" (c'est-à-dire "justes" pour une oreille divine) sont ceux du groupe engendré par 2 . La quinte tempérée $2^{7/12}$ sonne faux pour des oreilles divines (qui souhaitent 3/2) et la tierce majeure tempérée $2^{4/12} = 2^{1/3}$ sonne faux pour des oreilles humaines (qui souhaitent 5/4). Voici ce qu'en dit Euler :

En effectuant cette nouvelle division de l'octave (comme dans le dix-huitième genre) les musiciens ont agi, non pas seulement d'après leur fantaisie, mais aussi guidés involontairement par les principes de l'harmonie; car les sons qu'ils ont trouvé bon d'ajouter ont donné naissance à un genre de musique assez parfait. Il est donc vrai de dire que cette heureuse invention est due au hasard plutôt qu'à la connaissance de la véritable harmonie; car on n'a pas pu prévoir que le genre diatonico-chromatique naturel (le dix-huitième genre) comprendrait douze sons, dont deux voisins quelconques diffèrent l'un de l'autre d'un demi-ton.

Ce qui le prouve davantage encore, c'est que beaucoup de musiciens ont cru que la véritable harmonie consistait dans l'égalité des intervalles plutôt que dans leur simplicité; et, voulant avant tout faire triompher leur opinion, ils n'ont pas balancé à diviser l'octave en douze parties égales, et à créer ainsi les douze sons habituels. Ils furent d'autant plus affermis dans leur opinion que, cette division rendant tous les intervalles égaux, un morceau de musique quelconque peut être exécuté, sans aucun changement (c'est-à-dire sur un instrument à sons fixes), dans tous les modes, et être transposé du mode primitif dans un autre quelconque.

A cet égard, ils ne se sont pas trompés; mais ils n'ont pas remarqué que l'égalité des intervalles ne laissait pas un seul mode où il ne fût porté atteinte à l'harmonie.

En somme, Euler préfère garder l'harmonie et perdre la structure de groupe ...

Et cependant elle tourne ...; Euler la réintroduit quasi-inconsciemment à son tour en donnant des noms aux intervalles — une bonne centaine d'intervalles — et en ne faisant qu'une seule erreur!

Comment s'y prend-il? Ce n'est pas bien clair et il n'est pas très bavard sur ce point :

Jusqu'ici les musiciens ne se sont pas encore accordés sur la division de l'octave, et ils la font de plusieurs manières. Cependant, dans les écrits de quelques-uns, j'en ai trouvé entre autres une qui paraît réunir le plus d'opinions en sa faveur. Elle présente ses intervalles dans l'ordre suivant, en commançant par le son fa :

fa		si	
	) limma mineur		) demi-ton majeur
fa$^{\sharp}$		do	
	) demi-ton majeur		) demi-ton mineur
sol		do$^{\sharp}$	
	) demi-ton mineur		) limma majeur
sol$^{\sharp}$		ré	
	) demi-ton majeur		) demi-ton mineur
la		ré$^{\sharp}$	
	) limma majeur		) demi-ton majeur
la$^{\sharp}$		mi	
	) demi-ton mineur		) demi-ton majeur
si		fa	

Ces intervalles ont été extraits de l'ouvrage de Mattheson intitulé *Die General-Bass Schule*. Mais il est certain qu'Euler est ici trop modeste, car il étudie aussi le genre d'exposant $3^3.5^2.7$, que Mattheson n'a sûrement pas connu (à cause de la présence du nombre 7) et ne fait pas une seule erreur pour nommer les intervalles de ce genre.

Comment peut-on savoir que les dénominations choisies par Euler sont cohérentes (à une exception près)? Voici une petite histoire à ce sujet.

Il y a quelques années, en lisant *The language of Music* de Deryck Cooke, j'avais été frappé par la réflexion suivante concernant la spirale des quintes (voir la figure 2) :

... whereas musically we want the equation :

$$3^{12}/2^{19} = 1$$

The correct mathematical equation is

$$3^{12}/2^{19} = 1{,}014$$

...

Cette réflexion me choquait par son parti pris archimédien (le second membre représente un nombre réel en écriture décimale, pourquoi diable un nombre réel et pas un nombre 2-adique ou 3-adique?) et je m'étais dit que l'opération effectuée par les musiciens était en fait purement algébrique et qu'elle revenait simplement à imposer la relation :

$$3^{12} \equiv 2^{19}$$

dans le groupe abélien libre $\langle 2, 3\rangle$, c'est-à-dire à construire l'épimorphisme :

$$\langle 2, 3\rangle \xrightarrow{\varphi_0} \langle 2, 3\rangle/\langle 3^{12}; 2^{19}\rangle$$

En regardant de plus près, on voit que l'image de φ_0 est isomorphe à Z et que $\varphi_0(\langle 2\rangle)$ est un sous-groupe d'indice 12 (voir [6] et [7]) de l'image de φ_0 .

Si l'on considère maintenant la spirale des tierces (voir la figure 2) on est conduit à imposer la relation :

$$5^3 \equiv 2^7$$

dans le groupe abélien libre $\langle 2, 5\rangle$, c'est-à-dire à construire l'épimorphisme :

$$\langle 2, 5\rangle \xrightarrow{\varphi_1} \langle 2, 5\rangle/\langle 5^3 : 2^7\rangle .$$

L'image de φ_1 est encore isomorphe à Z mais $\varphi_1(\langle 2\rangle)$ est un sous-groupe d'indice 3 de l'image de φ_1 .

En fait φ_0 et φ_1 se prolongent en un épimorphisme :

$$\langle 2, 3, 5\rangle \xrightarrow{\varphi_2} \langle 2, 3, 5\rangle/\langle 3^{12} : 2^{19}, 5^3 : 2^7\rangle$$

qui possède les mêmes propriétés que φ_0 . Et on peut aller encore plus loin en construisant :

$$\langle 2, 3, 5, 7\rangle \xrightarrow{\varphi} \langle 2, 3, 5, 7\rangle/$$
$$\langle 3^{12} : 2^{19}, 5^3 : 2^7, 3^2.5^2 : 2^5.7\rangle$$

qui possède encore les mêmes propriétés que φ_0 . Or, ce que j'ai constaté récemment — et avec beaucoup d'étonnement — c'est que, à une exception près, le nom donné par Euler à l'intervalle x est invariablement $\varphi(x)$!

Exemples :

1) Reprenons le dix-huitième genre (Euler en a étudié 25).

Nom de l'intervalle	x	$\varphi(x)$
demi-tons	25/24 , 27/25 , 16/15 , 135/128	1
tons	9/8 , 10/9 , 256/225	2
tierces mineures	75/64 , 6/5 , 32/27	3
tierces majeures	5/4 , 32/25	4
quartes	675/512 , 4/3 , 27/20	5
quartes augmentées	25/18 , 45/32 , 64/45 , 36/25	6
quintes	40/27 , 3/2 , 1024/675	7
sixtes mineures	25/16 , 8/5	8
sixtes majeures	5/3 , 27/16 , 128/75	9
septièmes mineures	9/5 , 16/9 , 225/128	10
septièmes majeures	15/8 , 48/25 , 50/27 , 256/135	11

2) Quelle est donc cette "erreur" commise par Euler?

Elle concerne une note astérisquée (non connue du "vulgaire") du quatorzième genre (genre d'exposant $e = 3.5^3$).

Euler classe l'intervalle $x = 3.5^3/2^8$ que cette note fait avec la tonique dans les quartes augmentées (tritons), mais on trouve que $\varphi(3.5^3/2^8) = \varphi(3/2) = 7$ donc que c'est une quinte!

5. Apologie des nombres rationnels.

Si l'on demande ce qu'est un intervalle à un élève de Conservatoire élevé dans l'évangile selon Werckmeister, il répondra sans hésiter que c'est un élément du groupe multiplicatif engendré par le *nombre réel* $2^{1/12}$.

Si on lui demande pourquoi il a choisi un nombre irrationnel, il répondra sans doute que les nombres rationnels conduisent à des incohérences.

Si on lui demande pourquoi $2^{1/12}$, il dira que, évidemment, on divise l'octave (c'est-à-dire 2) en douze parties égales en se basant sur la loi de Fechner.

Si on lui demande pourquoi 12 , il répondra que c'est une pure convention, qu'on aurait aussi bien pu choisir 11 ou 13, mais que 13 porte malheur, etc.

On a vu dans le paragraphe 4 que les nombres rationnels bien utilisés ne conduisent pas à des incohérences et que le grand ordonnateur Z "lurks behind the scenes" (pour reprendre une expression de J.W.S. Cassels). L'argument concernant la loi de Fechner serait solide si cette loi l'était aussi, mais il se trouve qu'elle ne correspond absolument pas à ce que l'on sait de la perception harmonique des intervalles.

Des expériences faites par C. Stumpf, il y a plus de cinquante ans, montrent que la perception harmonique des intervalles ne peut être une grandeur mesurable.

En fait, C. Stumpf a montré, par sondage sur un échantillon de sujets musicalement

naïfs, que 75 % d'entre eux ne distinguent pas deux notes simultanées dont le rapport des fréquences est de 2 , que la proportion tombe à 50 % pour le rapport 3/2 , à 33 % pour le rapport 4/3 , à 25 % pour 5/4 , à 10 % pour 9/8 , etc. [9].

Si je prends :

$$x = \text{perception}\left(\frac{3}{2}\right), y = \text{perception}\left(\frac{5}{4}\right),$$

$$\text{et } z = \text{perception}\left(\frac{8}{5}\right)$$

j'ai : $x < y$ (d'après C. Stumpf)

mais : $xz > yz$ (d'après C. Stumpf);

donc l'axiome GR_2 de [8] n'est pas vérifié !

Reste à dire pourquoi il y a douze notes dans une octave. Cela vient de la considération de la valeur absolue archimédienne (valeur absolue "ordinaire") sur $\mathbf{Q}$.

Ecrire que :

$$\begin{cases} 3^y : 2^x & \text{est voisin de 1} \\ 5^v : 2^u & \text{est voisin de 1} \end{cases}$$

c'est chercher les meilleures approximations de $\frac{\log 3}{\log 2}$ $\left(\text{resp } \frac{\log 5}{\log 2}\right)$ et on sait qu'elles sont données par les développements en fractions continues :

$$\begin{cases} \dfrac{\log 3}{\log 2} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3+}}}} \\ \dfrac{\log 5}{\log 2} = 2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{9 + \cfrac{1}{\ldots}}} \end{cases}$$

Si l'on cherche des approximations simples, il est naturel de s'arrêter avant l'apparition de 3 (resp 9) dans la suite des quotients partiels, on trouve :

$$\begin{cases} \dfrac{\log 3}{\log 2} \sim 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \frac{1}{2}}} = \dfrac{19}{12} \\ \dfrac{\log 5}{\log 2} \sim 2 + \dfrac{1}{3} = \dfrac{7}{3} \end{cases}$$

ce qui donne précisément les "relations des musiciens".

Personnellement, j'aimerais croire que les nombres dont parle Leibniz sont les nombres rationnels, c'est-à-dire des nombres infiniment plus précieux que les réels ...

Leur aspect archimédien correspondrait à la perception *mélodique* des intervalles, leur hauteur correspondrait à la perception *harmonique*, à moins que ce ne soit la notion de degré d'agrément définie par Euler ...

Euler, à l'instar de Newton, avait ramassé beaucoup de jolies coquilles et de galets plus lisses que les autres sur le rivage de l'Océan de l'Harmonie Universelle; les disciples de Werckmeister les ont mis dans un sac et les ont rejetés à la mer : ils y sont encore ... ∎

TENTAMEN NOVAE THEORIAE MVSICAE

EX

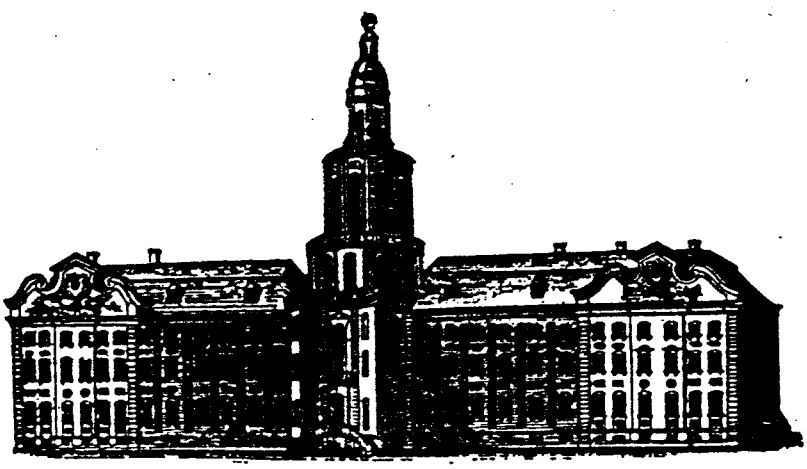
CERTISSIMIS

HARMONIAE PRINCIPIIS

DILVCIDE EXPOSITAE.

AVCTORE

LEONHARDO EVLERO.

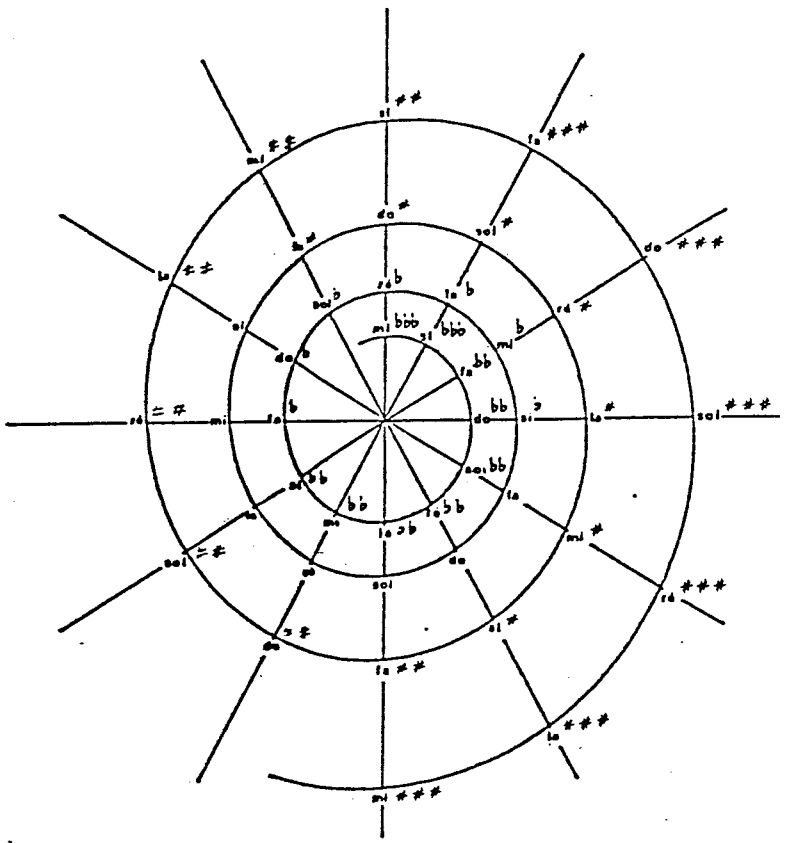


PETROPOLI, EX TYPOGRAPHIA ACADEMIAE SCIENTIARVM.

ɔɔɔɔccxxxix.

Spirale des quintes

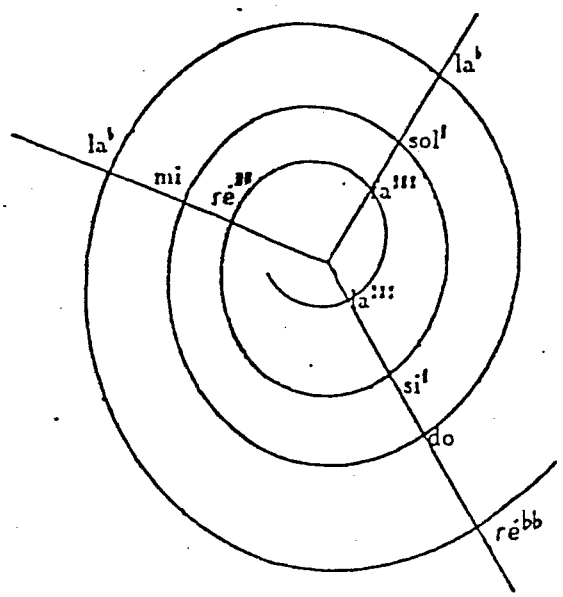
quinte $= \frac{3}{2}$



Remarquons, c'est essentiel, que sur un même rayon de la spirale se trouvent des notes qui correspondent à une seule touche sur un piano (mais que les violonistes ne jouent pas nécessairement à la même hauteur).

Spirale des tierces

tierce $= \frac{5}{4}$



Références

[1] L. EULER. — *Tentamen novae theoriae musicae ex certissimis harmoniae principiis dilucide expositae.* Saint-Petersburg, 1739.

[2] A. EINSTEIN. — *La Musique Romantique.* Gallimard, 1959.

[3] G. GUSDORF. — *Naissance de la Conscience romantique au siècle des lumières.* Payot, 1976.

[4] G. GUSDORF. — *Fondements du savoir romantique.* Payot, 1982.

[5] E. EMERY. — *Temps et Musique, L'âge d'Homme,* 1975.

[6] Y. HELLEGOUARCH. — *"Scales"*, Comptes Rendus Mathématiques. Soc. Roy. du Canada, vol IV n° 5 1982 et vol. V n° 2, 1983.

[7] Y. HELLEGOUARCH. — *Gammes naturelles,* dans Musique et Mathématiques, publication A.P.M.E.P., 53, 1983.

[8] N. BOURBAKI. — *Topologie générale* ch V, Hermann.

[9] R. DE CONDÉ. — *Histoire universelle de la Musique.* t. II, Seuil.

Yves HELLEGOUARCH
Département de Mathématiques
Université de Caen
14032 CAEN