PUBLICATIONS MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUES DE RENNES

YVES GUIVARC'H

Propriétés ergodiques, en mesure infinie, de certains systèmes dynamiques fibrés

Publications de l'Institut de recherche mathématiques de Rennes, 1986, fascicule 1 « Probabilités », , p. 61-88

<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1986___1_61_0>

© Département de mathématiques et informatique, université de Rennes, 1986, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications mathématiques et informatiques de Rennes » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

PROPRIETES ERGODIQUES, EN MESURE INFINIE, DE CERTAINS SYSTEMES DYNAMIQUES FIBRES

GUIVARC'H Yves I.R.M.A.R.
UNIVERSITE DE RENNES I - 35042 RENNES CEDEX

On considère ici des systèmes dynamiques ayant de fortes propriétés stochastiques comme c'est le cas des difféomorphismes d'Anosov ou du flot géodésique en courbure négative sur une variété compacte V. On étudie des systèmes dynamiques fibrés au-dessus de ces systèmes de base, la fibre étant le groupe $\mathbb{R}^d$ ou $\mathbb{Z}^d$; ces systèmes commutent donc avec l'action de $\mathbb{R}^d$ ou $\mathbb{Z}^d$, le quotient étant le système de base. Du point de vue mesurable, ces systèmes s'écrivent comme produits croisés à l'aide d'une fonction f à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ et les propriétés étudiées sont donc proches de celles des sommes de Birkhoff. Ce cadre permet d'englober diverses situations concrètes comme les marches aléatoires sur $\mathbb{R}^d$ avec mémoire [9] ou les flots géodésiques sur un revêtement abélien d'une variété compacte. Le modèle du gaz de Lorentz plan [5] appartient aussi à cette famille puisqu'il peut se présenter comme un flot géodésique (avec réflexion) sur un revêtement à fibre $\mathbb{Z}^2$ d'un tore plat bidimensionnel muni d'un obstacle circulaire réfléchissant. Les techniques développées ici ne permettent pas d'étudier cet exemple mais plutot des situations beaucoup plus régulières à potentiel $\mathbb{Z}^2$-périodique et différentiable conduisant à des flots d'Anosov ou vérifiant l'axiome A de Smale [4].

Les propriétés étudiées correspondent dans le cas des marches aléatoires à des propriétés de théorie du potentiel comme la constance des harmoniques bornées (6) ou la finitude de la mesure potentiel et les preuves en sont inspirées ; elles se relient ici à la propriété d'ergodicité en mesure infinie. Ces méthodes prolongent celles de [8] où sont étudiés les théorèmes limites du calcul des probabilités pour les systèmes envisagés ici.

Les résultats obtenus permettent d'établir la propriété K pour des produits croisés en mesure finie. Grâce au théorème local limite de [8] et en reprenant l'argumentation de [12] on peut ainsi construire une large classe de systèmes différentiables possédant la propriété K mais non celle de Bernouilli [23]. On peut aussi retrouver des résultats de [17] concernant l'ergodicité de flots géodésiques, en restriction aux points non errants, sur des quotients non compacts de l'espace hyperbolique par des sous-groupes discrets.

Ces conclusions reposent sur l'étude préalable de la "propriété K" ou de l'ergodicité pour des transformations fibrées au-dessus d'un sous-shift et la méthode du codage [2]. Par exemple le cas des systèmes d'Anosov s'en déduit rapidement.

La partie A décrit un certain nombre de notions préalables simples tandis que la partie B est consacrée aux applications.

Durant la rédaction de cet article un travail de D.J. Rudolph est parvenu à l'auteur [18] ; ce travail contient certains résultats voisins des résultats ici présentés mais prouvés par des méthodes différentes.

Nous remercions vivement J.-P. Conze et J.-P. Thouvenot dont l'aide et les questions nous ont été très précieuses au cours de ce travail.

A – PROPRIETES d'ERGODICITE

I – DEFINITIONS

On considère un espace mesuré E, une mesure σ-finie m, une transformation T préservant m. L'espace des fonctions m-intégrables sera noté $\mathbb{L}^1(m)$ et sera supposé séparable. Les mesures finies ayant une densité par rapport à m seront identifiées aux éléments de $\mathbb{L}^1(m)$ et, par exemple, l'ensemble des mesures de ce type ayant une masse nulle sera noté $\mathbb{L}^1_o(m)$; la variation totale d'une telle mesure α sera notée $\|\alpha\|_1$. La tranformée de α par T sera notée αT. La mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$ (ou $\mathbb{Z}^d$) sera notée $\mathcal{P}$; une partition $\mathcal{A}$ de E sera dite mesurable si la tribu naturelle sur l'espace quotient $E/\mathcal{A}$ sépare les points de $E/\mathcal{A}$. La tribu engendrée par $\mathcal{A}$ sera encore notée $\mathcal{A}$. L'image de $\mathcal{A}$ par T, notée $T\mathcal{A}$ est formée des images réciproques $T^{-1}(A)$ avec $A \in \mathcal{A}$. On dira que $\mathcal{A}$ est propre si le saturé, par rapport à $\mathcal{A}$, de tout ensemble de mesure finie est encore de mesure finie. En ce cas on peut trouver des probabilités m_x ($x \in E$) portées par les éléments de $\mathcal{A}$ telle que m se désintègre sous la forme

$$m = \int_E m_x dm(x) = \int_{\bar{E}} \bar{m}_{\bar{x}} d\bar{m}(\bar{x})$$

où $\bar{m}$ est la mesure image de m sur $\bar{E} = E/\mathcal{A}$. Si T préserve $\mathcal{A}$, c'est-à-dire $T\mathcal{A} \subset \mathcal{A}$, une transformation quotient $\bar{T}$ se trouve définie sur $\bar{E}$.

Enfin, si T est un automorphisme, la partition $\mathcal{A}$ sera dite génératrice si les $T^n\mathcal{A}$ ($n \in \mathbb{Z}$) engendrent la tribu canonique de E. Ces définitions doivent être interprétées modulo la mesure m.

Définition 1.

Soit T un automorphisme de l'espace mesuré (E,m), $\mathcal{A}$ une partition génératrice propre de E qui est préservée par T. On dit que le système dynamique (E,m,T) possède la propriété K par rapport à $\mathcal{A}$ si la tribu $\bigcap_{n \geq 0} T^n\mathcal{A}$ est triviale.

Définition 2.

Soit T un endomorphisme de (E,m). On dit que le système (E,m,T) est exact si pour tout $\alpha \in \mathbb{L}^1_o(m)$ on a $\lim_n \|\alpha T^n\|_1 = 0$.

Si $\mathcal{B}$ est la tribu canonique sur E, l'exactitude de (E,m,T) équivaut à la trivialité de la tribu asymptotique $\bigcap_{n \geq 0} T^n\mathcal{B}$. En effet, si la fonction bornée F est asymptotique, elle s'écrit pour tout $n \geq 0$: $F = F_n \circ T^n$.

Pour $\alpha \in \mathbb{L}^1_o(m)$ on a :

$$|\alpha(F)| = |(\alpha T^n)(F_n)| \leqslant \|\alpha T^n\|_1 \, \|F_n\|_\infty \leqslant \|\alpha T^n\|_1 \, \|F\|_\infty$$

et l'hypothèse d'exactitude donne $\alpha(F) = 0$, $F = cte$.

Inversement, si $\lim_n \|\alpha T^n\|_1 > 0$ pour un certain α de $\mathbb{L}^1_o(m)$, on peut trouver des F_n avec $\|F_n\|_\infty = 1$ et $|(\alpha T^n)(F_n)| \geqslant \varepsilon > 0$.

Soit $|\alpha(F_n \circ T^n)| \geqslant \varepsilon > 0$. On peut trouver une sous-suite d'entiers n telle que, pour tout k $F_n \circ T^{n-k}$ converge vers F^k faiblement dans la dualité entre $\mathbb{L}^1$ et $\mathbb{L}^\infty$. Alors on a $F^0 = F^k \circ T^k$ par passage à la limite faible à partir de $(F_n \circ T^{n-k}) \circ T^k = F_n \circ T^n$. De plus F^0 est non constante car $|\alpha(F^0)| = \lim_n |\alpha(F_n \circ T^n)| \geqslant \varepsilon$. La tribu asymptotique est donc non triviale.

Ceci montre que si T est un automorphisme de (E,m) respectant la partition $\mathcal{G}$, la propriété K pour (E,m,T) relativement à $\mathcal{G}$ équivaut à l'exactitude du système quotient $(E/\mathcal{G}, \bar{T}, \bar{m})$. Pour une situation voisine, on pourra consulter [15].

Exemple.

Considérons une suite $X_n (n \in \mathbb{Z})$ de variables aléatoires indépendantes de même loi p portées par une partie finie S de $\mathbb{Z}$. Rappelons [21] que si les éléments de S ne sont pas en progression arithmétique, les puissances de convolutions p^n satisfont la propriété des suites moyennantes :

$$\lim_n \sum_{k \in \mathbb{Z}} |p^n(k+1) - p^n(k)| = 0.$$

Ceci s'écrit encore $\lim_n \|p^n * (\delta_1 - \delta_0)\|_1 = 0$ et on supposera ici cette propriété réalisée. Considérons la mesure produit $\pi = p^{\mathbb{Z}}$ sur $S^{\mathbb{Z}}$ et l'espace produit $E = S^{\mathbb{Z}} \times \mathbb{Z}$ muni de la mesure produit $\pi \times P$. Le décalage naturel sur $S^{\mathbb{Z}}$ sera noté Θ, de sorte que $X_k = X_0 \circ \Theta^k$. A la marche aléatoire $s_n = \sum_0^{n-1} X_k$ de loi p sur $\mathbb{Z}$ est associée la transformation $\tilde{\Theta}$ sur E définie par $\tilde{\Theta}(\omega,t) = (\Theta\omega, t + X_0(\omega))$ et préservant la mesure $\pi \times P$. La décomposition d'une suite $\omega = (\omega_k)_{k \in \mathbb{Z}} \in S^{\mathbb{Z}}$ en $\omega^- \times \omega^+$ avec $\omega^- = (\omega_k)_{k<0}$ et $\omega^+ = (\omega_k)_{k \geqslant 0}$ fournit une décomposition $S^{\mathbb{Z}} = \sum^- \times \sum^+$ et une partition en ensembles de la forme $\sum^- \times \{\omega^+\}$.

Le système dynamique quotient de $(E,\tilde{\Theta}, \pi \times \hat{P})$ sera défini par :

$$\Theta [\, \omega^+, t \,] = [\, \Theta\omega^+, t + X_0(\omega^+) \,]$$

et la mesure naturelle sur $\sum^+ \times \mathbb{Z}$ sera encore notée $\pi \times l$. Montrons l'exactitude de ce dernier système, c'est-à-dire la propriété K pour $(E, \Theta, \pi \times \hat{P})$ par rapport à $\mathcal{C}$. Soit F une fonction asymptotique bornée : $F = F_n \circ \Theta^n$ et posons $f_n(t) = \int_{\Sigma^+} F_n(\omega,t)\, d\pi(\omega)$.

Observons alors que

$$E [\, F/t, X_0 = x_0,\ X_n = x_n \,] = \int F(x_0 \dots x_n\omega, t)\, d\pi(\omega) = \int F_{n+1} [\, \omega, t + s_{n+1}(\omega) \,]\, d\pi(\omega)$$

$$= f_{n+1}(t + s_{n+1}).$$

D'où en particulier $f_0(t) = \int f_n(t + y)\, dp^n(y)$.

Notons aussi que, puisque $\tilde{\Theta}E$ est de mesure pleine on a $F_n = F_{n+1} \circ \tilde{\Theta}$ et donc comme plus haut :

$$f_n(t) = \int f_{n+1}(t + y)\, dp(y).$$

Ecrivons alors :

$$(\delta_1 - \delta_0)(f_0) = (\delta_1 - \delta_0)(\check{p}^n * f_n) = [p^n * (\delta_1 - \delta_0)](f_n)$$

$$|(\delta_1 - \delta_0)(f_0)| \leq \| p^n * (\delta_1 - \delta_0) \|_1 \| f_n \|_\infty.$$

Soit $f_0(0) = f_0(1)$ et plus généralement $f_0(k) = f_0(k + 1)$ $(k \in \mathbb{Z})$.

Ceci donne $f_0 = cte$ et plus généralement $f_n = cte = f_0$. On a alors, puisque F est bornée, par définition de f_n :

$$F(t,\omega) = \lim_n f_n(t + s_n) = cte.$$

On va dans la partie B généraliser ce type de situation et étudier des analogues géométriques. La notion d'exactitude peut être relativisée comme suit :

Définition 3.

Soit $\mathcal{G}$ une partition mesurable de E. On dira que T est exacte relativement à $\mathcal{G}$ si pour tout élément α de $\mathbb{L}^1(m)$, de projection nulle sur $E/\mathcal{G}$, on a $\lim_n \|\alpha T^n\|_1 = 0$. On notera $\mathbb{L}^1_{\mathcal{G}}(m)$ le noyau de la projection de E sur $E/\mathcal{G}$.

La proposition suivante découle alors des définitions :

Proposition 1.

Soit $\mathcal{G}$ une partition mesurable de (E,T,m) telle que $T\mathcal{G} \subset \mathcal{G}$. On suppose T exacte relativement à $\mathcal{G}$ et la transformation quotient T sur $E/\mathcal{G}$ exacte. Alors T est exacte.

II - CONSEQUENCES

On va considérer dans la suite des extensions d'un système dynamique (X,Θ,π) par un groupe abélien que l'on prendra en général égal à $\mathbb{R}^d$.

Définition 4.

Soit (X, Θ, π) un système dynamique, π étant une mesure Θ-invariante finie. Soit f une fonction mesurable de X dans $\mathbb{R}^d$. On appelle système cylindrique (X,Θ,f) le sustème dynamique défini sur $X \times \mathbb{R}^d$ par $\widetilde{\Theta}(x,t) = [\, \Theta x, t + f(x) \,]$, la mesure invariante étant $\pi \times \rho$.

Pour un système cylindrique, la propriété d'exactitude va se traduire sur f ou plutot les sommes $S_n(x) = \sum_0^{n-1} f \circ \Theta^k(x)$.

Définition 5.

Soit μ_n une suite de probabilités sur $\mathbb{R}^d$. On dit que μ_n vérifie la propriété de moyenne si pour tout $\varphi \in \mathbb{L}^1_0(\rho)$ on a

$$\lim_n \|\mu_n * \varphi\|_1 = 0.$$

Définition 6.

Soit (X,Θ,f) un système cylindrique. On dira que f vérifie la propriété de moyenne si pour tout $y \in X$ et toute probabilité $\alpha \in \mathbb{L}^1(\pi)$ la loi ${}^n\mu_\alpha^y$ de $S_n(x) = \sum_0^{n-1} f \circ \Theta^k(x)$ conditionnellement à $\Theta^n x = y$ (x étant distribué suivant α) vérifie la propriété de moyenne. On peut alors énoncer la

Proposition 2.

Soit (X,Θ,f) un système cylindrique et supposons que f vérifie la propriété de moyenne. Alors $\widetilde{\Theta}$ est exacte relativement à la partition en "verticales" $\{x\} \times \mathbb{R}^d$.

Preuve

Si $\mathcal{V}$ est la partition en verticales il suffit de voir que pour un ensemble de mesures β dense dans $\mathbb{L}^1_v(\pi \times \mathbb{P})$ on a

$$\lim \| \beta \widetilde{\Theta}^n \|_1 = 0.$$

Soit $\xi \in \mathbb{L}^1_o(\mathbb{P})$ et α une probabilité à densité bornée de $\mathbb{L}^1(\pi)$. On a alors :

$$(\alpha \times \xi)\widetilde{\Theta}^n = \int \delta_y \times ({}^n\mu_\alpha^y * \xi)\, d(\alpha\Theta^n)(y)$$

et $$\| (\alpha \times \xi)\widetilde{\Theta}^n \|_1 = \int \| {}^n\mu_\alpha^y * \xi \|_1 \, d(\alpha\Theta^n)(y).$$

D'où par convergence dominée et en raison de la propriété de moyenne :

$$\lim_n \| (\alpha \times \xi)\widetilde{\Theta}^n \|_1 = 0.$$

Justifions la propriété de totalité des éléments de la forme $\alpha \times \xi$ dans $\mathbb{L}^1_v(\pi \times \mathbb{P})$:

soit $g \in \mathbb{L}^\infty(\pi \times \mathbb{P})$ avec $< g, \alpha \times \xi > = 0$

ou $$\int g(x,t)\, \alpha(x)\, \xi(t)\, d\pi(x)\, d\mathbb{P}(t) = 0.$$

L'arbitraire de ξ dans $\mathbb{L}^1_o(\mathbb{P})$ donne

$$\int g(x,t)\, \alpha(x)\, d\pi(x) = \text{cte} = c(\alpha)$$

et enfin $$g(x,t) = c(x)$$

avec $$c(\alpha) = \int \alpha(x)\, c(x)\, d\pi(x).$$

Le sous-espace des $\beta \in \mathbb{L}^1(\pi \times \mathbb{P})$ défini par $< g, \beta > = 0$ avec g du type précédent n'est autre que $\mathbb{L}^1_v(\pi \times \mathbb{P})$, et ceci donne la conclusion voulue.

Proposition 3.

Soit (X,Θ,f) un système cylindrique exact. Soit $(Y, \mathbb{R}^d,\nu)$ un système dynamique ergodique, la mesure ν étant $\mathbb{R}^d$-invariante. Alors le produit croisé $X \times_f Y$ est exact.

Preuve

Elle est analogue à celle de la proposition 2.

Soit $\alpha \in \mathbb{L}^1(\pi)$, $\xi \in \mathbb{L}^1_o(\mathcal{P})$, $\varrho \in \mathbb{L}^1(\nu)$. Notons le prolongement de l'action de $\mathbb{R}^d$ sur Y à $\mathbb{L}^1(\mathcal{P})$ et $\mathbb{L}^1(\nu)$ par $*$.

Ainsi :

$$\alpha \times (\varrho * \xi)\tilde{\Theta}^n = \int \delta_y \times (\varrho * {}^n\mu^y_\alpha * \xi \mid d(\alpha\Theta^n)(y)$$

et

$$\| \alpha \times (\varrho * \xi)\tilde{\Theta}^n \|_1 \leqslant \int \| {}^n\mu^y_\alpha * \xi \| \, d(\alpha\Theta^n)(y) \, \| \varrho \|_1$$

$$= \| (\alpha \times \xi)\tilde{\Theta}^n \|_1 \, \| \varrho \|_1 .$$

Comme (X,Θ,f) est exact, on a bien $\lim_n \| \alpha \times (\varrho * \xi)\tilde{\Theta}^n \|_1 = 0$. L'ergodicité de l'action de $\mathbb{R}^d$ sur Y implique, comme plus haut, la densité des éléments de la forme $\varrho * \xi$ dans $\mathbb{L}^1_o(\nu)$ et on en conclut l'exactitude du produit croisé $X \times_f Y$ relativement à la partition en verticales $\{x\} \times Y$. D'autre part l'exactitude de (X,Θ,f) contient celle du facteur (X,Θ,π) et la proposition 1 implique l'exactitude du produit croisé $X \times_f Y$.

On a alors trivialement le

Corollaire

Supposons que le système (X,Θ,π) possède la propriété K relativement à la partition $\mathcal{G}$, que f soit une application $\mathcal{G}$-mesurable de X dans $\mathbb{R}^d$, que le système cylindrique (X,Θ,f) possède la propriété K par rapport à la partition en "horizontales" $A \times \{t\}$ $(A \in \mathcal{G}, t \in \mathbb{R})$.
Soit $(Y, \mathbb{R}^d, \nu)$ un système dynamique ergodique. Alors le produit croisé $X \times_f Y$ possède la propriété K par rapport à la partition en horizontales $A \times \{y\}$ $(A \in \mathcal{G}, y \in Y)$.

Remarque. Dès que la propriété de moyenne est vraie pour f définie sur $X/\mathcal{G}$, la conclusion du corollaire est donc valable.

La propriété K, par rapport à la partition $\mathcal{G}$, implique la constance de certaines fonctions invariantes, vérifiant une condition de continuité par rapport à $\mathcal{G}$.

Définition

Soit $\mathcal{G}$ une partition mesurable propre de (E,T,m). Alors $F \in \mathbb{L}^\infty(m)$ est dite continue par rapport à $\mathcal{G}$ si (dans la dualité $\mathbb{L}^1, \mathbb{L}^\infty$) la suite $F \circ T^n - E(F \circ T^n/\mathcal{G})$ converge faiblement vers zéro.

Si m est une mesure T-invariante finie et si (E,T,m) possède la propriété K par rapport à $\mathcal{G}$, tout élément de $\mathbb{L}^\infty(m)$ est continu par rapport à $\mathcal{G}$. Dans le cas de l'exemple initial la fonction $F[\omega^-,\omega^+,t]$ sera continue par rapport à la partition d'éléments $\sum^- \times \{\omega^+ \times t\}$ dès qu'elle sera continue au sens ordinaire, par rapport à la variable ω^- et il en sera de même dans les exemples examinés dans la partie B).

Le résultat suivant correspond au classique théorème de Choquet-Deny [6].

Proposition 4.

Supposons que (E,T,m) vérifie la propriété K par rapport à la partition $\mathcal{G}$. Alors les fonctions bornées T-invariantes et continues par rapport à $\mathcal{G}$ sont constantes.

Preuve.

Soit $A \in \mathbb{L}^1(m)$. La condition de continuité pour F s'écrit ici :

$$< E(F/\mathcal{G}) - F, A > = \lim_n < E[F \circ T^n/\mathcal{G}] - F \circ T^n, A > = 0.$$

Donc $F = E(F/\mathcal{G})$ et F, étant invariante, est mesurable par rapport à $\bigcap_{n \geq 0} T^n\mathcal{G}$, donc constante d'après la propriété K.

III - Propriété de récurrence

On rappelle qu'un système dynamique (E,T,m) est dit récurrent si pour tout ensemble non négligeable A, il existe $k > 0$ avec $m(T^{-k}A \cap A) > 0$.

Rappelons aussi que, si T est inversible et m non atomique, l'ergodicité implique la récurrence.

Proposition 5

Supposons que le système dynamique (E,T,m) possède la propriété K par rapport à la partition $\mathcal{G}$ et que le système quotient $(E/\mathcal{G},T,m)$ soit récurrent. Alors le système (E,T,m) est ergodique.

Preuve.

Puisque T est un automorphisme $T^{-1}\mathcal{G}$ est une partition plus fine que $\mathcal{G}$ ($T\mathcal{G} \subset \mathcal{G}$) et l'application $A \to TA$ ($A \in \mathcal{G}$ identifie les systèmes dynamiques quotients de (E,T,m) par et $T^{-1}\mathcal{G}$. En particulier la propriété de récurrence vaut pour ces deux systèmes. La propriété K est aussi valable par rapport à $T^{-1}\mathcal{G}$. Soit alors J une partie T-invariante non négligeable de E : $T^{-1}J = J$. Cette relation donne dans $\bar{E} = E/\mathcal{G}$: $\bar{T}^{-1}\bar{J} \supset \bar{J}$. Donc, si $D = \bar{T}^{-1}\bar{J} - \bar{J}$, les ensembles $\bar{T}^{-k}D$ sont disjoints et par la propriété de récurrence $\bar{m}(D) = \bar{m}(\bar{T}^{-1}\bar{J} - \bar{J}) = 0$ soit $\bar{T}^{-1}\bar{J} = \bar{J}$. L'exactitude de $(\bar{E},\bar{T},\bar{m})$ donne alors, $\bar{J} = \bar{E}$: la projection de J dans $\bar{E}$ est de mesure pleine. Il en est de même de la projection de J dans $E/T^{-n}\mathcal{G}$, et puisque $\mathcal{G}$ est génératrice on a $J = E$.

Il sera commode dans la suite d'étudier la récurrence du système (E,T,m) à l'aide de l'opérateur adjoint T^* de T qui est une contraction de $L^\infty(m)$. Considérons alors le noyau potentiel de T^* :

$$G(x,B) = \sum_0^\infty (T^*)^n \, 1_B(x) = G\,1_B(x).$$

Proposition 6.

a) S'il existe une partie B de E de mesure finie telle que $G(x,B) = +\infty$ p.p, alors (E,T,m) est récurrent.

b) Si pour la partie B non négligeable de E, $G(x,B)$ est bornée, le système (E,T,m) n'est pas récurrent.

Preuve.

a) Soit D un ensemble tel que $T^{-k}D \cap D = \varnothing$. Alors $\sum_0^\infty 1_D \circ T^k \leqslant 1$ et

$m(B) \geqslant \sum_0^\infty < 1_D \circ T^k, 1_B > = < 1_D, G\ 1_B >$.

Donc $G\ 1_B$ est finie sur D, ce qui montre d'après l'hypothèse que D est négligeable.

b) Posons $h = \sum_0^\infty 1_B \circ T^n$ et observons que $< h, 1_B > = < 1_B, G\ 1_B > \ < +\infty$.

On en conclut d'autre part

$$h \circ T + 1_B = h \text{ et } h \circ T \leqslant h,$$

on en déduit que l'ensemble $C = \{h \geqslant c\}$ vérifie $T^{-1}\ C \supset C$ avec inégalité stricte pour un certain c. Si $D = T^{-1}\ C - C$ on obtient donc $T^{-k}\ D \cap D = \varnothing \quad \forall\, k \geqslant 0$ et $m(D) > 0$.

B – SYSTEMES CYLINDRIQUES ET APPLICATIONS

I – Propriétés de périodicité

Soit (X,Θ,π) un système dynamique, avec π mesure Θ-invariante finie, $\mathbb{L}^1(\pi,\mathbb{R}^d)$ l'espace des fonctions intégrables à valeurs dans $\mathbb{R}^d$.

Définition 1.

On dira que f et g fonctions de $L^1(\pi,\mathbb{R}^d)$ sont équivalentes s'il existe $\varphi \in \mathbb{L}^1(\pi,\mathbb{R}^d)$ avec $f - g = \varphi \circ \Theta - \varphi$.

Si f est équivalente à o elle sera dite triviale, et ceci correspond au fait que les deux systèmes cylindriques (X,Θ,f) et (X,Θ,g) s'identifient par $(x,t) \to [x,t + \varphi(x)]$. Des notions de périodicité analogues à celles intervenant pour les marches aléatoires s'introduisent ici.

Définition 2.

On dira que $f \in \mathbb{L}^1(\pi,\mathbb{R}^d)$ est arithmétique si elle est équivalente à $g \in \mathbb{L}^1(\pi,\mathbb{R}^d)$ telle que $g(X)$ soit contenue dans un sous-groupe fermé strict de $\mathbb{R}^d$.

Définition 3.

On dira que $f \in \mathbb{L}^1(\pi,\mathbb{R}^d)$ est strictement apériodique s'il n'existe pas de constante c telle que $f - c$ soit arithmétique.

Remarques.

1) Les systèmes cylindriques que l'on va considérer seront des deux types suivants :

a) Le couple (X,Θ) sera un sous-shift de type fini noté $(\sum,\Theta)$, supposé topologiquement transitif [2], f sera une fonction Holdérienne et la mesure π sera un état d'équilibre [2] associé à une fonction holdérienne que l'on appellera ici mesure de Gibbs. On utilisera essentiellement les résultats de [2] et [4]. Dans ce cas l'équivalence entre f et g holdérienne permet de trouver φ holdérienne ([2], [8]) avec $f - g = \varphi \circ \Theta - \varphi$.

b) Le couple (X,Θ) sera un ensemble basique hyperbolique (Ω, u) [2] pour un difféomorphisme u d'une variété V, f sera holdérienne comme en a) et π de Gibbs également. La même conclusion qu'en a) vaut pour l'équivalence : φ sera holdérienne sur Ω ([2], [14]).

2) Les conditions d'arithméticité et de stricte apériodicité se formuleront mieux en termes de caractères de $\mathbb{R}^d$, pour une fonction f holdérienne sur $\sum$ ou Ω.

a) f sera arithmétique [resp non strictement apériodique] s'il existe un caractère non trivial de $\mathbb{R}^d$ ou $\mathbb{Z}^d$: $e_\lambda(x) = e^{i<\lambda,x>}$ $(\lambda \in \mathbb{R}^d)$ et une fonction φ holdérienne de $\sum$ dans $\mathbb{T}$ [8] avec $e^{i<\lambda,f>} = (\varphi \circ \Theta) / \varphi$ [resp $e^{i<\lambda,f>} = e^{i\alpha}$ $[(\varphi \circ \Theta) / \varphi]$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$].

b) Le remplacement de $\sum$ par l'ensemble basique hyperbolique Ω n'affecte pas le résultat précédent : φ est holdérienne sur Ω. Il suffit clairement d'examiner le premier cas et l'on code (Ω, u) par un sous-shift de type fini $(\sum, \Theta)$, les images réciproques par le codage η d'un point de Ω étant en nombre borné par $N < +\infty$: d'après a) on obtient une fonction Ψ holdérienne sur $\sum$ et $\lambda \in \mathbb{R}^d$ avec

$$e^{i<\lambda,f'>} = (\Psi \circ \Theta) / \Psi \quad \text{où } f' = f \circ$$

Si alors x est un point périodique de période n de Ω, tout point $\omega \in \sum$ avec $\eta(\omega) = x$ sera périodique de période Nn au plus. On en déduit :

$$\prod_{K=0}^{N_{n-1}} e^{i<\lambda, f' \circ \Theta^k(\omega)>} = \prod_{K=0}^{n-1} e^{iN<\lambda, f \circ u^k(x)>} = 1.$$

On peut alors montrer que

$$e^{i<\lambda, Nf>} = (\varphi \circ u) / \varphi$$

avec φ holdérienne sur Ω. Il suffit pour cela d'étendre le théorème 3 de [14] ou de répéter en termes multiplicatifs l'argument de [2] p.g. 93-94 qui permet de construire une fonction holdérienne φ vérifiant $f = \varphi \circ u - \varphi$ dès que les sommes $\sum_0^{n-1} f \circ u^k(x)$ s'annulent sur les trajectoires périodiques de période n, la fonction f étant remplacée par $e^{i<\lambda, Nf>}$.

3) Dans le cas d'un sous-shift on peut remplacer f par une fonction holdérienne équivalente f' ne dépendant que des coordonnées positives et donc définie sur $\sum^+$. Le système cylindrique $(\sum, \Theta, f')$ possède donc une partition mesurable Θ-invariante qui est formée des ensembles du type $\sum^- \times \{\omega^+ \times t\}$ où $\omega^+ \in \sum^+$, $t \in \mathbb{R}$.

Par l'isomorphisme $(\omega, t) \to [\omega, t + \varphi \circ \Theta(\omega) - \varphi(\omega)]$, le système $(\sum, \Theta, f')$ s'identifie à $(\sum, \Theta, f)$ et la partition invariante précédente se transforme en une nouvelle partition que l'on dira "partition naturelle".

Définition

Soit (E,d) un espace métrique muni d'une transformation continue T. On appellera feuille stable de $x \in E$ l'ensemble $V(x) = \{y ; \lim d(T^n y, T^n x) = 0\}$.

Conséquences.

L'ensemble E est donc réunion disjointe de ses feuilles stables ; dans le cas des systèmes cylindriques examinés plus haut, les feuilles stables se décrivent aisément et des partitions naturelles leur sont associées.

Pour le système $(\sum, \Theta, f')$ la feuille stable de $(\omega,t) \in \sum \times \mathbb{R}^d$ n'est autre que l'ensemble des (σ,t) avec $\sigma \in \sum$ ayant le même bout gauche que ω ; chaque feuille stable est réunion disjointe d'éléments de la partition naturelle. Les mêmes propriétés valent pour $(\sum,\Theta,f)$: les feuilles stables de $\sum$ se relèvent naturellement dans $\sum \times \mathbb{R}^d$ en feuilles stables. Pour le système (Ω, u, f) associé à un ensemble basique hyperbolique le codage $\eta : \sum \to \Omega$ transforme les feuilles stables de $\sum$ en variétés stables de Ω. Les feuilles stables du système cylindrique $(\sum, \Theta, f \circ \eta)$ ont alors pour images dans (Ω, u, f) les feuilles stables de ce dernier système ; les variétés stables de (Ω, u) se relèvent donc naturellement dans $\Omega \times \mathbb{R}^d$ en variétés stables. On peut considérer sur $\Omega \times \mathbb{R}^d$ la mesure produit de la mesure Gibbs π sur Ω par la mesure de Lebesgue ρ sur $\mathbb{R}^d$; la partition naturelle de $\sum \times \mathbb{R}^d$ se transporte alors en une partition invariante que l'on dira également canonique. Chaque variété stable est réunion disjointe (modulo $\pi \times \rho$) d'éléments de la partition canonique.

II - Propriétés de moyenne

On est donc ramené par ce qui précède, en ce qui concerne la propriété K par exemple, à l'étude d'un système cylindrique $(\sum^+, \Theta, f)$ où f est holdérienne sur $\sum^+$ et strictement apériodique. Afin d'établir la propriété de moyenne pour f, justifions deux lemmes.

Lemme 1.

Soit μ_n une suite de probabilités sur $\mathbb{R}^d$, portées par des compacts K_n. On suppose que $\lim_n \rho(K_n)^{1/n} = 1$ et que, pour tout caractère $\lambda \neq 0$ de $\mathbb{R}^d$ on a $\overline{\lim_n} |\hat{\mu}_n(\lambda)| < 1$. Alors μ_n possède la propriété de moyenne.

Preuve.

On sait que les éléments $\varphi \in \mathbb{L}^1_o(\mathcal{P})$ dont la transformée de Fourier est à support compact sont denses dans $\mathbb{L}^1_o(\mathcal{P})$. Il suffit donc de voir que, pour de tels φ on a :

$$\lim_n \| \mu_n * \varphi \| = 0.$$

Examinons d'abord $\| \mu_n * \varphi \|_2$ puisque $\varphi \in \mathbb{L}^2(\mathcal{P})$:

$$\| \mu_n * \varphi \|_2 = \int |\hat{\mu}_n(\lambda)|^2 \, |\varphi(\lambda)|^2 \, d\lambda$$

comme $\varphi(\lambda)$ est bornée et à support compact on a

$$\| \mu_n * \varphi \|_2 \leqslant C\varrho^n$$

pour un certain C et un ϱ tel que $\overline{\lim_n} \, |\hat{\mu}_n(\lambda)|^{1/n} < \varrho < 1$.

Par ailleurs l'inégalité de Schwarz donne :

$$\| \mu_n * \varphi \|_1 \leqslant \mathcal{P}(K_n)^{1/2} \, \| \mu_n * \varphi \|_2$$

d'où la conclusion puisque $\mathcal{P}(K_n)$ est à croissance non exponentielle.

Considérons l'action de $\widetilde{\Theta}$ sur les fonctions de la forme $\varphi(x)\, e_\lambda(x)$ avec $\varphi \in \mathbb{L}^1(\pi^+)$ et $e_\lambda(x) = e^{i<\lambda,x>}$ caractère de $\mathbb{R}^d$. La formule $\Theta(\varphi \, . \, e_\lambda) = (\Theta_\lambda \varphi) \, . \, e_\lambda$ où $\Theta_\lambda \varphi = e^{i<\lambda,f>} \, (\varphi \circ \Theta)$ définit une contraction de $\mathbb{L}^1(\pi^+)$ dont on notera l'adjoint sur $L^\infty(\pi^+)$ par P_λ. En particulier $P_0 = P$ est l'adjoint de Θ et l'on a :

$$P_\lambda \varphi = P\,[\, e^{i<\lambda,f>} \varphi \,].$$

On a vu en [8] que la restriction de P_λ à l'espace de Banach H_α des fonctions holdériennes d'ordre α est bien définie et quasi-compacte. De plus la condition de stricte apériodicité de f équivaut à l'absence de valeurs propres de module 1 pour P_λ $(\lambda \neq 0)$.

On a donc $\lim_n \| P_\lambda \|^{1/n} < 1 \; (\lambda \neq 0)$.

Lemme 2.

Soit α un élément de $\mathbb{L}^1(\pi^+)$ et considérons la désintégration verticale de la mesure $(\alpha\pi^+)\widetilde{\Theta}^n$: $(\alpha \, . \, \pi^+)\widetilde{\Theta}^n = \int \delta_y \times {}^{\alpha}\mu_n^y \, d\pi^+(y)$.

Alors $\widehat{{}^{\alpha}\mu_n^y}(\lambda) = P_\lambda \alpha(y)$.

Preuve.

Il suffit de voir $\widehat{{}^{\alpha}\mu_1^y}(\lambda) = P_\lambda \alpha(y)$.

Or :

$$[(\alpha \cdot \pi^+)\widetilde{\Theta}](\varphi \cdot e_\lambda) = [\alpha \cdot \pi^+](\Theta_\lambda \varphi \cdot e_\lambda) = [\alpha \cdot \pi^+](\Theta_\lambda \varphi) = \int P_\lambda \alpha(y)\, \varphi(y)\, d\pi^+(y).$$

Aussi :

$$[(\alpha \cdot \pi^+)\widetilde{\Theta}](\varphi \cdot e_\lambda) = \int (\delta_y \times {}^{\alpha}\mu_1^y)(\varphi \cdot e_\lambda)\, d\pi^+(y) = \int \varphi(y)\ \widehat{{}^{\alpha}\mu_1^y}(\lambda)\ d\pi^+(y).$$

D'où :

$$\widehat{{}^{\alpha}\mu_1^y}(\lambda) = P_\lambda\, \alpha(y).$$

On a alors le :

Théorème.

Soit f une fonction holdérienne à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ définie sur le sous-shift $\sum^+$. On suppose f strictement apériodique. Alors f possède la propriété de moyenne.

Preuve.

Il suffit d'observer que ${}^{\alpha}\mu_n^y$ possède la propriété de moyenne car les hypothèses du lemme 1 sont satisfaites : d'après la stricte apériodicité de f

$$\overline{\lim_n} \left| \widehat{{}^{\alpha}\mu_n^y}(\lambda) \right| \leqslant \overline{\lim_n} \left\| P_\lambda \alpha \right\|^{1/n} < 1$$

et d'autre part le support de ${}^{\alpha}\mu_n^y$ a au plus pour diamètre $2n \| f \|_\infty$.

III – Sous-shifts et systèmes d'Anosov

Considérons d'abord un sous-shift $\sum$ de type fini muni d'une mesure de Gibbs π et reprenons les notations déjà introduites. Le théorème suivant et ses deux premiers corollaires découlent immédiatement du paragraphe précédent et de la partie A.

Théorème.

Soit f une fonction holdérienne à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, définie sur le sous-shift $\sum$ et supposons f strictement apériodique. ALors le système cylindrique $(\sum, \Theta, f)$ possède la propriété K par rapport à la partition naturelle.

Corollaire 1.

Avec les notations du thèorème, considérons de plus une fonction bornée F sur $\sum \times \mathbb{R}^d$ qui est continue en restriction aux éléments de la partition naturelle. ALors F = cte.

Corollaire 2.

Soit $(Y, \mathbb{R}^d, \nu)$ un système dynamique où ν est une mesure finie $\mathbb{R}^d$-invariante, f une fonction holdérienne sur $\sum$, à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, qui est supposée strictement apériodique. ALors le produit croisé $\sum \times_f Y$ possède la propriété K.

Remarque.

La partition sur $\sum \times_f Y$ s'obtient à l'aide de la partition sur $\sum$, par l'application $(\omega,t) \to (\omega, t \cdot y)$

Corollaire 3.

Avec les notations du théorème, supposons de plus f d'intégrale nulle. Alors le système cylindrique $(\sum, \Theta, f)$ est ergodique si et seulement si $d = 1$ ou 2.

Preuve.

On peut supposer f définie sur $\sum^+$, et il suffit d'établire la récurrence ou la non-récurrence suivant $d \leqslant 2$ ou $d > 2$, ceci d'après la proposition 5 de A). Si $\widetilde{P}$ désigne le noyau adjoint de $\widetilde{\Theta}$, le théorème local de [8], appliqué à la chaîne de noyau $\widetilde{P}$ et à la fonction f donne :

$$\widetilde{P}^n [(x,t), \sum^+ \times B] \sim \text{cte} / n^{d/2}$$

pour tous (x,t) et toute boule B. On en conclut $G [(x,t), \sum^+ \times B] = \infty$ si $d \leqslant 2$ et $G [(x,t), \sum^+ \times B]$ bornée sinon. Il suffit donc d'appliquer la proposition 6 de A.

On peut maintenant grâce aux remarques de la partie **I** donner des résultats analogues aux précédents en remplaçant $\sum$ par un ensemble basique hyperbolique Ω en vertu des isomorphismes mesurables notés plus haut.

Théorème.

Soit V une variété compacte, u un difféomorphisme de V, f une fonction holdérienne sur V à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, Ω un ensemble basique hyperbolique pour u et l'on considère le système cylindrique (Ω,u,f) muni de la mesure $\pi \times \rho$ où π est une mesure de Gibbs, f strictement apériodique, c'est-à-dire qu'il n'existe pas φ holdérienne de Ω dans T, $\lambda \in \mathbb{R}^d$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ avec (sur Ω)

$$e^{i<\lambda,f>} = e^{i\alpha}\ [(\varphi \circ u)/\varphi]$$

Alors le système cylindrique (Ω, u, f) possède la propriété K vis-à-vis de la partition naturelle.

Corollaire 1.

Avec les notations du théorème, considérons de plus une fonction bornée F sur $\Omega \times \mathbb{R}^d$ qui est continue en restriction aux éléments de la partition naturelle. Alors F = cte.

Remarque.

En particulier si F est continue en restriction aux variétés stables de $\Omega \times \mathbb{R}^d$, on a F = cte.

Corollaire 2.

Avec les notations du théorème, soit $(Y, \mathbb{R}^d, \nu)$ un système dynamique ergodique où ν est une mesure finie $\mathbb{R}^d$-invariante, f une fonction holdérienne sur V, à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ qui est supposée strictement apériodique. ALors le produit croisé $V \times_f Y$ muni de la mesure $\pi \times \nu$, possède la propriété K.

Remarques.

Un théorème de ce type a été obtenu par A. Katok [13] en utilisant les méthodes des systèmes partiellement hyperboliques, dans le cas d'un système d'Anosov de base.

Des systèmes de ce type ont été l'objet d'études approfondies en théorie ergodique, en particulier dans le cadre des "(T, T^{-1}) - transformations". Une telle transformation est définie sur $\sum \times Y$, où (Y, T, ν) est un système dynamique ergodique $\sum = \{-1,1\}^{\mathbb{Z}}$ est muni de la mesure produit de paramètre 1/2 par :

$$T(\omega,y) = [\ \Theta\omega, T^{\omega_0} y\ ].$$

Le cas où (Y, T, ν) est une rotation est étudié en [1] et [16], celui où (Y, T, ν) est lui-même un shift de Bernouilli en [12]. Cette dernière situation fournit des exemples de systèmes possédant la propriété K mais non celle de Bernouilli et la preuve est basée sur les estimations du théorème local. Un tel théorème, dans le cadre général étudié ici, a été obtenu en [8].

Grâce à ce résultat la méthode de [12] peut donc s'étendre [communication personnelle de J.-P. Thouvenot] et permet de construire par exemple des flots différentiables possédant la propriété K mais non celle de Bernouilli. Pour les difféomorphismes l'utilisation d'un automorphisme du tore T^2 fournit un tel exemple de dimension quatre.

Corollaire 3.

Avec les notations du théorème supposons de plus f d'intégrale nulle. Alors le système cylindrique (Y, μ, f) est $\pi \times P$ ergodique si et seulement si $d = 1$ ou 2.

Remarques.

1) On voit aisément que la condition de stricte apériodicité dans les corollaires 1 et 3 des deux théorèmes présédents peut être remplacée par celle de non arithméticité, c'est-à-dire la non existence de $\lambda \in \mathbb{R}^d$ et d'une fonction holdérienne φ à valeurs dans $\mathbb{T}$ avec

$$e^{i<\lambda,f>} = (\varphi \circ \Theta) / \varphi.$$

2) Des questions voisines de celles traitées ici ont été étudiées en [8] et [9]. L'exemple de la transformation dilatante $z \to z^2$ de $\mathbb{T}$ dans $\mathbb{T}$ et de la fonction $f(z) = z$ a été mentionné du point de vue de la récurrence. On obtient donc ici l'ergodicité du système cylindrique correspondant $(z,t) \to (z^2, t + z)$ qui génère les sommes $\sum_0^{n-1} z^{2^k}$ dans $\mathbb{C}$.

IV - FLOTS D'ANOSOV ET FLOTS GEODESIQUES

On retrouve ici comme conséquences des résultats précédents des théorèmes d'ergodicité pour certains flots géodésiques en mesure infinie [17]. En fait ces résultats sont des cas particuliers d'un théorème concernant les flots d'Anosov ou plus généralement les flots vérifiant l'axiome A de Smale [4].

1) Nombre de tours d'un flot.

On considère ici une variété riemannienne V, un revêtement abélien W à fibre Γ isomorphe à $\mathbb{Z}^d$, un flot différentiable g^t sur V et on note p la projection de W sur V. On considère aussi un compact invariant Λ de V qui est basique hyperbolique pour le flot g^t. Le flot g^t se relève sur W et sera encore noté g^t. On va définir le nombre de tours du flot g^t relativement à une mesure de Gibbs (portée par Λ) et au revêtement W. On se fixe un isomorphisme du groupe Γ dans un espace vectoriel $\mathbb{R}^d$ tel que l'image de Γ soit un réseau de $\mathbb{R}^d$. Il est connu qu'un choix canonique pour cet espace vectoriel est un certain quotient du groupe d'homologie à coefficients réels de V mais ces notions n'interviendront pas ici, grâce à la structure des flots hyperboliques [4]. On se donne aussi un point $a \in V$ et une famille de chemins continus joignant a aux points du support de μ ; on peut alors définir pour tout $v \in \Lambda$ et $A \in \mathbb{R}$ un chemin fermé en joignant a aux extrémités du chemin $t \to g^t v$ $(0 \leqslant t \leqslant A)$ $(v \in \Lambda)$. Ce chemin se relève dans W et les extrémités se déduisent par l'isométrie $\gamma_A \in \Gamma$. Le nombre de tours envisagé e_μ^W se définit alors comme la limite (μ p.p) de $(1/A)\,\gamma_A$ lorsque A tend vers l'infini, limite dont on va ici justifier l'existence par une analyse du flot g^t. Il est clair que cette limite ne dépend pas de a ni des chemins joignant a au support de μ. Rappelons [4] que l'ensemble basique Λ admet un codage par le flot spécial $C = (\sum, h)$ où $\sum$ est un sous-shift de type fini topologiquement mélangeant et h une fonction holdérienne sur $\sum$, que le codage $\eta : C \to \Lambda$ est également holdérien et que les images réciproques des points de Λ ont un cardinal borné par N. Construisons alors le fibré image réciproque de W qui est encore un fibré holdérien D au-dessus de C, les fibres s'identifiant à Γ :

$D = \{ (c,w) \in C \times W \,;\, \eta(c) = p(w) \}$. Le flot g^t agit encore sur D en commutant avec Γ et sera noté g^t ; on notera q la projection de D sur C. Soit Δ le sous-fibré de D correspondant à $\sum$, c'est-à-dire $\Delta = q^{-1}(\sum)$ et posons $k(\delta) = h(\sigma)$ pour $\delta = (\sigma, w) \in \Delta \subset D$. Il est clair que D s'identifie à l'ensemble des couples (δ, s) avec $\delta \in \Delta$ et $0 \leqslant s \leqslant k(\delta)$ avec l'équivalence

$$[\delta, k(\delta)] \sim [\, g^{k(\delta)}\sigma, g^{h(\sigma)} w \,] = q\,[\, \Theta\sigma, g^{k(\sigma)} w \,] = \Theta\sigma.$$

On voit donc que D s'identifie au flot spécial $[\Delta, k]$ et que la transformation induite $\widetilde{\Theta}$ sur Δ commute avec Γ, en étant fibrée au-dessus de Θ. L'analyse du flot g^t sur W ou D va alors se réduire à celle de la transformation fibrée $\widetilde{\Theta}$. En fait l'espace $\sum$ admet des partitions finies de diamètre arbitrairement petit formées d'ensembles ouverts et fermés. Le fibré holdérien Δ se réduit donc, par le choix d'une section holdérienne à un produit $\sum \times \Gamma$ et la transformation $\widetilde{\Theta}$ s'écrit : $\Theta[\sigma,\gamma] = [\Theta\sigma, \gamma + f(\sigma)]$ avec une certaine fonction holdérienne f, à valeurs dans Γ, définie à homologie près. D'autre part la mesure μ, correspond par le codage η à une mesure invariante sur C laquelle induit une mesure Θ-invariante sur $\sum$ que l'on notera π ; d'autre part μ s'exprime aisément à partir de π. Si alors $A_n = \sum_0^{n-1} h \circ \Theta^k$ désigne le $n^{\text{ième}}$ temps de retour du flot g^t dans $\sum$, la quantité $(1/A)\,\gamma_A$ aura une limite quand A tend vers l'infini si elle en possède une quand $A = A_n$ et n tend vers l'infini. Or $\gamma_{A_n}(v)$ diffère de $\sum_0^{n-1} f \circ \Theta^k(\sigma)$ par une quantité bornée lorsque $v = \eta[g^s\sigma]$ $[0 \leqslant s \leqslant h(\sigma)]$. On en conclut, d'après le théorème ergodique appliqué à f, h et en tenant compte de l'ergodicité de μ, π :

$$\lim (1/A_n)\ \gamma_{A_n} = \left(\int f(\sigma)d\pi(\sigma)\right) / \left(\int h(\sigma)\, d\pi(\sigma)\right) \qquad \mu\text{-p.p.}$$

Ceci montre l'existence du nombre de tours e_μ^w pour g^t et μ-presque tout v.

On notera dans la suite (P) la condition que les trajectoires périodiques du flot g^t sur Λ représentent tous les éléments de Γ, c'est-à-dire :

Condition P : $\forall\, \gamma \in \Gamma, \exists\, v \in \Lambda$ et $\tau \in \mathbb{R}$

avec $g^\tau w = \gamma w$ si $p(w) = v$.

2) <u>Ergodicité de flots en mesure infinie</u>.

On peut maintenant énoncer le

<u>Théorème.</u>

Soit (V, g^t) un flot différentiable sur une variété riemannienne V, Λ un compact g^t-invariant qui est un ensemble basique hyperbolique, μ une mesure de Gibbs sur Λ. Soit W un revêtement abélien de V à fibre $\Gamma \sim \mathbb{Z}^d$ et $\widetilde{\mu}$ la mesure relevée de μ sur W ; on suppose que les trajectoires périodiques de g^t représentent tous les éléments de Γ (condition P). Alors les deux conditions suivantes sont équivalentes.

1) Le flot $(W, g^t, \widetilde{\mu})$ est ergodique.

2) $e^W_{\mu} = 0$ et $d \leqslant 2$.

Preuve.

Les considérations précédentes montent que l'ergodicité de (W, g^t, μ) équivaut à celle de $(\Delta, \widetilde{\Theta}, \widetilde{\pi})$ où $\widetilde{\pi}$ est la mesure relevée de π dans Δ. En cas d'ergodicité, on a donc, d'après le paragraphe précédent : $\int f d\pi = 0$, $d \leqslant 2$ donc aussi $e^W_{\mu} = 0$. Inversement, supposons ces conditions réalisées et $(\Delta, \widetilde{\Theta}, \widetilde{\pi})$ non ergodique ; ceci implique d'après le paragraphe précédent l'existence d'une fonction φ holdérienne sur $\sum$ et d'un caractère χ de Γ tels que $\varphi \cdot \chi$ soit $\widetilde{\Theta}$-invariante. On peut alors définir ψ holdérienne sur D avec $g^t\psi = \psi$, $\psi(\gamma \cdot d) = \chi(\gamma)\psi(d)$ $\forall\, t \in \mathbb{R}$, $\gamma \in \Gamma$, $d \in D$: il suffit de poser $\psi(d) = \varphi(\delta)$ si $d = g^t\delta$ $(t \in \mathbb{R}, \delta \in \Delta)$. Montrons que $\chi(\gamma^N) = 1$ $\forall\, \gamma \in \Gamma$ où N est le cardinal maximum de l'image réciproque par η d'un point de Λ. Soit $v \in \Lambda$ tel que l'orbite de v soit périodique de période τ et représente $\gamma \in \Gamma$, $c \in C$ avec $\eta(c) = v$. On a alors $\eta(g^\tau c) = v$, et g^τ est donc une permutation de l'ensemble fini $\eta^{-1}\{v\}$; on en déduit $g^{\tau N}(c) = c$ et si $d \in D$ se projette sur c, on aura $\gamma^N d = g^{\tau N} d$. Cette dernière relation donne $\chi(\gamma^N) = 1$ puisque

$$\psi(\gamma \cdot d) = \chi(\gamma)\,\psi(d)$$

On peut maintenant remplacer W et D par des fibrés quotients W_1 et D_1 de fibres finies s'identifiant à $\Gamma_1 = \Gamma / \Gamma^N$. Considérons dans W_1 les ensembles définis par $\psi = cte$: ils forment une partition en fermés de D_1 et chacun d'eux se projette sur C en un fermé g^t invariant. Donc l'une au moins de ces projections fermées est de mesure pleine par ergodicité; comme les mesures de Gibbs chargent ici tous les ouverts, on en conclut que l'un des ensembles $\psi = cte$ se projette sur C tout entier ; cet ensemble définit une section de D_1 puisque $\psi(\gamma d) = \chi(\gamma)\psi(d)$, section qui s'identifie D_1 au produit $C \times \Gamma_1$. On en déduit que W_1 s'identifie aussi à un produit $\Lambda \times \Gamma_1$, ce qui contredit la condition P.

3) Flot géodésique

On considère ici l'espace hyperbolique H de dimension n dont le groupe des isométries positives s'identifie au groupe orthogonal $SO(n,1)$, Γ_0 un sous-groupe discret opérant sans points fixes sur H. On identifiera H à l'intérieur de la sphère unité S^{n-1}.

L'exemple classique des groupes de Schottsky est le suivant : on considère $2p$ "hémisphères solides" orthogonales à S^{n-1} et disjointes $u_1, u_2, \ldots, u_{2p}$ et on considère l'isométrie a_i $(1 \leqslant i \leqslant p)$ transformant l'extérieur de u_k en l'intérieur de u_{p+k}. Le complémentaire de l'union des u_i $(1 \leqslant i < 2p)$ est alors un domaine fondamental pour le groupe Γ_0 qui est engendré par les a_i, est libre et discret.

On rappelle que l'ensemble L des points limites de Γ_0 est le fermé de S^{n-1} formé des points d'accumulation d'une orbite $\Gamma_0 a$ $(a \in H)$. On considère la partie A de H qui est l'union des géodésiques de H joignant 2 points distincts de L et $\widehat{A}$ l'ensemble des vecteurs unitaires correspondants. Il est clair que $\widehat{A}$ est un fermé stable par Γ et par le flot géodésique g^t $(t \in \mathbb{R})$. Considérons le quotient du fibré tangent unitaire $\widehat{H}$ de H par Γ_0 et en particulier les quotients $\Gamma_0 \backslash A$ $\Gamma_0 \backslash H$ et $\Gamma_0 \backslash \widehat{A} \subset \Gamma_0 \backslash \widehat{H}$. On vérifie aisément que l'ensemble des points non errants de $\Gamma_0 \backslash \widehat{H}$ sous l'action du flot géodésique est égale à $\Gamma_0 \backslash \widehat{A}$ et il est classique [7] que g^t est topologiquement transitif sur $\Gamma_0 \backslash \widehat{A}$ comme Γ_0 est topologiquement transitif sur $L \times L$ privé de sa diagonale. On fera ici l'hypothèse que Γ_0 est convexe-cocompact et on en rappelle la définition [22].

Définition

On dit que Γ_0 est convexe-cocompact s'il existe dans A un compact C tel que

$$A = \bigcup_{\gamma \in \Gamma_0} \gamma C.$$

Cette condition est par exemple réalisée pour les groupes de Schottsky et plus généralement par les groupes ayant un domaine fondamental à un nombre fini de faces qui ne rencontre pas L [22].

Dans cette hypothèse l'ensemble $\Lambda = \Gamma_0 \backslash \hat{A}$ est évidemment un ensemble hyperbolique de $\Gamma_0 \backslash \hat{H}$. Les géodésiques périodiques de $\Gamma_0 \backslash H$ correspondent aux géodésiques laissées invariantes par un élément de Γ_0, et joignent donc deux points de L laissés fixes par un élément de Γ_0. Par densité de ces points fixes dans L, ces géodésiques sont denses dans $\Gamma_0 \backslash A$; il en est de même pour les trajectoires périodiques du flot g^t sur $\Gamma_0 \backslash \hat{A}$ et l'axiome A de Smale est vérifié. En fait l'ensemble $\Gamma_0 \backslash \hat{A}$ est basique hyperbolique d'après le théorème de décomposition spectrale de Smale [19] puisqu'il est connexe par transitivité topologique et ne possède pas de point fixe. C'est également un attracteur au sens de [4]. Si Γ_1 est un sous-groupe normal de Γ_0 la variété $\Gamma_1 \backslash \hat{H}$ est un revêtement de $\Gamma_0 \backslash \hat{H}$ et $\Gamma_1 \backslash \hat{A}$ est fibré au-dessus du compact $\Gamma_0 \backslash \hat{A}$ de fibres isomorphes à $\Gamma_1 \backslash \Gamma_0$.

Donnons-nous une fonction holdérienne F sur $\Gamma_0 \backslash H$: elle définit un état d'équilibre sur $\Gamma_0 \backslash \hat{A}$ qui est une mesure de probabilité maximisant la somme de l'entropie de g^t et de l'intégrale $\int F d\mu$. Cette mesure se relève canoniquement dans $\Gamma_1 \backslash \hat{A}$ en une mesure $\tilde{\mu}$ et le théorème suivant permet de retrouver les résultats de [17].

Théorème

Soit Γ_0 un sous-groupe discret d'isométries de l'espace hyperbolique H qui est convexe-cocompact, F une fonction holdérienne sur $\Gamma_0 \backslash H$ et μ l'état d'équilibre correspondant sur $\Gamma_0 \backslash \hat{A}$. Soit Γ_1 un sous-groupe distingué de Γ_0 tel que $\Gamma_0/\Gamma_1 = \mathbb{Z}^d$ et $\tilde{\mu}$ la mesure relevée de μ sur $\Gamma_1 \backslash A$. Alors le flot géodésique g^t sur $\Gamma_1 \backslash \hat{A}$ est ergodique si et seulement si $d \leqslant 2$.

Preuve

Il suffit de vérifier les hypothèses du théorème du paragraphe précédent, la variété V étant ici $\Gamma_0 \backslash \hat{H}$, $\Lambda = \Gamma_0 \backslash \hat{A}$, $\Gamma = \Gamma_0 / \Gamma_1$ et $W = \Gamma_1 \backslash \hat{H}$. La condition (P) est évidemment vérifiée puisque toute géodésique périodique se relève dans H en une géodésique dont les extrémités sont échangées par un élément de Γ. L'application de $\Gamma_0 \backslash \hat{A}$ dans $\Gamma_0 \backslash \hat{A}$ qui associe à un vecteur unitaire tangent v le vecteur opposé $-v$ préserve la mesure μ d'après l'unicité de l'état d'équilibre correspondant à F et la relation $F(v) = F(-v)$. La définition du nombre de tours e_μ^W à l'aide d'une trajectoire du flot montre donc que ici : $e_\mu^W = -e_\mu^W$ donc $e_\mu^W = 0$. Dès lors la condition nécessaire et suffisante d'ergodicité du flot géodésique relativement à $\tilde{\mu}$ sur $W = \Gamma_1 \backslash \hat{A}$ se réduit à $d \leqslant 2$.

Remarques.

1) La mesure d'entropie maximale pour le flot g^t est l'état d'équilibre correspondant à la fonction nulle. Elle vérifie donc l'hypothèse de nullité du nombre de tours et on a l'ergodicité de g^t sur $\Gamma_1 \backslash \hat{A}$ par rapport à cette mesure. En [22] est construite une mesure sur $\Gamma_0 \backslash \hat{A}$ à partir d'une "densité conforme" sur L ou "mesure de Patterson". On peut voir d'après les propriétés d'équidistribution des géodésiques [3] sur $\Gamma_0 \backslash \hat{A}$ que cette mesure coïncide avec la mesure d'entropie maximale.

2) Il est possible de montrer, grâce aux techniques de [10] que si Γ_0/Γ_1 est remplacé par un sous-groupe d'un groupe linéaire, le résultat final est inchangé : Γ_0/Γ_1 doit être essentiellement isomorphe à $\mathbb{Z}^2$ ou $\mathbb{Z}^1$. Le résultat de [23] montre que c'est probablement le seul cas possible d'ergodicité, sans hypothèse particulière sur la structure de Γ_0/Γ_1.

REFERENCES

[1] R.L. ADLER and P.C. SHIELDS : "Skew products of Bernouilli shifts with rotations". Israël Journal of Math., vol. 19, p. 228-236 (1974).

[2] BOWEN : "Equilibrium states and the ergodic theory of Anosov diffeomorphismes". Springer-Verlag, Lecture notes n° 470 (1975).

[3] BOWEN : "Symbolic dynamics for hyperbolic flows". American Journal Math. 95 p. 429-460 (1973).

[4] BOWEN-RUELLE : "The ergodic theory of axiom A flows". Inventionex Math. 29 p. 181-202 (1975).

[5] LA BUNIMOVICH-YA G SINAI : "Statistical properties of Lorentz gas with periodic configurations". Communication Math. Physic. 78, p. 479-497 (1981).

[6] G. CHOQUET - J. DENY : "Sur l'équation de convolution $\mu = \sigma * \mu$". C.R.A.S. 250 A p. 799-801 (1960).

[7] W.H. GOTTSCHALK et G.A. HEDLUND : "Topological dynamics". American Math. Soc., Coll. Pub. n° 36 (1955).

[8] Y. GUIVARC'H, J. HARDY : "Théorèmes limites pour une classe de chaînes de Markov et applications aux difféomorphismes d'Anosov". A paraître Annales de l'I.H.P. 1988 n°1.

[9] Y. GUIVARC'H : "Applications d'un théorème limite local à transience et à la récurrence de marches de Markov"
Springer-Verlag, Lecture notes n° 1096 p. 301-332 (Théorie du potentiel, 1983).

[10] Y. GUIVARC'H, M. KEANE, B. ROYNETTE : "Marches aléatoires sur les groupes de Lie".
Springer-Verlag, Lecture notes n°624, 1977.

[11] Y. GUIVARC'H : "Mouvement brownien sur les revêtements d'une variété compacte"
C.R.A.S. t. 292 p. 851-853 (1981).

[12] S. KALIKOW : " T, T^{-1} transformation is not loosely Bernouilli".
Annals of Math. 115 p. 393-409, 1982.

[13] A. KATOK : "Smooth non-Bernouilli K-automorphisms".
Inventiones Math. 61, p.291-300 (1980).

[14] A.N. LIFSHITS : "Homology properties of Y-systems".
Math. Zametki, vol. 10, n° 5 p. 555-564 (1971).

[15] M. LIN : "Mixing for Markov operators".
Z. Wahr. 19, p. 231-242 (1971).

[16] I. MEILIJSON : "Mixing properties of a class of skew-products".
Israël Journal of Maths, vol. 19 p. 266-270 (1974).

[17] M. REES : "Checking ergodicity of some geodesic flows with infinite Gibbs measure".
Ergodic theory and Dynamical Systems 1, p. 107-133 (1981).

[18] D.J. RUDOLPH : " $\mathbb{Z}^n$ and $\mathbb{R}^n$ cocycle extensions and complimentary algebras".
Preprint Depart. of Math., University Maryland

[19] S. SMALE : "Differentiable dynamical systems".
B.A.M.S. 73, p. 747 (1967).

[20] YA G. SINAI : "Gibbs measures in ergodic theory".
Russian Math. Surveys, vol. 27 n° 4 p. 21-69 (1972).

[21] F. SPITZER : "Principles of random walks".

[22] D. SULLIVAN : "The density at infinity of a discrete groupe of hyperbolic notions".
I.H.E.S. Publ. Math 50 p. 171-202 (1979).

[23] J.-P. THOUVENOT : Communication personnelle

[24] N. TH. VAROPOULOS : C.R.A.S. t. 302 série 1 n° 6, 1986.