

YVON BOSSARD

Les variétés filtrées

Publications de l'Institut de recherche mathématiques de Rennes, 1985, fascicule 3
« Équations aux dérivées partielles », , p. 144-229

http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1985__3_144_0

© Département de mathématiques et informatique, université de Rennes,
1985, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications mathématiques et informatiques de Rennes » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

CHAPITRE VI

LES VARIETES FILTRES

BOSSARD Yvon

Université de Rennes I

UER Mathématiques & Informatique

Campus de Beaulieu

35 042 - RENNES CEDEX - FRANCE

LES VARIETES FILTREES

Une NRF-variété est un couple (M, F) où M est une variété C^∞ et F une suite décroissante : $TM = F^{-k} \supset F^{-k+1} \supset \dots \supset F^{-1} \supset 0$ de sous fibrés vectoriels F^{-i} de l'espace tangent TM , astreints à vérifier des conditions supplémentaires de compatibilité vis à vis du crochet des champs de vecteurs. Les variétés ordinaires sont des NRF-variétés, les variétés feuilletées le sont aussi, de même les variétés de contact et, plus généralement, certains systèmes de Pfaff et leurs systèmes dérivés. En fait, bon nombre de structures procédant, et de la géométrie partielle (le long d'un champ d'éléments de contact), et de la géométrie transverse, ont pour cadre naturel les NRF-variétés. Celles ci constituent ainsi une catégorie suffisamment vaste pour prendre en compte la plupart des objets actuellement étudiés en géométrie différentielle.

L'un des buts de ce travail est l'élaboration, pour les NRF-variétés, d'une "théorie des jets", qui coïncide avec celle de C. Ehresmann dans le cas ordinaire, et qui en ait les principales fonctions. Ceci est réalisé par la construction des espaces de repères des NRF-variétés. L'autre but poursuivi est la définition et l'étude des G-structures de tous ordres sur les NRF-variétés. En particulier, le processus de prolongement des G-structures de Singer-Sternberg [10] est étendu aux NRF-variétés, ce qui prolonge, par des méthodes différentes, les travaux de N. Tanaka [12].

Voici brièvement, la description des différentes parties :

Le chapitre I fournit, avec les définitions des N F et N R F-variétés, un certain nombre d'exemples. Alors que les variétés usuelles sont, en quelque sorte, modelées sur des algèbres de Lie abéliennes, les N R F-variétés sont modelées sur des algèbres de Lie graduées quelconques $g = e^{-k} \oplus \dots \oplus e^{-1}$. Le cas où g est engendré par e^{-1} a été étudié par N. Tanaka [12].

C'est au chapitre II qu'avec les diagrammes (non holonomes, semi-holonomes, holonomes) apparaît l'une des originalités de notre étude. Un tel diagramme, de type (n,n) contient, en quelque sorte, toute l'information utile des $n+2$ premiers espaces gradués associés à un espace vectoriel filtré (muni, éventuellement, d'une structure d'algèbre de Lie). Les groupes d'automorphismes de ces diagrammes sont les groupes de jets (généralisés). Signalons l'introduction des espaces semi-holonomes et holonomes et notons que, dans le cas ordinaire, c'est la prise en compte, ou non, de la structure d'algèbre de Lie abélienne de R^n qui fait la différence entre l'holonomie et la semi-holonomie. Un certain nombre d'autres notions (élément de connexion, cohomologie de Spencer graduée etc...) sont aussi introduites, pour utilisation ultérieure.

Le chapitre III est entièrement consacré à la construction des espaces de repères, semi-holonomes et holonomes, des N R F-variétés. Les principaux ingrédients y sont : des espaces fibrés dont les fibres types sont des diagrammes, des formes fondamentales (qui ne sont pas des formes au sens usuel car elles sont la juxtaposition d'un certain nombre de formes

définies sur des sous fibrés vectoriels d'un espace tangent convenable), une notion de pseudo-crochet (qui fournit le point de vue dual des formules de Maurer-Cartan pour les formes fondamentales), une notion de courbure (qui généralise le tenseur de Ehresmann-Chern-Bernard) etc....

La définition précise des N R F-G-structures est donnée au §-1 du chapitre IV. Les prolongements de ces G-structures sont construits et leurs propriétés établies. Le §-2 est consacré aux structures de type fini. On y montre que, comme dans le cas habituel, leur étude se ramène à l'étude de variétés parallélisées qui leur sont canoniquement associées.

Pour conclure, on remarquera que certaines G-structures usuelles peuvent, en fait, être considérées comme des N R F-G-structures, sur des N R F-variétés qui ne sont plus des variétés usuelles. L'application, à ces G-structures, des techniques précédentes, fournit des invariants plus fins que ceux utilisés habituellement.

CONVENTIONS : - Toutes les données sont C^∞ .

- Les termes usuels "jets", "connexion", "forme fondamentale", etc..., suivis parfois de "généralisés" sont utilisés pour désigner leurs correspondants dans notre théorie.

CHAPITRE I : DEFINITIONS - EXEMPLES

§-1 : LES VARIETES FILTREES

DEFINITION 1

Une variété filtrée est un couple (M, F) où M est une variété C^∞ et F une famille $(F^j)_{j \in \mathbb{Z}}$ de sous-fibrés vectoriels de l'espace tangent TM vérifiant les conditions suivantes :

- 1) (décroissance) quel que soit i : $F^i \supset F^{i+1}$.
- 2) (exhaustivité) il existe k et ℓ tels que : $F^k = TM$ et $F^\ell = 0$.
- 3) (homogénéité) quels que soient $x, y \in M$ il existe un difféomorphisme local φ de M tel que $\varphi(x) = y$ et, pour tout j , $\varphi_*(F^j/\text{Dom } \varphi) \subset F^j$ (où $F^j/\text{Dom } \varphi$ est la restriction de F^j à la source de φ et φ_* le prolongement de φ aux vecteurs).

REMARQUE 2

On pourrait, dans la suite, se passer de la troisième des conditions précédentes. Ceci nous conduirait à imposer des conditions supplémentaires de régularité mais les constructions, et résultats, seraient, essentiellement, du même type.

DEFINITION 3

Etant données deux variétés filtrées (M, F) et (M', F') , un morphisme $f : (M, F) \rightarrow (M', F')$ est une application différentiable $f : M \rightarrow M'$ telle que, pour tout j : $f_*(F^j) \subset F'^j$.

Le type d'une variété filtrée (M, F) (ou de la filtration $F = (F^j)_{j \in \mathbb{Z}}$) est, par définition la classe d'isomorphisme des espaces vectoriels gradués

$$\bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} (F^i / F^{i+1})_x, x \in M. \text{ Cette classe sera représentée par l'un de ses éléments } e = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} e^i.$$

Parmi les variétés filtrées, celles qu'on étudie vérifient, en outre, la condition : $F^0 = 0$. On dit de telles variétés qu'elles sont négativement filtrées, ou que ce sont des NF-variétés.

EXEMPLES DE NF-VARIETES

1) Toute variété M peut être considérée comme variété négativement filtrée en posant : $F^{-1} = T M$, $F^0 = \{0\}$. Remarquer, dans ce cas que le fibré des repères $H(M)$ admet la filtration : $F'^{-1} = T H(M)$, $F'^0 = V H(M)$ (fibré vertical), $F'^1 = \{0\}$, qui n'est plus négative.

2) Une variété feuilletée est négativement filtrée, avec $F^{-2} = T M$, F^{-1} = espace tangent aux feuilles, $F^0 = \{0\}$.

3) Soit G un groupe Lie et soit $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^{-k} \supset \mathfrak{g}^{-k+1} \supset \dots \supset \mathfrak{g}^{-1}$ une filtration de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de G par des sous-espaces vectoriels. Par translation à gauche des $\mathfrak{g}^{-i}$, on obtient des sous-fibrés vectoriels F^{-i} de $T G$ et une filtration négative : $T G = F^{-k} \supset \dots \supset F^{-1} \supset F^0 = \{0\}$.

4) Soit $p = \{p_1, \dots, p_k\}$ une suite finie d'entiers avec : $0 < p_1 < \dots < p_k = n$. La variété $G_p(M)$ des p -drapeaux de M est négativement

filtrée avec :

$$F^{-i} = \{X \in T_{\lambda} G_p(M) / \pi_*(X) \in \lambda^i\}$$

($\lambda \in G_p(M)$) est un p-drapeau : $\lambda^1 \subset \lambda^2 \subset \dots \subset \lambda^k = T_x M$. π est la projection $G_p(M) \rightarrow M$.

Cas particulier : les grassmanniennes

Les notions suivantes sont des extensions immédiates de notions usuelles :

L'espace tangent $\bar{T}(M, F)$ d'une N F-variété (M, F) est le fibré vectoriel gradué :

$$\bar{T}(M, F) = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} F^i / F^{i+1}$$

Si $F^{-k} = T M$, on a donc :

$$\bar{T}(M, F) = F^{-k} / F^{-k+1} \oplus \dots \oplus F^{-2} / F^{-1} \oplus F^{-1}.$$

Le fibré des repères $\bar{H}(M, F)$ est le fibré principal associé à $\bar{T}(M, F)$.

Une G-structure sur (M, F) est un sous-fibré principal de $\bar{H}(M, F)$.

Voici une extension moins immédiate : convenons d'abord, étant donnée une surmersion $\pi : M' \rightarrow M$ de dire qu'une filtration F' de M' est le relèvement, par π , de la filtration F de M si :

$$F'^j = \pi_*^{-1}(F^j) \quad \text{lorsque } F^{j-1} \neq 0$$

$$F'^j = 0 \quad \text{lorsque } F^{j-1} = 0$$

Ceci étant, soit $T M = F^{-k} \supset F^{-k+1} \supset \dots \supset F^{-1}$ une filtration négative de M et soit π la projection de l'espace $\bar{H}(M, F)$ des repères de (M, F) (défini ci-dessus) sur M . Soit enfin $F_0^{-k} = T \bar{H}(M, F) \supset F_0^{-k+1} \supset \dots \supset F_0^{-1} \supset F_0^0 \supset F_0^1 = 0$ le relèvement de la filtration F par π . La projection π induit, pour tout j ,

une projection de F_o^j / F_o^{j+2} sur F_o^j / F_o^{j+1} , dont le noyau est F_o^{j+1} / F_o^{j+2} .

Une connexion (filtrée) est définie par la donnée, pour tout j , d'un supplémentaire C^j de F_o^{j+1} / F_o^{j+2} dans F_o^j / F_o^{j+2} , avec les conditions habituelles d'invariance par les translations à droite de $\bar{H}(M, F)$.

Entre autres problèmes dont l'intérêt est évident (compte tenu des techniques utilisées dans le cadre des variétés usuelles) se posent celui de la construction de l'espace des repères d'ordre r d'une $N R F$ -variété, celui de la construction des prolongements d'une G -structure (filtrée), celui de la signification des connexions filtrées, l'extension de ces dernières aux ordres supérieurs etc...

§-2 : LES VARIETES NEGATIVEMENT ET REGULIEREMENT FILTREES

DEFINITION 1

Une variété négativement et régulièrement filtrée (plus brièvement: $N R F$ -variété) est une variété négativement filtrée (M, F) dont la filtration $F = (F^j)_{j \in \mathbb{Z}}$ vérifie la condition suivante : quels que soient les champs de vecteurs locaux X^i , à valeurs dans F^i , ($i \in \mathbb{Z}$), et Y^j à valeurs dans F^j ($j \in \mathbb{Z}$), le crochet $[X^i, Y^j]$ est à valeurs dans F^{i+j} .

EXEMPLES DE $N R F$ -VARIETES

- 1) Une variété M , avec la filtration $F^{-1} = T M$, $F^0 = \{0\}$.

2) Une variété feuilletée. Même filtration que celle du §-1.

3) Disons que F^{-1} , sous-fibré de TM , est homogène s'il existe, pour tout $(x,y) \in M \times M$ un difféomorphisme local φ de M tel que : $\varphi(x) = y$ et $\varphi_*(F^{-1}) \subset F^{-1}$. Posons $F^{-2} = TM$ et $F^0 = \{0\}$. La filtration F ainsi définie est régulière. Cas particuliers : structures de contact, structures feuilletées.

4) Modèles plats pour les NRF -variétés. Soit g une algèbre de Lie et soit $g^{-1} \subset g^{-2} \subset \dots \subset g^{-k} = g$ une filtration de g par des sous-espaces vectoriels g^{-i} tels que, $\forall i$ et j , $[g^{-i}, g^{-j}] \subset g^{-i-j}$ (avec la convention $g^{-k-t} = g$ pour $t > 0$). Soit G un groupe de Lie dont l'algèbre de Lie est g . La filtration négative obtenue sur G par translation à gauche des espaces g^{-i} est régulière. Cas particulier : g algèbre de Lie graduée.

5) (Systèmes dérivés). Soient A et B deux sous-fibrés vectoriels différentiables de TM , avec $A \subset B$. Pour tout $x \in M$ soit V_x le sous-espace vectoriel de l'espace tangent $T_x M$ engendré par B_x et les vecteurs $[X,Y]_x$ où X (resp. Y) est un champ de vecteurs défini au voisinage de x et à valeurs dans A (resp. B). Si $V = \bigcup_x V_x$ est un sous-fibré différentiable de TM on dit que le couple (A,B) est dérivable et on pose : $V = (A,B)'$.

Ceci étant, soit r une suite d'entiers positifs telle que :

$1 \leq r_2 \leq r_3 \leq \dots$ et, pour tout i : $r_i \leq i$. Un sous fibré F^{-1} de TM est dit r -dérivable si l'on peut successivement définir $F^{-2}, F^{-3}, \dots$, sous-fibrés de TM , par : $F^{-2} = (F^{-1}, F^{-1})'$; $F^{-3} = (F^{-2}, F^{-2})'$; $F^{-i-1} = (F^{-r_i}, F^{-i})'$. Dans ce cas, on associe ainsi à F^{-1} une variété NRF , (M,F) , sous réserve de l'homogénéité de F^{-1} . Cas particuliers : - systèmes dérivables au sens de E. Cartan : c'est le cas où $r_i = i$, $\forall i$; - systèmes dérivables au sens de N. Tanaka : c'est le cas où $r_i = 1$, $\forall i$.

6) Soit $G_{n,m}$ la grassmannienne des n plans d'une variété M de dimension $m+n$. Soit π la projection $G_{n,m} \rightarrow M$. Soit $F^{-1} = \text{Ker } \pi_*$, F^{-2} le sous-fibré de $TG_{n,m}$ dont la fibre en $\lambda \in G_{n,m}$ est l'ensemble des vecteurs X tels que $\pi_*(X) \in \lambda$. Soit enfin $F^{-3} = TG_{n,m}$. La filtration $F^{-3} \supset F^{-2} \supset F^{-1}$ munit $G_{n,m}$ d'une structure de $N R F$ -variété.

THEOREME 2

Soit (M, F) une $N R F$ -variété. Le fibré $T(M, F) = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} F^j / F^{j+1}$ est, canoniquement, un fibré en algèbres de Lie graduées.

La démonstration de ce résultat par N. Tanaka pour certains systèmes dérivables s'étend sans difficulté : convenons, pour $X_x \in (F^i)_x$ de noter $\overline{X}_x^i$ la classe de X_x dans $(F^i / F^{i+1})_x$. Soit $u \in (F^i / F^{i+1})_x$ (resp $v \in (F^j / F^{j+1})_x$) et soit U (resp V) un champ de vecteurs, défini au voisinage de x , à valeurs dans F^i (resp F^j) tel que $U_x^i = u$ (resp $V_x^j = v$). On pose : $[u, v] = \overline{[U, V]}_x^{i+j}$. Il s'agit de montrer que $[u, v]$ est bien défini, ce qui résulte des deux lemmes suivants :

LEMME 1

Si $U_x = 0$ alors $[U, V]_x \in F_x^{i+j+1}$. En effet, au voisinage de x , F^{i+j+1} est obtenu par l'annulation d'un certain nombre de formes différentielles $\omega^1, \dots, \omega^k$. De $F^i \subset F^{i+j+1}$ et $F^j \subset F^{i+j+1}$ on déduit : $\omega^r(U) = \omega^r(V) = 0$. De $d \omega^r(U_x, V_x) = 0$ et de : $d \omega^r(U_x, V_x) = U_x \omega^r(V) - V_x \omega^r(U) - \omega^r([U, V]_x)$ on déduit alors : $\omega^r([U, V]_x) = 0$ d'où le résultat.

LEMME 2

Si $U_x \in F_x^{i+1}$ alors $[U, V]_x \in F_x^{i+j+1}$. En effet le lemme précédent permet de remplacer U par un champ de vecteurs U' , à valeurs dans F^{i+1} et tel

que : $U'_x = U_x$. La régularité de F donne $[U', V] \in F^{i+j+1}$, d'où le résultat.

Le type d'une $N R F$ -variété (M, F) est la classe d'isomorphisme des algèbres de Lie graduées $\bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} (F^i / F^{i+1})_x$ ($x \in M$).

Compte tenu des notions introduites pour les $N R F$ -variétés, il semble naturel, pour les $N R F$ -variétés, de poser :

- L'espace tangent d'une $N R F$ -variété, (M, F) , est le fibré en algèbres de Lie graduées :

$$T(M, F) = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} F^i / F^{i+1}$$

- L'espace $H(M, F)$ des repères de (M, F) est le fibré principal associé à $T(M, F)$ (dont le groupe est le groupe des automorphismes de l'algèbre de Lie graduée type).

Une G -structure est définie, sur une $N R F$ -variété (M, F) , par la donnée d'un G -sous-espace fibré principal de l'espace des repères $H(M, F)$. Une telle G -structure est définie par la donnée, dans l'algèbre de Lie graduée type de (M, F) , d'une structure algébrique S compatible (c'est à dire telle que tout automorphisme de S soit un automorphisme de l'algèbre de Lie graduée), puis la donnée, pour tout $x \in M$, d'une structure algébrique S_x dans $T_x(M, F)$, isomorphe à S , et variant différentiablement avec le point x .

EXEMPLES

1) Sur une variété M , considérée comme $N R F$ -variété (M, F) (i.e : $F^{-1} = T M$), les G -structures, au sens $N R F$, sont les G -structures usuelles.

2) Soit (M, F) une variété feuilletée dont le feuilletage est de di-

mension p . Si M est de dimension m , l'algèbre de Lie type de (M, F) est l'algèbre de Lie abélienne graduée $\mathbb{R}^{m-p} \oplus \mathbb{R}^p$. Le groupe G doit donc être un sous-groupe de Lie de $GL(m-p, \mathbb{R}) \times GL(p, \mathbb{R})$. Les G_1 -structures transverses au feuilletage, au sens usuel [9] peuvent être considérées comme des G -structures sur (M, F) , où $G = G_1 \times GL(m-p, \mathbb{R})$, qui, en outre sont "compatibles avec l'holonomie du feuilletage".

3) Soit N une variété de dimension n et soit $M = TN$ son espace tangent. La projection $\pi : TN \rightarrow N$ définit un feuilletage de M , qui devient ainsi une NRF -variété (M, F) , où F^{-1} est l'espace tangent aux fibres de π et $F^{-2} = TM$. En tout point $x \in M$, l'espace tangent $T_x(M, F) = (F^{-2}/F^{-1})_x \oplus (F^{-1})_x$ s'identifie canoniquement à $T_{\pi(x)}N \oplus T_{\pi(x)}N$. Toute G -structure homogène (usuelle) sur N définit ainsi sur M une $\tilde{G}$ -structure, où $\tilde{G}$ est le groupe (isomorphe à G), constitué les matrices $\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{bmatrix}$, avec $A \in G$.

4) Soit M une variété et F^{-1} un sous-fibré homogène de TM . Une G -structure suivant F^{-1} , au sens usuel, est une $\tilde{G}$ -structure (pour $\tilde{G}$ -convenable) au sens NRF .

5) (cas particulier du précédent). Identifions $\mathbb{R}^3$ à l'espace des jets $J^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, muni des coordonnées (x, y, p) . La structure de contact définie sur $J^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ par la forme $\alpha = dy - p dx$ définit sur $\mathbb{R}^3$ une NRF -structure F , avec $F^{-1} = \text{Ker } \alpha$ et $F^{-2} = T\mathbb{R}^3$. La géométrie des équations différentielles du second ordre : $\frac{d^2y}{dx^2} = f(x, y, \frac{dy}{dx})$ est celle des couples de champs de directions dans F^{-1} [2] c'est à dire celle des G -structures de $(\mathbb{R}^3, F)$ où G est le groupe des matrices $\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \lambda\mu \end{bmatrix}$ avec λ et $\mu \in \mathbb{R}^*$.

La notion de connexion se définit comme dans le cas NF , etc...

On peut pour les N R F-variétés se poser les mêmes problèmes que pour les N F-variétés. La suite de ce travail permet d'apporter un certain nombre de réponses aux problèmes précédents par application de techniques générales. On retrouve bien évidemment, pour les variétés usuelles, les notions connues: les repères N F (resp N R F) d'une variété usuelle sont les repères semi-holonomes (resp holonomes) de C. Ehresmann (la différence entre ces deux types de repères provient de la prise en compte ou non de la structure d'algèbre de Lie abélienne de $\mathbb{R}^n$). Dans les autres cas, on obtient des outils beaucoup plus fins que ceux fournis classiquement.

CHAPITRE II

DIAGRAMMES NON HOLONOMES, SEMI-HOLONOMES, HOLONOMES LES GROUPES DE JETS GENERALISES

§-1 : NON-HOLONOMIE

DEFINITION 1

Un diagramme non-holonyme de type (n, ℓ, k) (où n , ℓ et k sont des entiers vérifiant : $n \geq -1$, $\ell \geq n$, $k \geq 1$) est défini par les données suivantes:

- 1) Une famille e_i^j , $j \in \mathbb{Z}$, $i \in \mathbb{Z}$, $i \leq n$, d'espaces vectoriels de dimension finie.
- 2) Une famille π_i^j d'applications linéaires $e_i^j \rightarrow e_{i-1}^j$ ($j \in \mathbb{Z}$, $i \leq n$).
- 3) Une famille φ_i^j d'applications linéaires $e_i^j \rightarrow e_{i+1}^{j-1}$, $j \in \mathbb{Z}$, $i \leq n-1$

avec les conditions :

- 1) $e_i^j = 0$ si $i+j < -k-1$, ou $i < -1$, ou $i+j > \ell-1$.
- 2) π_i^j est surjective.
- 3) φ_i^j est injective.
- 4) $\text{Im } \varphi_i^j = \text{Ker}(\pi_0^{j-1} \circ \dots \circ \pi_{i+1}^{j-1})$.

$$5) \pi_{i+1}^{j-1} \circ \varphi_i^j = \varphi_{i-1}^j \circ \pi_i^j.$$

Dans la suite, l'entier k est fixé. Au lieu de diagramme de type (n, ℓ, k) on dira donc diagramme de type (n, ℓ) . Un tel diagramme, défini par les données $(e_i^j, \varphi_i^j, \pi_i^j)$ sera noté E_n^ℓ .

Si l'on convient de n'indiquer que les termes non nuls, un diagramme E_n^ℓ peut être représenté par le "parallélogramme" (cf. feuille 11 bis jointe).

EXEMPLE 2

Soit E un espace vectoriel et $(E^j)_{j \in \mathbb{Z}}$ une filtration décroissante de E par des sous-espaces vectoriels E^j tels que $E^{-k} = E$ et $\dim E^j / E^{j+1} < \infty$ ($\forall j$). Pour tout $n \geq -1$ et $\ell \geq n$ on obtient un diagramme non holonome E_n^ℓ de type (n, ℓ, k) en posant :

$$e_i^j = E^j / E^{j+i+2}$$

$$\pi_i^j = \text{projection canonique } E^j / E^{j+i+2} \rightarrow E^j / E^{j+i+1}$$

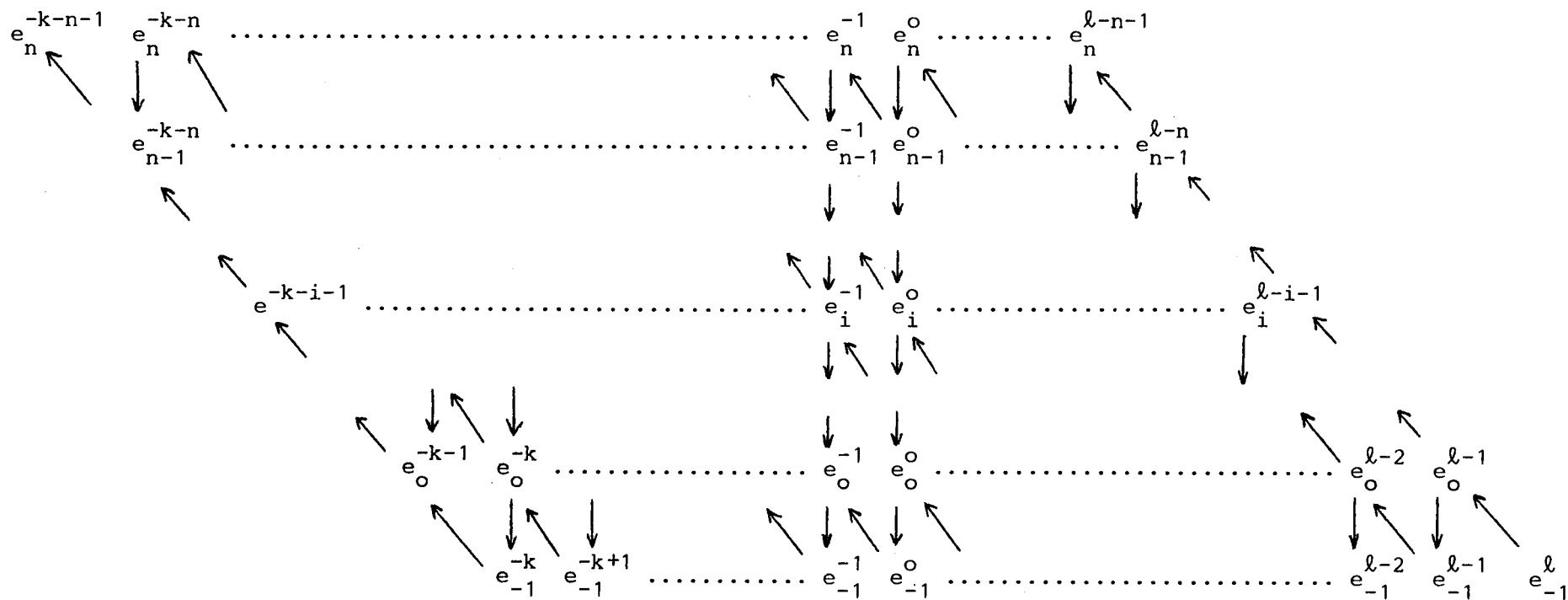
$$\varphi_i^j = \text{injection canonique } E^j / E^{j+i+1} \rightarrow E^{j-1} / E^{j+i+2}$$

Ce diagramme E_n^ℓ est, par définition, le diagramme non holonome de type (n, ℓ) déduit de E .

DEFINITION 3

Etant donnés deux diagrammes E_n^ℓ et $F_n^{\ell'}$, un morphisme u de degré s ($s \in \mathbb{Z}$) de E_n^ℓ dans $F_n^{\ell'}$ est défini par la donnée d'une famille d'applications linéaires $u_i^j : e_i^j \rightarrow f_i^{j+s}$, compatibles avec les flèches φ et π :

$$u_i^j \circ \pi_{i+1}^j = \pi_{i+1}^{j+s} \circ u_{i+1}^j \quad \text{et} \quad u_i^j \circ \varphi_{i-1}^{j+1} = \varphi_{i-1}^{j+1+s} \circ u_{i-1}^{j+1}.$$



flèches verticales : π

flèches obliques : φ

On s'intéresse plus particulièrement, dans ce qui suit, aux diagrammes de type (n, n) .

Soit donc E_n^n un tel diagramme. On note G^n le groupe des automorphismes (nécessairement de degré 0) de E_n^n . Soit E_{n-1}^{n-1} le diagramme de type $(n-1, n-1)$ déduit de E_n^n (par suppression de la $n^{\text{ième}}$ ligne et "mise à zéro" de la diagonale définie par : $i+j = n-1$). On a une projection canonique de G^n sur le groupe G^{n-1} des automorphismes de E_{n-1}^{n-1} obtenue par restriction à E_{n-1}^{n-1} des éléments de G^n .

Un élément u du noyau N^n de cette projection $G^n \rightarrow G^{n-1}$ est déterminé par la donnée :

- pour $i+j = n-1$ et $j \geq -1$ d'une famille d'automorphismes u_i^j de e_i^j vérifiant :

$$\begin{aligned} 1) \quad \varphi_i^j \circ u_i^j &= u_{i+1}^{j-1} \circ \varphi_i^j \\ 2) \quad \pi_i^j \circ u_i^j &= \pi_i^j \end{aligned}$$

- et pour $j < -1$ d'une famille d'automorphismes u_n^j de e_n^j vérifiant:

$$\begin{aligned} 1) \quad \text{la restriction de } u_n^j \text{ à } \text{Im } \varphi_{n-1}^{j+1} &\text{ est l'identité} \\ 2) \quad \pi_n^j \circ u_n^j &= \pi_n^j. \end{aligned}$$

On vérifie aisément que, pour $j < -1$, u_n^j est défini par la donnée d'une application linéaire de e_{-1}^j dans $\text{Ker } \pi_n^j$ (et réciproquement) et que, une fois u_{-1}^n connu, u_i^j , pour $i+j = n-1$ et $j \geq -1$, est défini par la donnée d'une application linéaire de e_{-1}^j dans $\text{Ker } \pi_n^j$ (et réciproquement).

EXEMPLE 4

Soit $E = \prod_{i \in \mathbb{Z}} e^i$ un espace vectoriel tel que $e^i = 0$ pour $i < -k$ et

$\dim e^i < \infty$, $\forall i$. Soit $E^j = \{0\} \times \prod_{i \geq j} e^i$. La famille $(E^j)_{j \in \mathbb{Z}}$ est une filtration décroissante de E . Comme dans l'exemple 2 précédent on en déduit, pour tout $n \geq -1$ un diagramme non holonome E_n^n . Dans le cas présent :

$$e_i^j = E^j / E^{j+i+2} = e^j \oplus e^{j+1} \oplus \dots \oplus e^{j+i+1}$$

$$\text{Ker } \pi_i^j = e^{j+i+1}$$

Le noyau $\hat{N}^n$ s'identifie alors $G L(e_{-1}^n) \times \prod_{-1 \leq j \leq n-1} \mathcal{L}(e^j, e^n) \times \prod_{j < -1} \mathcal{L}(e^j, e^{j+n+1})$.

On notera, pour utilisation ultérieure, que les applications

$e^j \rightarrow e^{j+n+1}$ ($j \leq -1$) définissent un morphisme de degré $n+1$ de $e^{-k} \oplus \dots \oplus e^{-1}$ dans E .

Soit, comme précédemment, $(E^j)_{j \in \mathbb{Z}}$ une filtration décroissante d'un espace vectoriel E telle que : $E^k = E$ et $\dim E^j / E^{j+1} < \infty$, $\forall j$. Supposons en outre que :

$$1) \bigcap_{j \in \mathbb{Z}} E^j = 0$$

2) E est complet pour la topologie uniforme obtenue en prenant les E^j comme base de voisinage de 0.

On a alors le théorème d'approximation suivant :

THEOREME 5

Le groupe G des automorphismes de l'espace vectoriel filtré $(E, (E^j)_{j \in \mathbb{Z}})$ est isomorphe à la limite projective $\varprojlim \hat{G}^n$ où, pour tout $n \geq -1$, $\hat{G}^n$ est le groupe des automorphismes du diagramme E_n^n de type (n, n) déduit de E (comme dans l'exemple 1).

PREUVE

Les hypothèses impliquent en effet que, pour tout j , $E^j = \varprojlim_r E^j / E^{j+r}$.

En outre l'injection $E^j \rightarrow E^{j-1}$, notée φ , est la limite projective des $\varphi_i^j : E^j / E^{j+i+2} \rightarrow E^{j-1} / E^{j+i+2}$. Il en résulte que le groupe G des automorphismes de $(E, (E^j)_{j \in \mathbb{Z}})$ s'identifie au groupe G' des automorphismes du diagramme E_∞^∞ déduit de E et il est clair que ce dernier groupe est isomorphe à $\varprojlim G^n$.

§-2 : SEMI-HOLONOMIE

Les espaces vectoriels filtrés $(E, (E^j)_{j \in \mathbb{Z}})$, munis éventuellement de structures additionnelles, vérifient désormais les conditions suivantes :

- La filtration E^j est décroissante
- $\dim E^j / E^{j+1} < \infty$, $\forall j$
- Ils sont séparés complets (pour la topologie usuelle).

DEFINITION 1

Un espace semi-holonyme est défini par les données suivantes :

- Un espace vectoriel filtré $(E, (E^j)_{j \in \mathbb{Z}})$
- Une structure d'algèbre de Lie sur E^0
- Une représentation ρ de E^0 dans E avec les conditions :
 - $\forall i \geq 0$ et $j \geq 0 : [E^i, E^j] \subset E^{i+j}$ (i.e : E^0 est une algèbre de Lie filtrée).
 - $\forall i \geq 0, \forall j : \rho(E^i)(E^j) \subset E^{i+j}$ (i.e : ρ est compatible avec les filtrations).

- En restriction à E^0 , ρ est la représentation adjointe.

- Notons x_i^s la classe de $x^s \in E^s$ dans E^s/E^{s+i+2} . Tout élément $x_i^j \in E^j/E^{j+i+2}$, ($i \geq -1$, $j \geq 0$), définit une application de degré i , notée $\rho(x_i^j)$, de $\bigoplus_{r \leq -1} E^r/E^{r+i+2}$ dans $\bigoplus_{r \leq j-1} E^r/E^{r+i+2}$ par :

$$\rho(x_i^j)(x_i^r) = \overline{\rho(x^j)(x^r)}$$

(où $\overline{\rho(x^j)(x^r)}$ est la classe de $\rho(x^j)(x^r) \in E^{j+r}$ dans $E^{j+r}/E^{j+r+i+2}$). La condition suivante est vérifiée. L'application $x_i^j \rightarrow \rho(x_i^j)$ est injective, $\forall i \geq -1$ et $\forall j \geq 0$.

Comme exemple d'un tel espace on peut prendre l'espace

$E = \prod_{r \geq -1} V \otimes (\bigotimes_{*}^{r+1} V)$, où V est un espace vectoriel de dimension finie. Dans ce cas : $k = -1$. Plus généralement, on a le résultat suivant :

PROPOSITION 2

A tout espace vectoriel gradué de dimension finie $V = e^{-k} \oplus e^{-k-1} \oplus \dots \oplus e^{-1}$ est canoniquement associé un espace semi-holonome.

PREUVE

Par récurrence, on définit e^i , pour $i \geq 0$, comme l'espace vectoriel des applications linéaires de degré i de $V = e^{-k} \oplus \dots \oplus e^{-1}$ dans $e^{-k-i} \oplus \dots \oplus e^{-1+i}$. On pose : $E = \prod_{i \geq -k} e^i$; $E^j = E$ si $j < -k$; $E^j = \{0\} \times \prod_{i \geq j} e^i$ si $j \geq -k$. Pour définir la structure d'algèbre de Lie de E^0 il suffit de définir le crochet $[x^p, y^q]$ pour $x^p \in e^p$ et $y^q \in e^q$ ($p \geq 0$ et $q \geq 0$).

On procède comme suit :

- Le crochet $[x^0, y^0]$ de deux éléments de e^0 est défini par

$$[x^0, y^0] = x^0 \circ y^0 - y^0 \circ x^0$$

Tout élément $x^0 \in e^0$ qui, à priori est un endomorphisme de degré 0 de V devient ainsi, si l'on convient de poser : $x^0(y^0) = [x^0, y^0]$, un endomorphisme de degré 0 de $V^0 = e^{-k} \oplus \dots \oplus e^{-1} \oplus e^0$.

- Le crochet $[x^1, y^0]$ de $x^1 \in e^1$ et $y^0 \in e^0$ est défini par :

$$[x^1, y^0] = x^1 \circ y^0 - y^0 \circ x^1$$

où le terme $y^0 \circ x^1$ est défini en utilisant le prolongement à V^0 de l'action de y^0 sur V . On convient encore de poser : $x^1(y^0) = -y^0(x^1) = [x^1, y^0]$.

On prolonge ainsi : - d'une part l'action de y^0 sur V^0 en une action sur $V^1 = V^0 \oplus e^1$, - d'autre part l'action de x^1 sur V en une action sur V^0 , à valeurs dans V^1 .

Par récurrence, on définit $[x^p, y^0]$, pour $x^p \in e^p$ et $y^0 \in e^0$ par :

$$[x^p, y^0] = x^p \circ y^0 - y^0 \circ x^p$$

(remarquer que $y^0(x^q) \stackrel{\text{def}}{=} -[x^q, y^0]$ pour $q \leq p-1$, ce qui donne un sens à $y^0 \circ x^p$).

On définit de même $[x^p, y^1]$ pour $x^p \in e^p$ et $y^1 \in e^1$ par récurrence :

$$[x^0, y^1] = -[y^1, x^0]$$

$$[x^1, y^1] = x^1 \circ y^1 - y^1 \circ x^1$$

(On utilise ici le prolongement à V^0 de l'action de tout élément de e^1 sur V) :

$$[x^p, y^1] = x^p \circ y^1 - y^1 \circ x^p$$

(L'action de x^p sur V a été prolongée en une action sur V^0 , par :

$x^p(y^0) = [x^p, y^0]$, ce qui donne un sens à $x^p \circ y^1$. D'autre part, $[y^1, x^q]$ est défini pour $q < p-1$: $[y^1, x^q] = -(x^q, y^1) = y^1(x^q)$. Ceci donne un sens à $y^1 \circ x^p$).

La méthode est maintenant claire. On définit ainsi $[x^p, y^q]$ pour $p \geq 0$ et $q \geq 0$. On vérifie aisément que E^0 , avec ce crochet, est une algèbre de Lie filtrée. La représentation ρ de E^0 dans E est définie comme suit : soit $x^p \in e^p$, ($p \geq 0$). Si $x^r \in e^r$, $r < 0$, $\rho(x^p)(x^r) = x^p(x^r)$. Si $x^r \in e^r$, $r \geq 0$, $[x^p, x^r] = \rho(x^p)(x^r)$.

Soit $(E, (E^j)_{j \in \mathbb{Z}})$ un espace semi-holonome et soit $E_n^\ell = (e_i^j, \pi_i^j, \varphi_i^j)$ le diagramme non holonome de type (n, ℓ) déduit de E (cf. exemple 2, §-1) avec, rappelons le : $e_i^j = E^j / E^{i+j+2}$.

Par définition même, tout $x_i^j \in e_i^j$, $j \geq 0$ définit une application $\rho(x_i^j)$, de degré j , de $\bigoplus_{r \leq -1} e_i^r$ dans $\bigoplus_{r \leq j-1} e_i^r$. Cette application $\rho(x_i^j)$ possède les propriétés suivantes :

$$\rho(x_i^j) (E^{r+1} / E^{i+r+2}) \subset E^{r+j+1} / E^{i+r+j+2}$$

et donc :

$$\rho(x_i^j) (\text{Im } \varphi_{i-1}^{r+1}) \subset \text{Im}(\varphi_{i-1}^{r+j+1})$$

ce qui permet de définir une application de degré j de e_{i-1}^{r+1} dans e_{i-1}^{r+j+1} , à savoir : $(\varphi_{i-1}^{r+j+1})^{-1} \circ \rho(x_i^j) \circ \varphi_{i-1}^{r+1}$. On a de même :

$$\rho(x_i^j) (E^{r+2} / E^{i+r+2}) \subset E^{r+j+2} / E^{i+r+j+2}$$

donc :

$$\rho(x_i^j) (\text{Im } \varphi_{i-1}^{r+1} \circ \varphi_{i-2}^{r+2}) \subset \text{Im } \varphi_{i-1}^{r+j+1} \circ \varphi_{i-2}^{r+j+2}$$

d'où une application de degré j de e_{i-2}^{r+2} dans e_{i-2}^{r+j+2} définie par : $(\varphi_{i-1}^{r+j+1} \circ \varphi_{i-2}^{r+j+2})^{-1} \circ \rho(x_i^j) \circ (\varphi_{i-1}^{r+1} \circ \varphi_{i-2}^{r+2})$.

De proche en proche, $\rho(x_i^j)$ définit ainsi pour $r+s \leq i-1$ une application de degré j de e_s^r dans e_s^{r+j} .

Il est en fait clair que $\rho(x_i^j)$ définit ainsi un morphisme de degré

j de E_j^i dans E_i^{i+j} que, pour simplifier, nous noterons x_j^i . Les propriétés suivantes sont en outre vérifiées :

- Le morphisme $\pi_i^j(x_i^j)$ est la restriction de x_i^j à E_{i-1}^{i-1}
- $\varphi_i^j(x_i^j)(x_r^{-s}) = \varphi_{r-1}^{-s+j} \circ x_i^j \circ \pi_r^{-s}(x_r^{-s})$.

On est ainsi conduit à la notion de diagramme semi-holonome. Plus précisément :

DEFINITION 3

Un diagramme semi-holonome de type (n, ℓ) est un diagramme non holonome $(e_i^j, \pi_i^j, \varphi_i^j)$ possédant les propriétés suivantes :

1) $\forall i \geq -1, \forall j \geq 0, e_i^j$ est un sous-espace vectoriel de l'espace des morphismes de degré j de E_i^i dans E_i^{j+i} .

2) $\forall i \geq -1, \forall j \geq 0, \pi_i^j(x_i^j)$ est la restriction de x_i^j à E_{i-1}^{i-1} .

3) $\forall i, -1 \leq i \leq n-1, \forall j \geq 0, \varphi_i^j : e_i^j \rightarrow e_{i+1}^{j-1}$ est défini par :

$$\varphi_i^j(x_i^j)(x_r^{-s}) = \varphi_{r-1}^{-s+j} \circ x_i^j \circ \pi_r^{-s}(x_r^{-s}) \quad (1)$$

$$(x_i^j \in e_i^j, x_r^{-s} \in e_r^{-s}, -s \leq -1, r \leq i)$$

(On en déduit que (1) est vrai si $-s+r \leq i-1$).

Un morphisme, de degré j , d'un diagramme semi-holonome dans un autre est un morphisme u , de degré j , des diagrammes non-holonomes sous-jacents qui est compatible avec les actions : $u(x_i^j(x_r^{-s})) = u(x_i^j) u(x_r^{-s})$.

On a, comme dans le cas non-holonome le théorème d'approximation suivant :

THEOREME 4

Soit $(E, (E^j)_{j \in \mathbb{Z}})$ un espace semi-holonome et soit $\bar{G}$ son groupe d'automorphismes (si $u \in \bar{G}$, $u|E^0$ est donc un automorphisme d'algèbre de Lie filtrée et u est compatible avec la représentation ρ). Le groupe $\bar{G}$ est la limite projective $\varprojlim \bar{G}^n$ où $\bar{G}^n$ est, pour tout $n \geq -1$, le groupe des automorphismes du diagramme semi-holonome E_n^n déduit de E .

GROUPES DES JETS SEMI-HOLONOMES INVERSIBLES GENERALISES

Les groupes considérés ci-dessous sont les analogues des groupes de jets semi-holonomes inversibles de tous ordres de C. Ehresmann [4]. Les groupes de C. Ehresmann correspondent au plus simple des cas que nous envisageons.

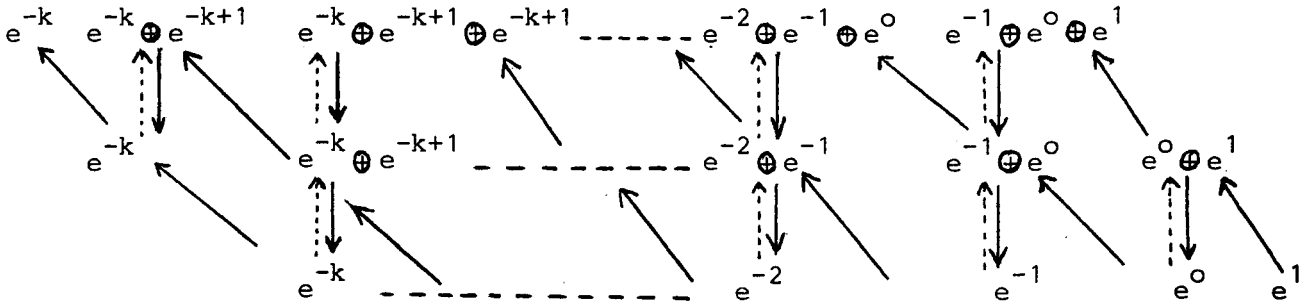
Dans ce qui suit, $V = e^{-k} \oplus e^{-k+1} \oplus \dots \oplus e^{-1}$ est un espace vectoriel gradué fixé (de dimension finie), $E = \prod_{i \geq -k} e^i$ est l'espace semi-holonome associé à V (cf. Proposition 2).

DEFINITION 5

Le groupe des jets semi-holonomes inversibles généralisés d'ordre $n+1$, noté $\bar{L}^{n+1}$, est le groupe des automorphismes du diagramme semi-holonome E_n^n , de type (n,n) , déduit de E .

(En toute rigueur, il faudrait noter $\bar{L}^{n+1}(V)$, et non $\bar{L}^{n+1}$).

Voici, à titre d'exemple, comment se présente le diagramme E_1^1 (les flèches sont les injections et projections naturelles).



On notera que, dans le cas présent, aux flèches π_i^j et φ_i^j il convient d'ajouter pour tout (i, j) ($i \leq n-1$) une section τ_i^j de π_{i+1}^j , à savoir, l'injection canonique de $e_i^j = e^j \oplus \dots \oplus e^{j+i+1}$ dans $e_{i+1}^j = e_i^j \oplus e^{i+j+2}$ (ces flèches τ_i^j sont en pointillé dans le diagramme ci-dessus). On a en outre :

$$e_{i+1}^j = (\text{Im } \tau_i^j \circ \tau_{i-1}^j \circ \dots \circ \tau_r^j) \oplus (\text{Im } \varphi_{i-1}^{j+1} \circ \varphi_{i-2}^{j+2} \circ \dots \circ \varphi_{i-r-1}^{j+i+r+1}).$$

PROPOSITION 6

Le noyau $\bar{N}^{n+1}$ de la projection canonique de $\bar{L}^{n+1}$ sur $\bar{L}^n$ est, pour $n \geq 0$, un groupe abélien canoniquement isomorphe au groupe additif e^{n+1} des applications linéaires de degré $n+1$ de $V = e^{-k} \oplus \dots \oplus e^{-1}$ dans $e^{-k+n+1} \oplus \dots \oplus e^n$.

PREUVE

Dans le cas semi-holonome en effet, si la restriction à E_{n-1}^{n-1} d'un automorphisme u de E_n^n est l'identité alors, la restriction de u à E_{n-1}^n est aussi l'identité. Tout $u \in \bar{N}^{n+1}$ est donc entièrement déterminé par ses res-

trictions $u|e_n^j$ avec $j \leq -1$ (i.e. la restriction de u à la ligne sommet du diagramme). Or, $e_n^j = e^j \oplus e^{j+1} \oplus \dots \oplus e^{j+n+1}$ et $u|e_n^j$ doit vérifier : 1) $u \circ \varphi_{n-1}^{j+1} = \varphi_{n-1}^{j+1} \circ u = \varphi_{n-1}^{j+1} \circ 11$, (c'est à dire : $u|e^{j+1} \oplus \dots \oplus e^{j+n+1} = 11$) et 2) $u \circ \pi_n^j = \pi_n^j \circ u = \pi_n^j \circ 11$ donc, pour $x^j \in e^j$, on doit avoir $u(x^j) = x^j + y^{j+n+1}$, avec $y^{j+n+1} \in e^{j+n+1}$. On note $y^{j+n+1} = \tilde{u}_j(x^j)$. On vérifie que l'application qui, à $u \in \bar{N}^{n+1}$ associe $\bigoplus_{j \leq -1} \tilde{u}_j \in e^{n+1}$ fournit l'isomorphisme annoncé.

PROPOSITION 7

Il existe une section canonique $\bar{L}^n \rightarrow \bar{L}^{n+1}$ de la projection $\bar{L}^{n+1} \rightarrow \bar{L}^n$ (tous morphismes de groupes évidemment).

PREUVE

Soit en effet $u \in \bar{L}^n$ un automorphisme de E_{n-1}^{n-1} . La semi-holonomie du diagramme E_n^n permet de prolonger u à E_{n-1}^n de la manière suivante :

$$u(x_i^j) = u \circ x_i^j \circ u^{-1}$$

pour $x_i^j \in e_i^j$, avec $i+j = n-1$ et $i \leq n-1$. Ceci étant, pour $j \leq -1$, on définit un automorphisme de $e_n^j = e^j \oplus e^{j+1} \oplus \dots \oplus e^{j+n+1}$, noté u_n^j , comme suit :

1) Si $x^j \in e^j$:

$$u_n^j(x^j) = \tau_{n-1}^j \circ u_{n-1}^j \circ (\tau_{n-1}^j)^{-1}(x^j)$$

(Plus brièvement : $u_n^j(x^j) = u_{n-1}^j(x^j)$).

2) Si $x \in e^{j+1} \oplus \dots \oplus e^{j+n+1} = \text{Im } \varphi_{n-1}^{j+1}$

$$u_n^j(x) = \varphi_{n-1}^{j+1} \circ u_{n-1}^{j+1} \circ (\varphi_{n-1}^{j+1})^{-1}(x)$$

(Plus brièvement : $u_n^j(x) = u_{n-1}^{j+1}(x)$).

On vérifie aisément que l'automorphisme u , déjà défini sur E_{n-1}^n , et

les automorphismes u_n^j précédents définissent un automorphisme de E_n^n (dont la projection dans $\bar{L}^n$ est évidemment u), d'où le résultat.

On convient, dans la suite, d'identifier $\bar{L}^n$ et son image dans $\bar{L}^{n+1}$.

On a le

THEOREME 8

- 1) Le groupe $\bar{L}^{n+1}$ est produit semi-direct (interne) de $\bar{L}^n$ et $\bar{N}^{n+1}$.
- 2) L'algèbre de Lie $\bar{\mathfrak{L}}^{n+1}$ de $\bar{L}^{n+1}$ s'identifie canoniquement à $e^0 \oplus e^1 \oplus \dots \oplus e^{n+1}$ (comme espace vectoriel).

PREUVE

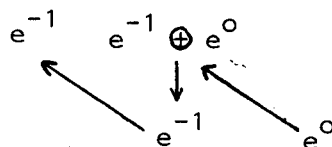
Le 1) résulte immédiatement des propositions 6 et 7 précédentes.

Quant au 2), il suffit de remarquer que e^0 est l'algèbre de Lie de $\bar{L}^0$, donc $\bar{L}^1$ produit semi-direct de $\bar{L}^0$ et $\bar{N}^1 \simeq e^1$ a pour algèbre de Lie $e^0 \oplus e^1$. De même $\bar{L}^2 = \bar{L}^1 \cdot \bar{N}^2$ a pour algèbre de Lie $e^0 \oplus e^1 \oplus e^2$ etc...

REMARQUE 9

Le cas usuel, considéré par C. Ehresmann, correspond au cas où l'espace vectoriel gradué initial V est "trivialement gradué" : $V = e^{-1}$. Voici dans ce cas les représentations matricielles correspondant aux constructions précédentes :

- Le groupe $\bar{L}^0$ est le groupe linéaire $GL(e^{-1})$.
- Le diagramme E_0^0 a la forme suivante :



avec $e^0 = e^{-1} \otimes (e^{-1})^*$.

Les éléments de $\bar{L}^1$ sont les automorphismes de $e^{-1} \oplus (e^{-1} \oplus e^0)$ dont la matrice est du type suivant :

$$e^{-1} \oplus e^0 \left\{ \begin{array}{c} e^0 \\ e^{-1} \\ e^{-1} \end{array} \right. \left[\begin{array}{ccc|cc} A \otimes {}^t A^{-1} & B & 0 \\ & A & 0 \\ & 0 & A \end{array} \right] \quad \text{avec } A \in GL(e^{-1})$$

$\bar{L}^0$ est identifié aux matrices

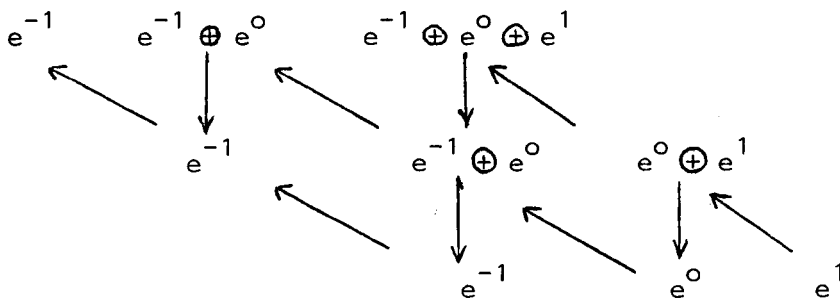
$$\left[\begin{array}{ccc|cc} A \otimes {}^t A^{-1} & & 0 \\ & A & \\ & 0 & A \end{array} \right]$$

$\bar{N}^1$ est identifié aux matrices

(B est une application $e^{-1} \rightarrow e^0$
c'est à dire un élément de e^1).

$$\left[\begin{array}{ccc|cc} 1/ & B & 0 \\ 0 & 1/ & 0 \\ 0 & 0 & 1/ \end{array} \right]$$

- Le diagramme E_1^1 a la forme suivante :



avec $e^1 = e^{-1} \otimes (e^{-1})^*$

Un élément de $\bar{L}^{-1}$ est un automorphisme de $e^{-1} \oplus (e^{-1} \oplus e^0) \oplus (e^{-1} \oplus e^0 \oplus e^1)$ (ligne du sommet) dont la présentation matricielle est :

$$\begin{array}{c}
 \left. \begin{array}{c} e^{-1} \oplus e^0 \oplus e^1 \\ e^{-1} \oplus e^0 \oplus e^1 \\ e^{-1} \oplus e^0 \oplus e^1 \end{array} \right\} \begin{array}{c} e^1 \\ e^0 \\ e^{-1} \end{array} \\
 \\
 \left. \begin{array}{c} e^{-1} \oplus e^0 \\ e^{-1} \oplus e^0 \\ e^{-1} \oplus e^0 \end{array} \right\} \begin{array}{c} e^0 \\ e^{-1} \\ e^{-1} \end{array}
 \end{array}
 \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc}
 A \otimes (\otimes^2 A^{-1}) & & & E & & D & & & \\
 \hline
 & 0 & & A \otimes^t A^{-1} & & B & & & \\
 \hline
 & 0 & & 0 & & A & & & \\
 \hline
 & & & & & & & & \\
 & & & & & & A \otimes^t A^{-1} & B & 0 \\
 & & & & & & \hline
 & & & & & & 0 & A & 0 \\
 & & & & & & \hline
 & & & & & & 0 & 0 & A
 \end{array} \right]$$

où la matrice

$$\left[\begin{array}{cc}
 A \otimes (\otimes^2 A^{-1}) & E \\
 0 & A \otimes^t A^{-1}
 \end{array} \right]$$

est l'image de

$$\left[\begin{array}{ccc}
 A \otimes^t A^{-1} & B & 0 \\
 0 & A & 0 \\
 0 & 0 & A
 \end{array} \right]$$

par la représentation adjointe de $\bar{L}^{-1}$ (dont l'algèbre de Lie est $e^0 \oplus e^1$). La matrice E n'est donc pas quelconque, elle dépend de A et B.

$\bar{L}^1$ s'identifie aux matrices

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} A \otimes (\otimes^2 A^{-1}) & E & O & & & \\ & A \otimes^t A^{-1} & B & & & \bigcirc \\ & O & O & A & & \\ \hline & & & A \otimes^t A^{-1} & B & O \\ & & & O & A & O \\ & & & O & O & A \end{array} \right]$$

$\bar{N}^2$ s'identifie aux matrices

En particulier $D : E^{-1} \rightarrow e^1$

On retrouve que $\bar{N}^2 \simeq e^2$

etc....

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 11 & O & D & & & \\ & 11 & O & & & \bigcirc \\ & O & 11 & & & \\ \hline & & & 11 & & \\ & \bigcirc & & & 11 & \\ & & & & & 11 \end{array} \right]$$

ISOMORPHISMES ET ELEMENTS DE CONNEXION (GENERALISEE)

Comme dans le sous-paragraphe précédent, on suppose donné un espace vectoriel gradué $V = e^{-k} \oplus e^{-k+1} \oplus \dots \oplus e^{-1}$. Le diagramme semi-holonome de type (n,n) déduit de l'espace semi-holonome E canoniquement associé à V est toujours noté E_n^n . On a donc $E_n^n = (e_i^j, \pi_i^j, \varphi_i^j)$ avec $e_i^j = e^j \oplus e^{j+1} \oplus \dots \oplus e^{j+i+1}$.

Soit $E_n^n = (e_i^j, \pi_i^j, \varphi_i^j)$ un diagramme semi-holonome (quelconque) de même dimension que E_n^n (i.e : $\forall i, j \dim e_i^j = \dim e_i^j$)

DEFINITION 11

-Un élément de connexion (généralisée) d'ordre $n+1$ est défini, dans E_n^n , par la donnée, pour tout $j \leq -1$ d'un supplémentaire de $\text{Im } \varphi_{n-1}^{j+1}$ dans e_n^j (ou $\Leftrightarrow$ une section de $\pi_0^j \circ \pi_1^j \circ \dots \circ \pi_n^j$).

-Un élément de connexion (généralisée) d'ordre $n+1$ est compatible avec un isomorphisme $u : E_{n-1}^{n-1} \rightarrow E_{n-1}^{n-1}$ si pour $j \leq -1$, la projection de cet élément par π_n^j coïncide avec l'image par u de $e^j \subset e^j \oplus e^{j+1} \oplus \dots \oplus e^{j+n} = e_{n-1}^j$.

PROPOSITION 12

La donnée d'un isomorphisme de E_n^n sur E_n^n équivaut à la donnée d'un isomorphisme u de E_{n-1}^{n-1} sur E_{n-1}^{n-1} et d'un élément de connexion d'ordre $n+1$ compatible avec u .

PREUVE

Si $v : E_n^n \rightarrow E_n^n$ est un isomorphisme, sa restriction u à E_{n-1}^{n-1} est un isomorphisme de E_{n-1}^{n-1} sur E_{n-1}^{n-1} et, pour $j \leq -1$, les images $v_n^j(e^j)$ de $e^j \subset e_n^j$ définissent un élément de connexion.

Inversement, soit $u : E_{n-1}^{n-1} \rightarrow E_{n-1}^{n-1}$ un isomorphisme. La semi-holonomie des diagrammes E_n^n et E_n^n permet de prolonger u , d'une part en un isomorphisme de E_{n-1}^{n-1} sur E_{n-1}^{n-1} et d'autre part en un isomorphisme de $\text{Im } \varphi_{n-1}^{j+1}$ sur $\text{Im } \varphi_{n-1}^{j+1}$ (pour $j \leq -1$). Si $(s^j)_{j \leq -1}$ est l'élément de connexion, compatible avec u , donné, on complète l'isomorphisme précédent en un isomorphisme u_n^j de $e_n^j = e^j \oplus \text{Im } \varphi_{n-1}^{j+1}$ sur $e_n^j = s^j \oplus \text{Im } \varphi_{n-1}^{j+1}$ en définissant la restriction $u_n^j|_{e^j}$ de u_n^j à e^j par :

$$u_n^j | e^j = (\pi_n^j | s^j)^{-1} \circ u_{n-1}^j \circ (\pi_n^j | e^j)$$

$(\pi_n^j | e^j)$ (resp $\pi_n^j | s^j$) est la restriction de π_n^j (resp π_n^j) à e^j (resp s^j)).

NOTATION

L'isomorphisme de E_n^n sur E_n^n défini par $u : E_{n-1}^{n-1} \longleftrightarrow E_{n-1}^{n-1}$ et

$s = (s^j)_{j \leq -1}$ est noté u_s .

COMPLETION D'UN DIAGRAMME SEMI-HOLONOME

Soit $E_{n-1}^\ell = (e_i^j, \pi_i^j, \varphi_i^j)$ un diagramme semi-holonome de type $(n-1, \ell)$.

Supposons donnée, à l'ordre n , une famille $(e_n^j, \pi_n^j, \varphi_{n-1}^{j+1})$, $j \leq -1$, telle que le diagramme $E_n^n = (e_i^j, \pi_i^j, \varphi_i^j)$ obtenu par adjonction de cette famille à E_{n-1}^n ($\subset E_{n-1}^\ell$) soit un diagramme semi-holonome. Il est possible de compléter ce diagramme E_n^n en un diagramme semi-holonome E_n^ℓ , de type (n, ℓ) en définissant e_n^j , pour $0 \leq j \leq \ell-1$, comme l'espace des morphismes de degré j de E_n^n dans E_n^{n+j} , les flèches π_n^j et φ_{n-1}^{j+1} étant définies de la manière habituelle. Le diagramme E_n^ℓ ainsi obtenu est le complété de E_{n-1}^ℓ (par $(e_n^j, \pi_n^j, \varphi_{n-1}^{j+1})$).

En particulier, si $\ell = \infty$, le diagramme E_{n-1}^∞ , et la famille $(e_n^j, \pi_n^j, \varphi_{n-1}^{j+1})$, ont pour complété un diagramme E_n^∞ , de type (n, ∞) .

§-3 : HOLONOMIE

DEFINITION 1

Un espace holonome est une algèbre de Lie filtrée $(E, (E^j)_{j \in \mathbb{Z}})$ possédant les propriétés suivantes :

- a) La filtration $(E^j)_{j \in \mathbb{Z}}$ est décroissante
- b) $\exists k \geq 1$ tel que $E^{-k} = E$
- c) $\forall j \quad \dim E^j / E^{j+1} < \infty$
- d) E est séparé complet (en particulier $\cap E^j = 0$)
- e) Pour tout $j \geq 0$ et tout $x \in E^j \setminus E^{j+1}$ il existe $-s < 0$ et $y^{-s} \in E^{-s}$ tel que $[x, y^{-s}] \notin E^{-s+j+1}$.

REMARQUES 2

a) Le $n^{\text{ième}}$ gradué associé à E , c'est à dire $E_n = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} E^j / E^{j+n}$, est naturellement muni d'une structure d'algèbre de Lie graduée. La condition e) ci-dessus implique que, pour $j \geq 0$ et $\bar{x} \in E^j / E^{j+n}$, la restriction de $\text{ad } \bar{x}$ à $E_n^- = \bigoplus_{j \leq -1} E^j / E^{j+n}$ est nulle si et seulement si $\bar{x} = 0$. (C'est donc une condition qui assure la fidélité de la restriction à E_n^- de la représentation adjointe par les éléments de E_n^+).

- b) Il est clair que la projection $\pi_n : E_n \rightarrow E_{n-1}$ est un morphisme

(de degré 0) d'algèbres de Lie graduées. En outre l'injection canonique $\varphi_n : E_{n-1} \rightarrow E_n$, qui est de degré -1, vérifie : $\varphi_{n-1}[x, \pi_n y] = [\varphi_{n-1} x, y]$ (on retrouvera ces conditions sur les diagrammes).

L'algèbre de Lie $E = \prod_{r \geq -1} V \otimes \binom{r+1}{0} V^*$ des champs de vecteurs formels sur V , (espace vectoriel de dimension n), est un espace holonome (pour la filtration usuelle $E^j = \prod_{r \geq j} V \otimes \binom{r+1}{0} V^*$). Il correspond au plus simple des cas considérés dans la proposition suivante (celui où la donnée initiale est une algèbre de Lie abélienne $V = e^{-1}$).

PROPOSITION 3 (N. Tanaka)

A tout algèbre de Lie graduée négativement $g = e^{-k} \oplus e^{-k-1} \oplus \dots \oplus e^{-1}$ est canoniquement associé un espace holonome.

PREUVE

Soit en effet e^0 l'espace des dérivations (de degré 0) de g et, par récurrence, soit e^ℓ l'ensemble des applications linéaires u , de degré ℓ , de $e^{-k} \oplus \dots \oplus e^{-1}$ dans $e^{-k-\ell} \oplus \dots \oplus e^{-1+\ell}$ vérifiant, quels que soient $x \in g$ et $y \in g$:

$$u([x, y]) = [u(x), y] + [x, u(y)]$$

(avec la convention que le crochet de $v \in e^j$ ($j \geq 0$) et $x \in g$ est défini par : $[v, x] = v(x)$).

Ceci étant, on définit, pour $x^i \in e^i$ ($i \geq 0$) et $y^j \in e^j$ ($j \geq 0$) le crochet $[x^i, y^j]$ en procédant comme pour le cas semi-holonome, par récurrence.

On définit $[x^i, y^j]$ pour $x^i \in e^i$ ($i \geq 0$) et $y^j \in e^j$ ($j \leq 0$) par :

$$[x^i, y^j] = x^i(y^j)$$

Enfin, pour $x^i \in e^i$ ($i < 0$) et $y^j \in e^j$ ($j < 0$) le crochet $[x^i, y^j]$ est le crochet dans g .

On vérifie qu'avec ce crochet, $E = \prod_{j \in \mathbb{Z}} e^j$ (avec la convention $e^j = 0$ pour $j < -k$), muni de la filtration naturelle, est un espace holonome.

DEFINITION 4

Un diagramme holonome de type (n, ℓ) est un diagramme semi-holonome $(e_i^j, \pi_i^j, \varphi_i^j)$, de même type, vérifiant en outre :

1) $\forall i \quad -1 \leq i \leq n$, $\bigoplus_{j \leq -1} e_i^j$ est une algèbre de Lie graduée.

2) $\forall -r < 0$ et $-s < 0$:

$$a) \pi_i^{-r-s}([x_i^{-r}, x_i^{-s}]) = [\pi_i^{-r}(x_i^{-r}), \pi_i^{-s}(x_i^{-s})] \quad (1)$$

$$b) \varphi_{i-1}^{-r-s}([x_{i-1}^{-r}, \pi_i^{-s}(x_i^{-s})]) = [\varphi_{i-1}^{-r}(x_{i-1}^{-r}), x_i^{-s}] \quad (2)$$

3) $\forall i \geq -1$, $\forall j \geq 0$, e_i^j est un sous-espace de l'espace des "dérivations de degré j " de $\bigoplus_{j \leq -1} e_i^j$ dans $\bigoplus_{j \leq i-1} e_i^j$. En d'autres termes :

$$x_i^j([x_i^{-r}, x_i^{-s}]) = [x_i^j(x_i^{-r}), x_i^{-s}] + [x_i^{-r}, x_i^j(x_i^{-s})]$$

(avec la convention : $[x_i^t, x_i^{-r}] = x_i^t(x_i^{-r})$ pour $0 \leq t \leq j-1$).

REMARQUE 5

Les conditions (1) et (2) s'étendent aux cas positifs.

EXEMPLE 6

Le diagramme E_n^ℓ de type (n, ℓ) déduit d'un espace holonome $(E, (E^j)_{j \in \mathbb{Z}})$ est holonome.

Un morphisme de diagrammes holonomes est un morphisme pour les diagrammes semi-holonomes sous-jacents qui, de plus, est un morphisme pour les structures d'algèbres de Lie graduées négativement $\bigoplus_{j \leq -1} e_i^j$ contenues dans le diagramme.

On démontre le :

THEOREME 7

Le groupe G des automorphismes d'un espace holonome $(E, (E^j)_{j \in \mathbb{Z}})$ est isomorphe à la limite projective $\varprojlim G^n$ où G^n est pour $n \geq -1$ le groupe des automorphismes du diagramme E_n^n déduit de E .

GROUPES DES JETS HOLONOMES INVERSIBLES GENERALISES

Soit $g = e^{-k} \oplus e^{-k-1} \oplus \dots \oplus e^{-1}$ une algèbre de Lie graduée négativement et soit $E = \prod_{i \in \mathbb{Z}} e^i$ l'espace holonome canoniquement associé à g (cf. Proposition 3).

DEFINITION 8

Le groupe L^{n+1} des jets holonomes inversibles généralisés d'ordre $n+1$ est le groupe des automorphismes du diagramme holonome E_n^n , de type (n, n) , déduit de E .

En procédant comme pour le cas semi-holonyme on obtient les résultats suivants.

PROPOSITION 9

1) Le noyau N^{n+1} de la projection $L^{n+1} \rightarrow L^n$ est, pour $n \geq 0$ un groupe abélien canoniquement isomorphe au groupe e^{n+1} des dérivations de degré $n+1$ de $g = e^{-k} \oplus \dots \oplus e^{-1}$ dans $e^{-k+n+1} \oplus \dots \oplus e^n$.

2) Le groupe L^n s'identifie canoniquement à un sous-groupe de L^{n+1} . Plus précisément, la projection $L^{n+1} \rightarrow L^n$ admet une section canonique.

COROLLAIRE 10

- L^{n+1} est produit semi-direct (interne) de N^{n+1} et L^n .
- L'algèbre de Lie $\mathfrak{l}^{n+1}$ de L^{n+1} s'identifie canoniquement, comme espace vectoriel, à $e^0 \oplus e^1 \oplus \dots \oplus e^n$.

REMARQUE 11

Les groupes de jets (holonomes) inversibles d'ordre $n+1$ usuels sont obtenus en partant de $g = e^{-1}$, algèbre de Lie abélienne.

COMPLEXE (de Spencer) D'UNE ALGÈBRE DE LIE GRADUÉE

Soit $g = g^{-k} \oplus \dots \oplus g^{-1} \oplus g^0 \oplus \dots \oplus g^r \oplus \dots$ une algèbre de Lie graduée. Soit $g^- = g^{-k} \oplus \dots \oplus g^{-1}$, c'est une sous-algèbre de Lie de g .

La représentation adjointe de g^- dans g fournit des groupes de cohomologie $H^i(g^-, g)$. La graduation de g permet de graduer les groupes $H^i(g^-, g)$ et d'obtenir ainsi des groupes $H^{i,j}$ qui sont les groupes de cohomologie (de Spencer) de g . Le cas habituel correspond à $g^- = g^{-1}$, algèbre de Lie abélienne.

Plus précisément, la graduation de g^- permet, pour tout q , de graduer $\Lambda^q g^-$:

$$\Lambda^q g^- = \bigoplus_{r \leq -q} \Lambda_r^q g^-$$

avec

$$\Lambda_r^q g^- = \bigoplus_{i_1 + \dots + i_q = -r} g^{-i_1} \wedge \dots \wedge g^{-i_q}$$

On définit $C^{p,q}(g^-, g)$ comme l'espace des applications linéaires de degré $p+q-1$ de $\Lambda^q g^-$ dans g .

On définit $\partial : C^{p,q} \rightarrow C^{p-1,q+1}$ par :

$$\begin{aligned} \partial \Psi(x_1, \dots, x_{q+1}) &= \sum_i (-1)^{i+1} [x_i, \Psi(x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_{q+1})] \\ &+ \sum_{i < j} (-1)^{i+j} \Psi([x_i, x_j], x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, \hat{x}_j, \dots, x_{q+1}). \end{aligned}$$

Soit E_n^n le diagramme holonome de type (n, n) déduit de l'espace holonome $E = \prod_{i \in \mathbb{Z}} e^i$ canoniquement associé à l'algèbre de Lie $e^{-k} \oplus \dots \oplus e^{-1}$ (cf. Proposition 3).

Soit $\bar{N}^{n+1}$ (resp N^{n+1}) le groupe des automorphismes semi-holonomes (resp holonomes) de E_n^n dont la restriction à E_{n-1}^{n-1} est l'identité (donc $\bar{N}^{n+1} = \text{Ker}(\bar{L}^{n+1} \rightarrow \bar{L}^n)$ et $N^{n+1} = \text{Ker}(L^{n+1} \rightarrow L^n)$). On sait que $\bar{N}^{n+1}$ est canoniquement isomorphe au groupe des applications linéaires Ψ , de degré $n+1$ de $e^{-k} \oplus \dots \oplus e^{-1}$ dans $e^{-k+n+1} \oplus \dots \oplus e^n$.

LEMME 12

Le groupe $N^{n+1} \subset \bar{N}^{n+1}$ est caractérisé par la condition : $\partial\Psi = 0$.

PREUVE

Ceci est trivial. On sait en effet que Ψ définit un élément de N^{n+1} si et seulement si Ψ est une dérivation, c'est à dire : $\forall p, \forall q, \forall x^{-p}, \forall y^{-q}$

$$\Psi([x^{-p}, y^{-q}]) = [\Psi(x^{-p}), y^{-q}] + [x^{-p}, \Psi(y^{-q})]$$

ce qui s'écrit encore :

$$\partial\Psi(x^{-p}, y^{-q}) = 0.$$

PRESQUE HOLONOMIE

Comme précédemment, $g = e^{-k} \oplus \dots \oplus e^{-1}$ est une algèbre de Lie graduée, $E = \prod_{i \in \mathbb{Z}} e^i$ est l'espace holonome associé à g et E_n^p le diagramme de type (n, p) déduit de E .

DEFINITION 13

Un diagramme semi-holonome $E_n^n = (e_i^j, \pi_i^j, \varphi_i^j)$ est dit presque-holonome si le diagramme E_{n-1}^n déduit de E_n^n est holonome.

La notion d'isomorphisme de diagrammes presque-holonomes est claire : c'est un isomorphisme de diagrammes semi-holonomes qui est, en restriction à l'ordre $n-1$, un isomorphisme de diagrammes holonomes.

En particulier, le diagramme E_n^n peut être considéré comme diagramme presque holonome (ceci revient à "oublier le crochet" à l'ordre n). On note $\mathcal{V}_{L^{n+1}}$ le groupe des automorphismes presque-holonomes de E_n^n . On a, évidemment : $L^{n+1} \subset \mathcal{V}_{L^{n+1}}$. On a de même (par restriction à l'ordre $n-1$) une projection $\mathcal{V}_{L^{n+1}} \rightarrow L^n$, dont le noyau $\mathcal{N}^{\mathcal{V}_{L^{n+1}}}$ est canoniquement isomorphe au groupe des applications linéaires de degré $n+1$ de $g = e^{-k} \oplus \dots \oplus e^{-1}$ dans $e^{-k+n+1} \oplus \dots \oplus e^n$. De plus identifiant L^n à son image par la composée $L^n \rightarrow L^{n+1} \rightarrow \mathcal{V}_{L^{n+1}}$, on a : $\mathcal{V}_{L^{n+1}} = L^n \cdot \mathcal{N}^{\mathcal{V}_{L^{n+1}}}$ (produit semi direct).

Tout ce qui a été dit des éléments de connexion, dans le cas semi-holonome s'applique évidemment au cas presque-holonome.

ACTION DE $\mathcal{V}_{L^{n+1}}$ DANS L'ESPACE DES COCHAINES $C^{n,2}$

On dispose, pour tout p, q , d'une action du groupe L^0 dans $C^{p,q}$, définie par :

$$(u_o \Psi)(x_1, \dots, x_q) = u_o(\Psi(u_o^{-1}(x_1), \dots, u_o^{-1}(x_q)))$$

Ceci étant, soit $\mathcal{U}_{n+1}^{\mathcal{V}} = u_n \cdot a_{n+1} \in \mathcal{V}_{L^{n+1}} = L^n \cdot \mathcal{N}^{\mathcal{V}_{L^{n+1}}}$. Comme $\mathcal{N}^{\mathcal{V}_{L^{n+1}}} \simeq C^{n+1,1}$, on peut, pour tout $a_{n+1} \in \mathcal{N}^{\mathcal{V}_{L^{n+1}}}$, définir $\partial a_{n+1} \in C^{n,2}$. On définit alors, pour $\Psi \in C^{n,2}$:

$$\mathcal{U}_{n+1}^{\mathcal{V}} \Psi = u_o(\Psi - \partial a_{n+1})$$

(où u_0 est la projection de $u_n \in L^n$ dans L^0). Ceci fournit l'action de $\mathcal{L}^{n+1}$ dans $C^{n,2}$.

COMPLETION D'UN DIAGRAMME HOLONOME

Se reporter au cas semi-holonome, et remplacer "semi-holonome" par "holonome".

CHAPITRE III

REPERAGES DE TOUS ORDRES DES N F ET N R F-VARIETES

§-1 : ESPACES DE REPERES D'UNE N F-VARIETE

L'espace vectoriel gradué $e = e^{-k} \oplus \dots \oplus e^{-1}$ est fixé. $E = \prod_{i \in \mathbb{Z}} e^i$ est l'espace semi-holonyme associé à e (cf. II, §-2), E_n^n est le diagramme de type (n,n) déduit de E ($n \geq -1$), $\bar{L}^{n+1}$ est le groupe des jets semi-holonomes inversibles d'ordre $n+1$. C'est le groupe des automorphismes de E_n^n . On rappelle la décomposition $\bar{L}^{n+1} = \bar{N}^{n+1} \cdot \bar{L}^n$.

THEOREME 1

A toute variété négativement filtrée (M,F) , de type e est canoniquement associée une suite $(\bar{H}^n(M,F), \Delta(\bar{H}^n))$, $n \geq -1$, où :

1) $\bar{H}^n(M,F)$, noté plus brièvement $\bar{H}^n$, est un espace fibré principal différentiable de base M , de groupe structural $\bar{L}^n$.

2) $\Delta(\bar{H}^n)$ est un fibré différentiable de base $\bar{H}^n$, de fibre type E_n^n , de groupe structural $\bar{N}^{n+1}$ de sorte que :

a) Pour la restriction, à $\bar{N}^{n+1}$, de l'action à droite de $\bar{L}^{n+1}$ dans $\bar{H}^{n+1}$, l'espace $\bar{H}^{n+1}$ est le fibré principal, (de base $\bar{H}^n$ et de groupe $\bar{N}^{n+1}$) associé à $\Delta(\bar{H}^n)$.

b) L'action de $\bar{L}^{n+1}$ sur $\bar{H}^{n+1}$ se déduit de celle de $\bar{L}^n$ sur $\bar{H}^n$ par la relation suivante, où $x_{n+1} \in \bar{H}^{n+1}$, $u_{n+1} \in \bar{L}^{n+1}$ et x_n (resp u_n) est la projection de x_{n+1} (resp u_{n+1}) dans $\bar{H}^n$ (resp $\bar{L}^n$) :

$$x_{n+1} \cdot u_{n+1} = \Delta_{x_n}^{u_n} R^n \circ x_{n+1} \circ u_{n+1}$$

($\Delta_{x_n}^{u_n}$ est l'isomorphisme de $\Delta_{x_n}(\bar{H}^n)$, fibre de $\Delta(\bar{H}^n)$ en x_n sur $\Delta_{x_n \cdot u_n}(\bar{H}^n)$, fibre de $\Delta(\bar{H}^n)$ en $x_n \cdot u_n$, induit par la translation à droite R^n , par u_n , dans $\bar{H}^n$).

PREUVE

La démonstration de ce résultat s'effectue par récurrence. Il s'agit donc de mettre en évidence le passage d'un terme au suivant. Il suffit pour cela de définir avec précision les premiers termes de chacune des deux suites $\bar{H}^n$ et $\Delta(\bar{H}^n)$, ce que nous faisons ci-dessous.

On pose : $\bar{H}^{-1}(M, F) = M$

Pour $x_{-1} \in \bar{H}^{-1}$, $\Delta_{x_{-1}}(\bar{H}^{-1})$ est le diagramme de type $(-1, -1)$ suivant :

$$(F^{-k}/F^{-k+1})_{x_{-1}} \quad \dots \quad (F^{-2}/F^{-1})_{x_{-1}} \quad (F^{-1})_{x_{-1}}$$

Il est clair que $\Delta(\bar{H}^{-1}) = \bigcup_{x_{-1} \in \bar{H}^{-1}} \Delta_{x_{-1}}(\bar{H}^{-1})$ est un fibré différentiable de base M , de fibre type E_{-1}^{-1} et de groupe structural $\bar{L}^0$. L'espace $\bar{H}^0(M, F)$ est le fibré principal associé à $\Delta(\bar{H}^{-1})$.

En $x_{-1} \in M$, $\Delta_{x_{-1}}(\bar{H}^{-1})$ est un diagramme semi-holonome de type $(-1, -1)$. On note $\Delta_{x_{-1}}^{\infty}(\bar{H}^{-1})$ le diagramme semi-holonome de type $(-1, \infty)$ obtenu par complétion de $\Delta_{x_{-1}}(\bar{H}^{-1})$ (cf. II, §-2). Les termes d'indices positifs de $\Delta_{x_{-1}}^{\infty}(\bar{H}^{-1})$ seront notés $\bar{f}_{x_{-1}}^0, \bar{f}_{x_{-1}}^1, \dots, \bar{f}_{x_{-1}}^r, \dots$ (donc $\bar{f}_{x_{-1}}^r$ est l'espace des applications linéaires de degré r de $(F^{-k}/F^{-k+1})_{x_{-1}} \oplus \dots \oplus F_{x_{-1}}^{-1}$ dans $(F^{-k}/F^{-k+1})_{x_{-1}} \oplus \dots \oplus F_{x_{-1}}^{-1} \oplus \bar{f}_{x_{-1}}^0 \oplus \dots \oplus \bar{f}_{x_{-1}}^{r-1}$). Tout $x_0 \in \bar{H}^0$, d'origine $x_{-1} \in M$, qui par définition est un isomorphisme de E_{-1}^{-1} sur $\Delta_{x_{-1}}(\bar{H}^{-1})$, se prolonge canoniquement en un isomorphisme, encore noté x_0 , de E_{-1}^{∞} sur $\Delta_{x_{-1}}^{\infty}(\bar{H}^{-1})$. Ceci étant :

CONSTRUCTION DE $\Delta(\bar{H}^0)$

Soit π la projection de $\bar{H}^0$ sur M et soit $\bar{F}^0$ le relèvement de la filtration F par π . On a donc : $\bar{F}_0^{-i} = \pi_*^{-1}(F^i)$ pour $i \leq -1$, $\bar{F}_0^0 = V \bar{H}^0 =$ fibré vectoriel pour π , $\bar{F}_0^1 = \{0\}$.

Etant donné $x_0 \in \bar{H}^0$, d'origine $x_{-1} = \pi(x_0)$, par définition, $\Delta_{x_0}(\bar{H}^0)$ est le diagramme semi-holonome suivant :

$$\begin{array}{ccccccc}
 (\bar{F}_0^{-k-1}/\bar{F}_0^{-k+1})_{x_0} & (\bar{F}_0^{-k}/\bar{F}_0^{-k+2})_{x_0} & \dots\dots\dots & (\bar{F}_0^{-2}/\bar{F}_0^0)_{x_0} & & (\bar{F}_0^{-1})_{x_0} & \\
 & \swarrow \downarrow \swarrow & & \downarrow \swarrow & & \downarrow \swarrow & \\
 & & (F^{-k}/F^{-k+1})_{x_{-1}} & \dots\dots\dots & (F^{-2}/F^{-1})_{x_{-1}} & & F_{x_{-1}}^{-1} \quad \bar{f}_{x_{-1}}^0
 \end{array}$$

où :

- Les flèches vecticales sont déduites de π
- La flèche oblique $(\bar{F}_0^{-i}/\bar{F}_0^{-i+1})_{x_{-1}} \rightarrow (\bar{F}_0^{-i-1}/\bar{F}_0^{-i+1})_{x_0}$ est la composée de l'isomorphisme $(\bar{F}_0^{-i}/\bar{F}_0^{-i+1})_{x_{-1}} \simeq (\bar{F}_0^{-i}/\bar{F}_0^{-i+1})_{x_0}$ et de l'injection

$$(\bar{F}_0^{-i}/\bar{F}_0^{-i+1})_{x_0} \rightarrow (\bar{F}_0^{-i-1}/\bar{F}_0^{-i+1})_{x_0}.$$

- La flèche $\bar{f}_{x_{-1}}^0 \rightarrow (\bar{F}_0^{-1})_{x_0}$ est composée des trois applications suivantes :

- * L'isomorphisme $(x_0)^{-1}$ de $\bar{f}_{x_{-1}}^0$ sur e^0 (algèbre de Lie de $\bar{L}^0$)
- * L'isomorphisme de e^0 sur $(\bar{F}_0^0)_{x_0}$ (espace vertical en x_0)
- * L'injection de $(\bar{F}_0^0)_{x_0}$ dans $(\bar{F}_0^{-1})_{x_0}$.

On pose : $\Delta(\bar{H}^0) = \bigcup_{x_0 \in \bar{H}^0} \Delta_{x_0}(\bar{H}^0)$. On note II la projection $\Delta(\bar{H}^0) \rightarrow \bar{H}^0$.

Pour définir la structure fibrée de $\Delta(\bar{H}^0)$ on doit introduire la notion de connexion généralisée.

DEFINITION 2

Une connexion (généralisée) est définie dans un ouvert $U^0 = \pi^{-1}(U)$ de $\bar{H}^0$, (U ouvert de M), par la donnée, pour tout $x_0 \in U^0$ d'un élément de connexion (généralisé) $C_{x_0}^0$ (cf II, §-2) dans $\Delta_{x_0}(\bar{H}^0)$ de sorte que :

- 1) L'élément de connexion $C_{x_0}^0$ dépende différentiablement de x_0
- 2) (Invariance à droite). Quels que soient $x_0 \in \bar{H}^0$ et $u_0 \in \bar{L}^0$:

$$C_{x_0 \cdot u_0}^0 = (R_{x_0}^{u_0})_* (C_{x_0}^0)$$

$(R_{x_0}^{u_0}$: translation à droite par u_0 dans $\bar{H}^0$, $(R_{x_0}^{u_0})_*$: son prolongement à $(\bar{F}_0^{-k-1}/\bar{F}_0^{-k+1}) \oplus \dots \oplus \bar{F}_0^{-1}$).

Il est clair qu'il existe des connexions dans U^0 lorsque U est suffisamment petit. Ainsi, si U est source d'une section différentiable σ de

$\pi : \bar{H}^0 \rightarrow M$, on construit aisément la connexion "au-dessus de σ ", puis on translate.

On notera (cf Proposition 12, II, §-2) que la donnée de $C_{x_0}^0$ définit un isomorphisme, qu'on notera $\tilde{C}_{x_0}^0$, de E_0^0 sur $\Delta_{x_0}(\bar{H}^0)$. (Cet isomorphisme coïncide avec x_0 au niveau -1).

Nous pouvons maintenant définir les cartes de $\Delta(\bar{H}^0)$: ce sont les applications $\Phi_{C^0} : U^0 \times E_0^0 \rightarrow \Pi^{-1}(U^0) \subset \Delta(\bar{H}^0)$ définies par :

$$\Phi_{C^0} \mid \{x_0\} \times E_0^0 = \tilde{C}_{x_0}^0 \quad \forall x_0 \in U^0$$

(où C^0 est une connexion définie sur $U^0 = \pi^{-1}(U)$). On vérifie aisément que ces applications Φ_{C^0} définissent sur $\Delta(\bar{H}^0)$ une structure fibrée de base $\bar{H}^0$, de fibre type E_0^0 , de groupe structural $\bar{N}^1$.

L'automorphisme de $\Delta(\bar{H}^0)$ induit par la translation à droite R^{u_0} par $u_0 \in \bar{L}^0$ dans $\bar{H}^0$, est noté ΔR^{u_0} .

CONSTRUCTION DE $\bar{H}^1(M, F)$

Par définition, $\bar{H}^1(M, F)$ est le fibré principal (de base $\bar{H}^0$ et de groupe $\bar{N}^1$) associé à $\Delta(\bar{H}^0)$. Un élément $x_1 \in \bar{H}^1$, d'origine $x_0 \in \bar{H}^0$, est donc un isomorphisme de E_0^0 sur $\Delta_{x_0}(\bar{H}^0)$ dont la restriction à E_{-1}^{-1} est x_0 (et réciproquement).

On définit une action à droite de $\bar{L}^1 = \bar{N}^1$ sur $\bar{H}^1$ par :

$$x_1 \cdot u_1 = \Delta_{x_0} R^{u_0} \circ x_1 \circ u_1$$

($x_1 \in \bar{H}^1$, $u_1 \in \bar{L}^1$, x_0 (resp u_0) projection de x_1 (resp u_1) dans $\bar{H}^0$ (resp $\bar{L}^0$)). Ceci munit $\bar{H}^1$ d'une structure de fibré principal de base M et de groupe $\bar{L}^1$,

la projection $\bar{H}^1 \rightarrow M$ étant la composée $\bar{H}^1 \rightarrow \bar{H}^0 \rightarrow M$.

Soit $\Delta_{x_0}^\infty(\bar{H}^0)$ le diagramme semi-holonome de type $(0, \infty)$ obtenu par complétion de $\Delta_{x_0}(\bar{H}^0)$. C'est donc le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccccc}
 (\bar{F}_o^{-k-1}/\bar{F}_o^{-k+1})_{x_0} & (\bar{F}_o^{-k}/\bar{F}_o^{-k+2})_{x_0} & \dots\dots & (\bar{F}_o^{-1})_{x_0} & (\bar{f}_o^0)_{x_0} & (\bar{f}_o^1)_{x_0} \\
 & \downarrow & \swarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
 & (F^{-k}/F^{-k+1})_{x_{-1}} & \dots\dots\dots & (F^{-1})_{x_{-1}} & f_{x_{-1}}^0 & \bar{f}_{x_{-1}}^1
 \end{array}$$

où : - La ligne inférieure est le diagramme $\Delta_{x_{-1}}^\infty(\bar{H}^{-1})$ déjà défini.

- $(\bar{f}_o^r)_{x_0}$ est, pour $r \geq 0$, l'espace des morphismes de degré r du diagramme $\Delta_{x_0}(\bar{H}^0)$ dans le diagramme $\Delta_{x_0}^{r-1}(\bar{H}^0)$, diagramme de type $(0, r-1)$ extrait de $\Delta_{x_0}^\infty(\bar{H}^0)$.

On remarquera que tout $x_1 \in \bar{H}^1$, d'origine $x_0 \in \bar{H}^0$, étant, par définition, un isomorphisme de E_o^0 sur $\Delta_{x_0}(\bar{H}^0)$, il définit un isomorphisme de E_o^∞ sur $\Delta_{x_0}^\infty(\bar{H}^0)$, encore noté x_1 . En particulier, $(\bar{f}_o^0)_{x_0}$ est isomorphe, par $(x_1)^{-1}$ à e_o^0 , algèbre de Lie de $\bar{L}^1$.

CONSTRUCTION DE $\Delta(\bar{H}^1)$

Soit π' (resp π'') la projection de $\bar{H}^1$ sur $\bar{H}^0$ (resp $\bar{H}^{-1} = M$).

Soit F_1 le relèvement de la filtration $\bar{F}_o$ par π' .

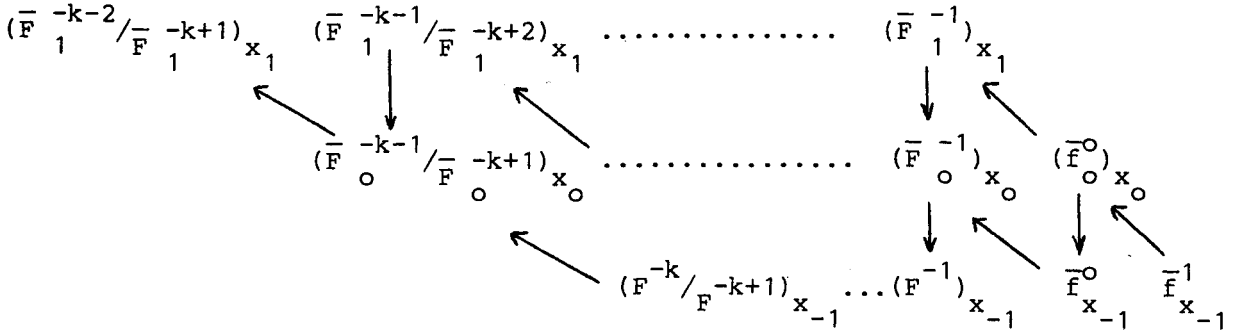
On a donc : $\bar{F}_1^i = (\pi'_*)^{-1}(\bar{F}_o^i) = (\pi''_*)^{-1}(F^i)$ pour $i \leq -1$

$\bar{F}_1^0 = (\pi'_*)^{-1}(\bar{F}_o^0) = (\pi''_*)^{-1}(0) =$ fibré vectical pour π''

$\bar{F}_1^1 =$ fibré vectical pour π'

$\bar{F}_1^2 = \{0\}$.

Etant donné $x_1 \in \bar{H}^1$, (avec $x_0 = \pi'(x_1)$ et $x_{-1} = \pi''(x_1)$), on définit $\Delta_{x_1}(\bar{H}^1)$ comme étant le diagramme suivant :



ou :

- Le diagramme de type (0,0) extrait du précédent (i.e les deux lignes inférieures) est le diagramme de type (0,0) extrait de $\Delta_{x_0}^\infty(\bar{H}^0)$, déjà défini.

- Les flèches vecticales $(\bar{F}_1^i/\bar{F}_1^{i+3})_{x_1} \rightarrow (\bar{F}_0^i/\bar{F}_0^{i+2})_{x_0}$ sont déduites de π' .

- Les flèches obliques $(\bar{F}_0^i/\bar{F}_0^{i+2})_{x_0} \rightarrow (\bar{F}_1^{i-1}/\bar{F}_1^{i+2})_{x_1}$ sont composées de l'isomorphisme $(\bar{F}_0^i/\bar{F}_0^{i+2})_{x_0} \simeq (\bar{F}_1^i/\bar{F}_1^{i+2})_{x_1}$ (dédit de π') et de l'injection $(\bar{F}_1^i/\bar{F}_1^{i+2})_{x_1} \rightarrow (\bar{F}_1^{i-1}/\bar{F}_1^{i+2})_{x_1}$.

- Enfin, la flèche $(\bar{f}_0^0)_{x_0} \rightarrow (\bar{F}_1^{-1})_{x_1}$ est obtenue en composant les trois applications :

* L'isomorphisme $(x_1)^{-1}$ de $(\bar{f}_0^0)_{x_0}$ sur e_0^0 (algèbre de Lie de $\bar{L}^1$)

* L'isomorphisme de e_0^0 sur $(\bar{F}_1^0)_{x_1}$ (cf : $\bar{H}^1$ est un $\bar{L}^1$ -fibré principal).

* L'injection $(\bar{F}_1^0)_{x_1} \rightarrow (\bar{F}_1^{-1})_{x_1}$.

On pose : $\Delta(\bar{H}^1) = \bigcup_{x_1 \in \bar{H}^1} \Delta_{x_1}(\bar{H}^1)$. On note Π la projection $\Delta(\bar{H}^1) \rightarrow \bar{H}^1$.

DEFINITION 3

Soit U un ouvert de M , $U^0 = \pi^{-1}(U)$, $U^1 = (\pi')^{-1}(U^0) = (\pi'')^{-1}(U)$.

Une connexion (généralisée), C^1 , est définie dans U^1 par la donnée, pour tout $x_1 \in U^1$, d'un élément de connexion (généralisée) $C_{x_1}^1$ dans $\Delta_{x_1}(\bar{H}^1)$, compatible avec $x_1 : E_O^0 \rightarrow \Delta_{x_O}(\bar{H}^0)$ (cf II, §-2) et vérifiant les conditions suivantes :

- 1) $C_{x_1}^1$ dépend différentiablement de x_1
- 2) C^1 est invariante à droite par $\bar{L}^2$, c'est à dire :

$$C_{x_1 \cdot u_1}^1 = (R^{u_1})_* (C_{x_1}^1) \quad x_1 \in \bar{H}^1, u_1 \in \bar{L}^1$$

(où $(R^{u_1})_*$ est le prolongement de la translation à droite R^{u_1} à $\bar{F}_1^{-k-2} / \bar{F}_1^{-k+1} \oplus \dots \oplus \bar{F}_1^{-1}$).

Il est clair que de telles connexions existent si U est suffisamment petit (i.e est source d'une section différentiable de π'').

On notera $\gamma_{x_1}^1$ l'isomorphisme de E_1^1 sur $\Delta_{x_1}(\bar{H}^1)$ défini par la donnée de $C_{x_1}^1$ et de x_1 (isomorphisme $E_O^0 \rightarrow \Delta_{x_O}(\bar{H}^0)$) (cf Proposition 12, II, §-2).

Ceci étant, les cartes de $\Delta(\bar{H}^1)$ sont les applications

$\Phi_{C^1} : U^1 \times E_1^1 \rightarrow \mathbb{A}^{-1}(U^1)$ définies par :

$$\Phi_{C^1} \Big|_{\{x_1\} \times E_1^1} = \gamma_{x_1}^1 \quad \forall x_1 \in U^1$$

(où C^1 est une connexion sur U^1).

On vérifie que ces applications Φ_{C^1} définissent sur $\Delta(\bar{H}^1)$ une structure fibrée de base $\bar{H}^1$, de fibre type E_1^1 , de groupe structural $\bar{N}^2$.

L'automorphisme de $\Delta(\bar{H}^1)$ induit par R^{u_1} , translation à droite par u^1 dans $\bar{H}^1$, est noté ΔR^{u_1} .

CONSTRUCTION DE $\bar{H}^2(M, F)$

Par définition, $\bar{H}^2(M, F)$ est le fibré principal (de base $\bar{H}^1$ et de groupe $\bar{N}^2$) associé à $\Delta(\bar{H}^1)$. Un isomorphisme $E_1^1 \rightarrow \Delta_{x_1}(\bar{H}^1)$ appartient donc à $\bar{H}^2$ si et seulement si l'isomorphisme $E_0^0 \rightarrow \Delta_{x_0}(\bar{H}^0)$ qu'on en déduit est l'isomorphisme défini par x_1 .

On définit une action à droite de $\bar{L}^2 = \bar{N}^2 \cdot \bar{L}^1$ sur $\bar{H}^2$ par :

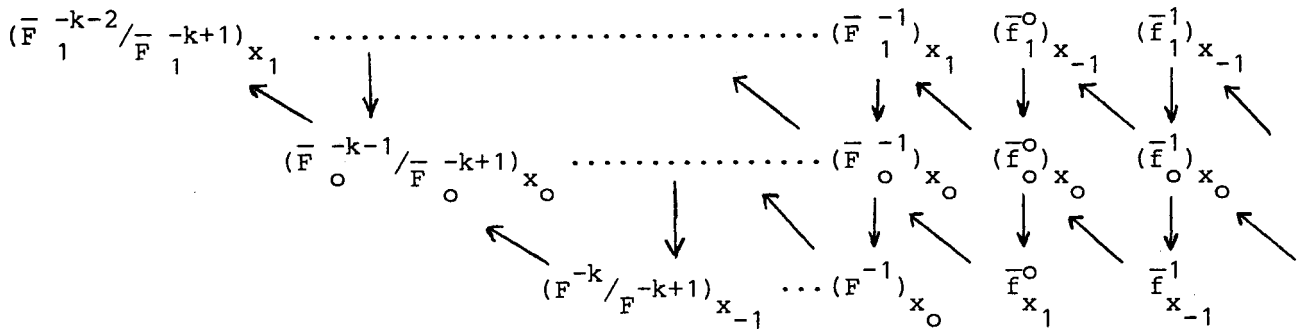
$$x_2 \cdot u_2 = \Delta_{x_1} R^{u_1} \circ x_2 \circ u_2$$

($x_2 \in \bar{H}^2$, $u_2 \in \bar{L}^2$, x_1 (resp u_1) projection de x_2 (resp u_2) dans $\bar{H}^1$ (resp $\bar{L}^1$)).

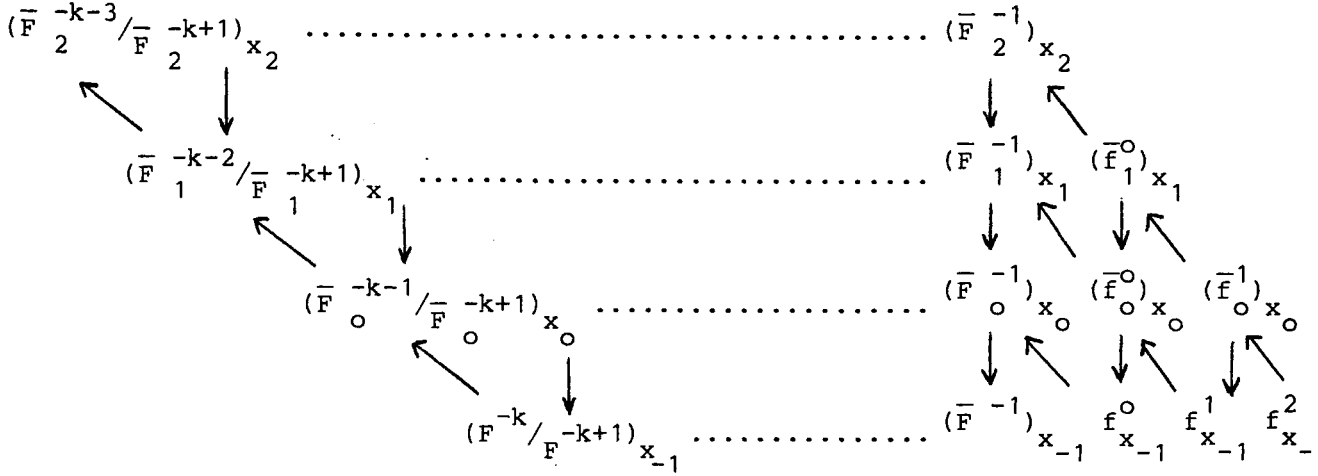
Ceci munit $\bar{H}^2$ d'une structure de fibré principal de base M et de groupe $\bar{L}^2$.

La méthode est désormais claire : le passage de $\bar{H}^2$ à $\bar{H}^3$ s'effectue comme suit :

- De $\Delta_{x_1}(\bar{H}^1)$ on passe au diagramme semi-holonome $\Delta_{x_1}^\infty(\bar{H}^1)$ suivant :



- On définit ensuite $\Delta_{x_2}(\bar{H}^2)$, à partir du précédent. On obtient :



(où $\bar{F}_2$ est la filtration de $\bar{H}^2$ obtenue par relèvement de la filtration $\bar{F}_1$ par la projection $\bar{H}^2 \rightarrow \bar{H}^1$).

- Les connexions semi-holonomes (généralisées) C^2 sur les ouverts $\bar{L}^2$ -saturés U^2 de $\bar{H}^2$ permettent, par l'intermédiaire des applications $\Phi_{C^2} : U^2 \times E_2^2 \rightarrow \Delta_{x_2}(\bar{H}^2)$ de définir la structure fibrée de $\Delta(\bar{H}^2)$, et, partant, le fibré principal associé $\bar{H}^3$. On définit ensuite l'action à droite de $\bar{L}^3$ dans $\bar{H}^3$ par : $x_3 \cdot u_3 = \Delta_{x_2}^{u_2} \circ x_3 \circ u_3$ d'où sur $\bar{H}^3$ une structure fibrée principale de base M et de groupe $\bar{L}^3$. etc....

DEFINITION 4

L'espace $\bar{H}^n(M, F)$ est le fibré des repères d'ordre $n+1$ de la variété négativement filtrée (M, F) .

Les constructions précédentes sont évidemment fonctorielles : si (M, F) et (M', F') sont deux N F -variétés de même type, tout isomorphisme (local) $f : (M, F) \rightarrow (M', F')$ définit, pour tout n , un isomorphisme, noté $\bar{H}^n(f)$, de $\bar{H}^n(M, F)$ sur $\bar{H}^n(M', F')$. Cet isomorphisme $\bar{H}^n(f)$ est défini comme suit : f

étant compatible avec les filtrations, le prolongement f_* de f aux vecteurs tangents induit, par passage aux quotients, un isomorphisme $\Delta^{-1}(f)$ de $\Delta(\bar{H}^{-1}(M, F))$ sur $\Delta(\bar{H}^{-1}(M', F'))$, et donc aussi un isomorphisme, noté $\bar{H}^0(f)$ de $\bar{H}^0(M, F)$ sur $\bar{H}^0(M', F')$. La compatibilité de $\bar{H}^0(f)$ avec les filtrations $\bar{F}_0$ et $\bar{F}'_0$ d'une part, avec les structures fibrées principales de $\bar{H}^0(M, F)$ et $\bar{H}^0(M', F')$ d'autre part, permet de prolonger $\bar{H}^0(f)$ en un isomorphisme, noté $\Delta^0(f)$, de $\Delta(\bar{H}^0(M, F))$ sur $\Delta(\bar{H}^0(M', F'))$. L'isomorphisme $\bar{H}^1(f)$ de $\bar{H}^1(M, F)$ sur $\bar{H}^1(M', F')$ qu'on en déduit, qui n'est, à priori compatible qu'avec les $\bar{N}^1$ -structures fibrées principales de $\bar{H}^1(M, F)$ et $\bar{H}^1(M', F')$ est, en fait compatible avec les $\bar{L}^1$ structures fibrées principales de $\bar{H}^1(M, F)$ et $\bar{H}^1(M', F')$. Ceci, et la compatibilité de $\bar{H}^1(f)$ avec les filtrations F_1 et F'_1 permet de définir $\Delta^1(f)$: $\Delta(\bar{H}^1(M, F)) \rightarrow \Delta(\bar{H}^1(M', F'))$ etc...

Pour utilisation ultérieure, on pose :

$$\pi_{n-1}^n = \text{projection canonique } \bar{H}^n \rightarrow \bar{H}^{n-1}$$

$$\bar{T}^1 \bar{H}^n = (\bar{F}_n^{-k-n-1} / \bar{F}_n^{-k+1}) \oplus (\bar{F}_n^{-k-n} / \bar{F}_n^{-k-2}) \oplus \dots \oplus (\bar{F}_n^{-2} / \bar{F}_n^n) \oplus \bar{F}_n^{-1}$$

$$\bar{T}^1 \pi_{n-1}^n = \text{projection } \bar{T}^1 \bar{H}^n \rightarrow \bar{T}^1 \bar{H}^{n-1} \text{ induite par } \pi_{n-1}^n.$$

LA FORME FONDAMENTALE

L'espace semi-holonome $E = \prod_{i \in \mathbb{Z}} e^i$ associé à $e = e^{-k} \oplus \dots \oplus e^{-1}$ est muni de sa filtration usuelle $(E^i)_{i \in \mathbb{Z}}$ (où $E^i = \prod_{j \geq i} e^j$). On convient, pour tout r et tout n , de poser :

$${}^r_T E_n = \bigoplus_{i \leq r} E^i / E^{i+n+2}$$

$$\begin{aligned} \text{Comme } E^i / E^{i+n+2} &= e^i \oplus \dots \oplus e^{i+n} \oplus e^{i+n+1} \\ &= (e^i \oplus \dots \oplus e^{i+n}) \oplus e^{i+n+1} \\ &= E^i / E^{i+(n-1)+2} \oplus E^{i+n+1} / E^{i+n+2} \end{aligned}$$

On a une décomposition :

$${}^r_T E_n = {}^r_T E_{n-1} \oplus {}^{r+n+1}_T E_{-1}$$

en particulier :

$${}^{-1}_T E_n = {}^{-1}_T E_{n-1} \oplus {}^n_T E_{-1}$$

et :

$${}^n_T E_{-1} = e^{-k} \oplus \dots \oplus e^n.$$

Soit alors $\bar{H}^{n+1}(M, F)$ l'espace des repères d'ordre $n+2$ de la N F -variété (M, F) et soit $x_{n+1} \in \bar{H}^{n+1}(M, F)$. Par définition, x_{n+1} induit un isomorphisme de ${}^{-1}_T E_n$ sur

$${}^{-1}_{T_{x_n}} \bar{H}^n = (\bar{F}^{-k-n-1}_1 / \bar{F}^{-k+1}_n)_{x_n} \oplus \dots \oplus (\bar{F}^{-p}_n / \bar{F}^{-p+n+2}_n)_{x_n} \oplus \dots \oplus (\bar{F}^{-1}_n)_{x_n}$$

(avec $x_n = \pi_n^{n+1}(x_{n+1})$).

DEFINITION 5

La forme fondamentale dans $\bar{H}^{n+1}(M, F)$ est l'application θ_{n+1} de ${}^{-1}_T \bar{H}^{n+1}$ sur ${}^{-1}_T E_n$ dont la restriction à ${}^{-1}_{T_{x_{n+1}}} \bar{H}^{n+1}$ est, pour $x_{n+1} \in \bar{H}^{n+1}$ définie par :

$$\theta_{n+1} \Big|_{{}^{-1}_{T_{x_{n+1}}} \bar{H}^{n+1}} = (x_{n+1})^{-1} \circ {}^{-1}_{T_{x_{n+1}}} \pi_n^{n+1}$$

La forme θ_{n+1} est donc une somme directe :

$$\theta_{n+1} = \theta_{n+1}^{-k-n-1} \oplus \dots \oplus \theta_{n+1}^{-p} \oplus \dots \oplus \theta_{n+1}^{-1}$$

où θ_{n+1}^{-p} , restriction de θ_{n+1} à $\bar{F}_{n+1}^{-p}/\bar{F}_{n+1}^{-p+n+3}$ est à valeurs dans $E^{-p}/E^{-p+n+2} = e^{-p} \oplus \dots \oplus e^{-p+n+1}$.

A la décomposition $\bar{T}^1 E_n = \bar{T}^1 E_{n-1} \oplus \bar{T}^n E_{-1}$ correspond la décomposition : $\theta_{n+1} = \theta'_{n+1} + \theta''_{n+1}$ où θ'_{n+1} (resp θ''_{n+1}) est à valeurs dans $\bar{T}^1 E_{n-1}$ (resp $\bar{T}^n E_{-1}$).

LEMME 6

La forme fondamentale θ_{n+1} est entièrement déterminée par θ''_{n+1} .

PREUVE

Soit $\theta_{n+1}^{-p_j}$ le $j^{\text{ième}}$ composante de θ_{n+1}^{-p} , de sorte que :

$$\theta_{n+1}^{-p_j} = \theta_{n+1}^{-p-p} + \dots + \theta_{n+1}^{-p_j} + \dots + \theta_{n+1}^{-p-p+n-1}, \text{ on vérifie que :}$$

$$\theta_{n+1}^{-p+1_j} = \theta_{n+1}^{-p_j} \left| \bar{F}_{n+1}^{-p+1}/\bar{F}_{n+1}^{-p+n+4} \right.$$

(Il est clair que $\bar{F}_{n+1}^{-p+1}/\bar{F}_{n+1}^{-p+n+4} \subset \bar{F}_{n+1}^{-p}/\bar{F}_{n+1}^{-p+n+3}$ ce qui donne un sens au

second membre de cette égalité). Donc, une fois connu, pour tout p ,

$\theta_{n+1}^{-p-p+n+1}$, la forme θ_{n+1} est connue, d'où le résultat car $\theta''_{n+1} = \bigoplus_{-p \leq -1} \theta_{n+1}^{-p-p+n+1}$.

NOTATION 7

On pose, désormais : $\theta''_{n+1} = \hat{\theta}_{n+1}$

Le résultat suivant prolonge un résultat bien connu.

PROPOSITION 8

Soient (M^1, F^1) et (M^2, F^2) deux N F-variétés de même type. Une C N S pour qu'un difféomorphisme $\Psi : \bar{H}^{n+1}(M^1, F^1) \rightarrow \bar{H}^{n+1}(M^2, F^2)$ soit, localement, le relèvement aux repères d'ordre $n+1$ d'un isomorphisme $f : (M^1, F^1) \rightarrow (M^2, F^2)$ (de N F-variétés) est que :

1) Ψ soit compatible avec les filtrations F_{n+1}^1 et F_{n+1}^2 de $\bar{H}^{n+1}(M^1, F^1)$ et $\bar{H}^{n+1}(M^2, F^2)$ respectivement

$$2) (\bar{T}^1 \Psi)^* \theta_{n-1}^2 = \theta_{n+1}^1$$

où θ_{n+1}^1 (resp θ_{n+1}^2) est la forme fondamentale de $\bar{H}^{n+1}(M^1, F^1)$ (resp $\bar{H}^{n+1}(M^2, F^2)$) et $\bar{T}^1 \Psi$ l'application de $\bar{T}^1 \bar{H}^{n+1}(M^1, F^1)$ dans $\bar{T}^1 \bar{H}^{n+1}(M^2, F^2)$ déduite de Ψ .

PREUVE

* La nécessité des conditions est évidente.

* Pour démontrer la suffisance, on procède par récurrence :

- Si $n+1 = 0$, la condition 1) implique que, localement, Ψ transforme les fibres de $\bar{H}^0(M^1, F^1)$ sur les fibres de $\bar{H}^0(M^2, F^2)$ (car Ψ préserve les espaces verticaux). Il existe donc un difféomorphisme $f : (M^1, F^1) \rightarrow (M^2, F^2)$ compatible avec les filtrations, tel que $\pi_{-1}^0 \circ \Psi = f \circ \pi_{-1}^0$. La condition 2) entraîne que : $\Psi = \bar{H}^0(f)$.

- Si $n+1$ quelconque, toujours par 1) il existe $\gamma : \bar{H}^n(M^1, F^1) \rightarrow \bar{H}^n(M^2, F^2)$ compatible avec les filtrations F_n^1 et F_n^2 , telle que : $\pi_n^{n+1} \circ \Psi = \gamma \circ \pi_n^{n+1}$ la condition 2) et les liens évidents entre forme fondamentale dans $\bar{H}^{n+1}$ et $\bar{H}^n$, impliquent que : $(\bar{T}^1 \gamma)^* (\theta_n^2) = \theta_n^1$. Il existe donc $f : (M, F) \rightarrow (M', F')$ telle que : $\gamma = \bar{H}^n(f)$. La condition 2) à nouveau donne alors :

$$\Psi = \bar{H}(\gamma) = \bar{H}^{n+1}(f).$$

§-2 : ESPACES DE REPERES D'UNE N R F-VARIETE

- L'algèbre de Lie graduée $e = e^{-k} \oplus \dots \oplus e^{-1}$ est fixée.
- $E = \prod_{i \in \mathbb{Z}} e^i$ est l'espace holonome associé à e (cf. II, §-3).
- E_n^p est le diagramme de type (n,p) déduit de E .
- L^{n+1} est le groupe des jets holonomes inversibles d'ordre $n+1$, c'est à dire le groupe des automorphismes de E_n^n .
- On rappelle la décomposition $L^{n+1} = N^{n+1} \cdot L^n$. Soit $g = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} e^i$, $g^- = e = e^{-k} \oplus \dots \oplus e^{-1}$. On rappelle (cf II, §-3) que $C^{p,q}$ est l'espace des applications de degré $p+q-1$ de $\bigwedge^q g^-$ dans g et que l'on dispose d'un bord : $\partial : C^{p,q} \rightarrow C^{p-1,q+1}$.

On note $\bar{e}$ l'espace vectoriel gradué sous-jacent à e et l'on convient pour $i < -1$ de poser : $\bar{e}^i = e^i$. L'espace semi-holonome associé à $\bar{e}$ est noté $\bar{E}$, et le diagramme de type (n,p) déduit de $\bar{E}$, $\bar{E}_n^p$. Enfin $\bar{L}^{n+1}$ est le groupe des jets semi-holonomes inversibles d'ordre $n+1$ (i.e le groupe des automorphismes de $\bar{E}_n^n$). On a, évidemment : $L^{n+1} \subset \bar{L}^{n+1} = \bar{L}^n \cdot \bar{N}^{n+1}$.

A noter enfin que le groupe L^{n+1} est le groupe des jets presque holonomes inversibles d'ordre $n+1$ (cf II, §-3) et que : $L^{n+1} = L^n \cdot N^{n+1}$.

Toute N R F-variété étant une N F-variété, les espaces de repères semi-holonomes $\bar{H}^n(M, F)$ de (M, F) sont bien définis (cf §-1).

THEOREME 1

Avec les notations précédentes, le choix, pour tout $p \geq 0$, d'un supplémentaire S^p de l'image $\text{Im } \partial$ de ∂ dans $C^{p,2}$, permet d'associer à toute N R F-variété (M, F) une suite $(H^n(M, F), \theta_n)_{n \geq -1}$ possédant les propriétés suivantes :

1) $H^n(M, F)$ est un L^n -fibré principal différentiable qui s'identifie canoniquement à un L^n -sous-espace fibré principal de l'espace $\bar{H}^n(M, F)$ des repères semi-holonomes de (M, F) .

2) L'espace $H^n(M, F)$ se projette canoniquement sur $H^{n-1}(M, F)$ et cette projection est compatible avec la projection de $\bar{H}^n(M, F)$ sur $\bar{H}^{n-1}(M, F)$. On note F_n la filtration $TH^n = F_n^{-k} \supset \dots \supset F_n^{-1} \supset \dots \supset F_n^0$ de $H^n(M, F)$ obtenue par relèvements successifs de la filtration F de (M, F) aux repères $H^p(M, F)$ ($p < n$). Cette filtration est donc une sous-filtration de la filtration obtenue par restriction à $H^n(M, F)$ de la filtration $\bar{F}^n$ de $\bar{H}^n(M, F)$ (définie au §-1).

3) θ_n est la restriction à $\bar{T}^1 H_n = F_n^{-k-n-1} / F_n^{-k+1} \oplus \dots \oplus F_n^{-2} / F_n^0 \oplus F_n^{-1}$ de la forme fondamentale de $\bar{H}^n(M, F)$. Cette forme θ_n est à valeurs dans $\bar{T}^1 E_n \subset \bar{T}^1 \bar{E}_n$. Elle a, pour les espaces holonomes les mêmes propriétés que son extension pour les espaces semi-holonomes (cf §-1).

4) Les constructions précédentes sont fonctorielles.

PREUVE

Comme pour le cas semi-holonyme, c'est la construction précise des

premiers termes de la suite que nous effectuons. La construction des termes suivants est analogue. Noter cependant que ce n'est qu'après l'ordre 1 qu'apparaît l'un des aspects essentiels de la construction : la projection fondamentale.

On pose : $H^{-1}(M, F) = M$, et $\theta_{-1} = 0$.

Etant donné $x_{-1} \in M$, on note $\Delta_{x_{-1}}(H^{-1})$ le diagramme holonome suivant :

$$(F^{-k}/F^{-k+1})_{x_{-1}} \dots (F^{-2}/F^{-1})_{x_{-1}} (F^{-1})_{x_{-1}}$$

Il est clair que $\Delta(H^{-1}) = \bigcup_{x_{-1} \in M} \Delta_{x_{-1}}(H^{-1})$ est un fibré différentiable de base M , de fibre type E_{-1}^{-1} et de groupe L^0 . On définit $\bar{T}_{x_{-1}}^1(H^{-1})$ par :

$$\bar{T}_{x_{-1}}^1(H^{-1}) = (F^{-k}/F^{-k+1})_{x_{-1}} \oplus \dots \oplus (F^{-2}/F^{-1})_{x_{-1}} \oplus (F^{-1})_{x_{-1}}$$

Le crochet dans $\bar{T}_{x_{-1}}^1(H^{-1})$ (cf I, §-2) est noté $[[,]]$.

Par définition, l'espace $H^0(M, F)$ est le fibré principal associé à $\Delta(H^{-1})$.

REMARQUE 2

Déjà à l'ordre 0, contrairement à ce qui se passe dans le cas ordinaire, l'espace $H^0(M, F)$ ne coïncide pas avec l'espace $\bar{H}^0(M, F)$ des repères semi-holonomes de (M, F) .

On complète le diagramme $\Delta_{x_{-1}}(H^{-1})$ pour obtenir le diagramme holonome $\Delta_{x_{-1}}^\infty(H^{-1})$, de type $(-1, \infty)$. Les termes d'indices positifs de ce dernier diagramme sont notés $f_{x_{-1}}^0$, $f_{x_{-1}}^1$, etc... Un élément u de $f_{x_{-1}}^r$ est donc une application de degré r de $\bar{T}_{x_{-1}}^1(H^{-1})$ dans $\bar{T}_{x_{-1}}^1(H^{-1}) \oplus f_{x_{-1}}^0 \oplus \dots \oplus f_{x_{-1}}^{r-1}$ vérifiant : $u[[X^{-p}, Y^{-q}]] = [[u(X^{-p}), Y^{-q}]] + [[X^{-p}, u(Y^{-q})]]$.

Tout $x_o \in H^0(M, F)$, d'origine $x_1 \in M$, étant un isomorphisme d'algèbres de Lie graduées de e sur $\bar{T}_{x_1}^{-1}(H^{-1})$, il induit un isomorphisme, qu'on note encore x_o , du diagramme E_{-1}^{∞} (dédit de E) sur $\Delta_{x_{-1}}^{\infty}(H^{-1})$.

CONSTRUCTION DE $\Delta(H^0)$, PROPRIETES

Soit π la projection $H^0 \rightarrow M$

Soit F_o le relèvement de la filtration F par π . On a donc :
 $F_o^1 = \{0\}$; $F_o^0 = V H^0$ fibré des vecteurs verticaux ; $F_o^i = (\pi_*)^{-1}(F^i)$ pour $i \leq -1$. Comme pour les $N F$ -variétés, étant donné $x_o \in H^0$, d'origine $x_{-1} \in M$, $\Delta_{x_o}(H^0)$ est le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccccc}
 (F_o^{-k-1}/F_o^{-k+1})_{x_o} & & (F_o^{-k}/F_o^{-k+2})_{x_o} & & \dots & & (F_o^{-2}/F_o^0)_{x_o} & & (F_o^{-1})_{x_o} \\
 & \swarrow & \downarrow & \nwarrow & & & \downarrow & \swarrow & \downarrow \\
 & & (F_o^{-k}/F_o^{-k+1})_{x_{-1}} & & & & (F_o^{-2}/F_o^{-1})_{x_{-1}} & & F_o^{-1} & f_o
 \end{array}$$

où les flèches sont construites comme dans le cas semi-holonyme (cf §-1).

On a le résultat suivant :

LEMME 3

Pour tout $x_o \in H^0(M, F)$, il existe, dans $\bar{T}_{x_o}^{-1}(H^0) = (F_o^{-k-1}/F_o^{-k+1})_{x_{-1}} \oplus \dots \oplus (F_o^{-2}/F_o^0)_{x_o} \oplus (F_o^{-1})_{x_o}$, un pseudo-crochet $[[,]]$ c'est à dire une application bilinéaire alternée possédant les propriétés suivantes :

1) Si $A^{-p} \in (F_o^{-p}/F_o^{-p+2})_{x_o}$ et $B^{-q} \in (F_o^{-q}/F_o^{-q+2})_{x_o}$, alors
 $[[A^{-p}, B^{-q}]] \in (F_o^{-p-q}/F_o^{-p-q+2})_{x_o}$

et :

$$\pi_o^{-p-q}([[A^{-p}, B^{-q}]]) = [[\pi_o^{-p}(A^{-p}), \pi_o^{-q}(B^{-q})]]$$

(avec $\pi_o^i : (F_o^i / F_o^{i+2})_{x_o} \rightarrow (F_o^i / F_o^{i+1})_{x_{-1}}$).

2) Si $a^{-p} \in (F_o^{-p} / F_o^{-p+1})_{x_{-1}}$ et $B^{-q} \in (F_o^{-q} / F_o^{-q+2})_{x_o}$:

$$\varphi_{-1}^{-p-q}([a^{-p}, \pi_o^{-q}(B^{-q})]) = [[\varphi_{-1}^{-p}(a^{-p}), B^{-q}]]$$

(avec $\varphi_{-1}^{-i} : (F_o^i / F_o^{i+1})_{x_{-1}} \rightarrow (F_o^{i-1} / F_o^{i+1})_{x_o}$).

3) Le pseudo-crochet est invariant par les translations à droite de H^0 .

PREUVE

L'espace $H^0(M, F)$ étant un sous-fibré principal de $\bar{H}^0(M, F)$, la forme fondamentale θ_o dans $\bar{H}^0(M, F)$ induit, dans $H^0(M, F)$, une forme, encore notée θ_o . Cette forme θ_o est donc définie dans $\bar{T}^1 H^0 = F_o^{-k-1} / F_o^{-k+1} \oplus \dots \oplus F_o^{-1}$ et prend ses valeurs dans $e = e^{-k} \oplus \dots \oplus e^{-1}$, et elle est de degré 0 (rappelons que $e^{-k-1} = 0$). On note θ_o^{-p} la restriction de θ_o à F_o^{-p} / F_o^{-p+2} , ainsi que sa composée avec la projection $F_o^{-p} \rightarrow F_o^{-p} / F_o^{-p+2}$. Ceci étant, pour définir $[[A^{-p}, B^{-q}]]$, avec $A^{-p} \in (F_o^{-p} / F_o^{-p+2})_{x_o}$ et $B^{-q} \in (F_o^{-q} / F_o^{-q+2})_{x_o}$, on procède comme suit :

- On choisit dans $(F_o^{-p})_{x_o}$ un représentant $x_{x_o}^{-p}$ de A^{-p} et dans $(F_o^{-q})_{x_o}$ un représentant $y_{x_o}^{-q}$ de B^{-q} .

- On prolonge $x_{x_o}^{-p}$ et $y_{x_o}^{-q}$ en des champs de vecteurs x^{-p} et y^{-q} , à valeurs dans F_o^{-p} et F_o^{-q} respectivement et tels que : $\theta_o^{-p}(x^{-p}) = c^{te}$, $\theta_o^{-q}(y^{-q}) = c^{te}$.

On vérifie alors que la classe $\overline{[x^{-p}, y^{-q}]}_{x_o}$ de $[x^{-p}, y^{-q}]_{x_o}$ dans $(F_o^{-p-q} / F_o^{-p-q+2})_{x_o}$ ne dépend que de A^{-p} et B^{-q} . On pose : $[[A^{-p}, B^{-q}]] =$

$\overline{[x^{-p}, y^{-q}]_{x_0}}$. On définit ainsi le pseudo-crochet ayant les propriétés annoncées.

REMARQUE 4

Le diagramme $\Delta_{x_0}(H^0)$ n'est pas holonome, car le pseudo-crochet précédent n'est pas un crochet de Lie.

On pose : $\Delta(H^0) = \bigcup_{x_0 \in H^0} \Delta_{x_0}(H^0)$ et on note Π la projection $\Delta(H^0) \rightarrow H^0$.

Comme dans le cas semi-holonome (cf §-1), on définit la notion de connexion (généralisée) dans un ouvert $U^0 = \pi^{-1}(U)$ de H^0 , U ouvert de M , puis on associe, à toute connexion généralisée C^0 , une carte $\Phi_{C^0} : U^0 \times E_0^0 \rightarrow \Pi^{-1}(U^0)$. On munit ainsi ΔH^0 d'une structure fibrée de base H^0 , de fibre type E_0^0 , de groupe structural N^1 .

CONSTRUCTION DE $\overset{V1}{H^1}(M, F)$

L'espace $\overset{V1}{H^1}(M, F)$ est le fibré principal (de base H^0 et de groupe N^1) associé à $\Delta(H^0)$.

Un élément $x_1 \in \overset{V1}{H^1}(M, F)$, d'origine $x_0 \in H^0$ est donc un isomorphisme de E_0^0 sur $\Delta_{x_0}(H^0)$ dont la restriction à E_{-1}^{-1} est x_0 . Noter qu'on n'impose pas de compatibilité avec le pseudo-crochet (tout simplement parce que ce n'est pas possible!).

On munit $\overset{V1}{H^1}(M, F)$ d'une structure fibrée principale de base M et de groupe $\overset{V1}{L^1}$ en définissant l'action de $\overset{V1}{L^1} = \overset{V1}{N^1} \cdot L^0$ dans $\overset{V1}{H^1}(M, F)$ par :

$$x_1 \cdot u_1 = \Delta_{x_0} R_{x_0}^{u_1} \circ x_1 \circ u_1$$

$$(x_1 \in \overset{V1}{H^1}, u_1 \in \overset{V1}{L^1}, u_1 = n_1 \cdot x_0).$$

DEFINITION DE $\Delta_{x_1}^\infty(H^0)$, POUR $x_1 \in \mathbb{H}^1(M, F)$

Soit $\bar{E}_0^\infty$ (resp $\bar{\Delta}_{x_0}^\infty(H^0)$) le prolongement semi-holonome de E_0^0 (resp $\Delta_{x_0}(H^0)$). Tout $x_1 \in \mathbb{H}^1(M, F)$, d'origine $x_0 \in H^0(M, F)$, se prolonge canoniquement en un isomorphisme de $\bar{E}_0^\infty$ sur $\bar{\Delta}_{x_0}^\infty(H^0)$. Par définition, $\Delta_{x_1}^\infty(H^0)$ est l'image de E_0^∞ dans $\bar{\Delta}_{x_0}^\infty(H^0)$ par cet isomorphisme. Le diagramme $\Delta_{x_1}^\infty(H^0)$ est donc le suivant :

$$\begin{array}{ccccccc}
 (F_0^{-k-1}/F_0^{-k+1})_{x_1} & \dots\dots\dots & (F_0^{-1})_{x_0} & (f_0^0)_{x_1} & (f_0^1)_{x_1} & \dots\dots \\
 & \nearrow \varphi_{-1}^{-k} & \nearrow \varphi_{-1}^{-1} & \downarrow \varphi_{-1}^0 & \downarrow \varphi_{-1}^1 & \downarrow \\
 & & (F^{-k}/F^{-k+1})_{x_{-1}} & \dots\dots\dots & (F^{-1})_{x_{-1}} & f_{x_{-1}}^0 & f_{x_{-1}}^1 & \dots\dots
 \end{array}$$

où $(f_0^i)_{x_1}$ est l'image par x_1 du terme d'indice $(i, 0)$ dans E_∞^0 .

COURBURE

Soit $x_1 \in \mathbb{H}^1(M, F)$, d'origine $x_0 \in H^0(M, F)$. Il correspond à x_1 un élément de connexion (généralisée) dans $\Delta_{x_0}(H^0)$ (et réciproquement), c'est à dire une section de la projection canonique de $\bar{T}_{x_0}^{-1} H^0 = (F_0^{-k-1}/F_0^{-k+1})_{x_0} \oplus \dots \oplus (F_0^{-1})_{x_0}$ sur $\bar{T}_{x_{-1}}^{-1} H^1 = (F^{-k}/F^{-k+1})_{x_{-1}} \oplus \dots \oplus (F^{-1})_{x_{-1}}$, (x_{-1} = origine de x_0). On notera $\tilde{x}_1$ la section ainsi associée à x_1 .

DEFINITION 5

La courbure de x_1 est la 2-cochaine $\Omega_{x_1} \in C^{0,2}$ définie par :

$$\Omega_{x_1}(a^{-p}, b^{-q}) = (x_0)^{-1} \circ (\varphi_{-1}^{-p-q+1})^{-1} ([[\tilde{x}_1 x_0(a^{-p}), \tilde{x}_1 x_0(b^{-q})]] - \tilde{x}_1([x_0(a^{-p}), x_0(b^{-q})]))$$

(avec $-p \leq -1$, $-q \leq -1$, $a^{-p} \in e^{-p}$, $b^{-q} \in e^{-q}$).

Remarquer que : $[[\tilde{x}_1 x_0(a^{-p}), \tilde{x}_1 x_0(b^{-q})]] - \tilde{x}_1([x_0(a^{-p}), x_0(b^{-q})])$ appartient au noyau de la projection : $(F_0^{-p-q}/F_0^{-p-q+2})_{x_0} \rightarrow (F_0^{-p-1}/F_0^{-p-q+1})_{x_{-1}}$ c'est à dire à $\text{Im } \varphi_{-1}^{-p-q+1}$, ce qui justifie la définition.

On démontre aisément le résultat suivant :

LEMME 6

La courbure Ω est une application différentiable de $\check{H}^1(M, F)$ dans $C^{0,2}$ vérifiant :

$$1) \Omega_{x_1 \cdot u_1} = (u_1)^{-1} (\Omega_{x_1}) \quad \text{pour } u_1 \in \check{L}^1, x_1 \in \check{H}^1(M, F)$$

2) Pour tout automorphisme f de (M, F) :

$$\Omega_{\check{H}^1(f)(x_1)} = \Omega_{x_1} \quad \forall x_1 \in \check{H}^1$$

($\check{H}^1(f)$ = relèvement de f à $\check{H}^1(M, F)$).

Le pseudogroupe des automorphismes d'une $N R F$ -variété étant transitif, par définition, la fonction Ω est à valeurs dans une orbite de $\check{L}_1$ dans $C^{0,2}$, et Ω est de rang constant.

Par définition même de l'action de $\check{L}^1$ dans $C^{0,2}$, (cf II, §-3), on déduit du lemme précédent que, si $u_1 \in \check{N}^1$ et $x_1 \in \check{H}^1$:

$$\Omega_{x_1 \cdot u_1} = \Omega_{x_1} + \partial u_1$$

(où $\partial u_1 \in C^{0,2}$ est défini par :

$$\partial u_1(a^{-p}, b^{-q}) = u_1([a^{-p}, b^{-q}]) - [u_1(a^{-p}), b^{-q}] - [a^{-p}, u_1(b^{-q})]$$

Donc, le supplémentaire S^0 de $\text{Im } \partial$ dans $C^{0,2}$ étant donné, le sous-espace $\Omega^{-1}(S^0)$ de $\overset{V}{H}^1(M, F)$ est stable par l'action du sous-groupe L^1 de $\overset{V}{L}^1$ (caractérisé par $\partial u_1 = 0$).

Par définition : $H^1(M, F) = \Omega^{-1}(S^0)$

Il est clair que $H^1(M, F)$ est un L^1 sous-espace fibré principal de $\overset{V}{H}^1(M, F)$. En outre, ce dernier espace est canoniquement plongé dans $\bar{H}^1(M, F)$. On a donc, entre les différents espaces les relations suivantes où les flèches horizontales sont des injections et les autres flèches des projections.

$$\begin{array}{ccccc}
 H^1 & \longrightarrow & \overset{V}{H}^1 & \longrightarrow & \bar{H}^1 \\
 & \searrow & \downarrow & & \downarrow \\
 & & H^0 & \longrightarrow & \bar{H}^0 \\
 & & & \searrow & \downarrow \\
 & & & & M
 \end{array}$$

REMARQUE 7

Si l'on n'impose pas, pour les N R F-variétés, la transitivité du pseudogroupe des automorphismes (cf I, §-1, Rem. 2) on est ici conduit à l'introduction d'hypothèses telles que $\Omega^{-1}(S^0)$ soit une sous-variété de $\overset{V}{H}^1(M, F)$. L'étude des orbites de $\overset{V}{L}^1$ dans $C^{0,2}$ devient alors très utile [11].

CONSTRUCTION DE ΔH^1 , PROPRIETES

Soit π' (resp π'') la projection $H^1 \rightarrow H^0$ (resp $H^1 \rightarrow M$) et soit F_1 le relèvement, par π' , de la filtration F_0 . (Donc : $F_1^2 = 0$, F_1^1 est l'espace tangent vertical pour π' , F_1^0 l'espace tangent vertical pour π'' et $F_1^i = (\pi'_*)^{-1}(F_0^i)$, pour $i \leq -1$).

Etant donné $x_1 \in H^1$, avec $x_0 = \pi'(x_1)$ et $x_{-1} = \pi''(x_1)$, $\Delta_{x_1}(H^1)$ est, par définition, le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccccc}
 (F_1^{-k-2}/F_1^{-k+1})_{x_1} & \dots\dots\dots & (F_1^{-1})_{x_1} & & & & \\
 \nearrow \varphi_0^{-k-1} & & \downarrow & \nearrow \varphi_0^0 & & & \\
 (F_0^{-k-1}/F_0^{-k+1})_{x_0} & \dots\dots\dots & (F_0^{-1})_{x_0} & & (f_0^0)_{x_1} & & \\
 \nearrow \varphi_{-1}^{-k} & & \downarrow & \nearrow \varphi_{-1}^0 & \nearrow \varphi_{-1}^1 & & \\
 & & (F^{-k}/F^{-k+1})_{x_{-1}} & \dots\dots & (F^{-1})_{x_{-1}} & f_{x_{-1}}^0 & f_{x_{-1}}^1
 \end{array}$$

où les deux lignes inférieures sont déduites du diagramme $\Delta_{x_1}(H^0)$, défini précédemment. Les flèches dont la source (ou le but) est la ligne supérieure sont déduites de la projection π' (comme dans le cas semi-holonome), hormis la flèche $(f_0^0)_{x_1} \rightarrow (F_1^{-1})_{x_1}$ qui, elle, est définie par la structure de L^1 -fibré principal de $H^1(M, F)$. Cette flèche identifie en effet $(f_0^0)_{x_1}$, isomorphe par x_1 à l'algèbre de Lie de L^1 , à l'espace vertical $(F_1^0)_{x_1} \subset (F_1^{-1})_{x_1}$.

On a le résultat suivant, pour tout $x_1 \in H^1(M, F)$:

LEMME 8

Il existe dans $\bar{T}_{x_1}^1 H^1 = (F_1^{-k-2}/F_1^{-k+1}) \oplus \dots \oplus (F_1^{-2}/F_1^1)_{x_1} \oplus (F_1^{-1})_{x_1}$ un pseudo-crochet $[[,]]$ (application bilinéaire alternée), possédant les propriétés :

1) Si $A^{-p} \in (F_1^{-p}/F_1^{-p+3})_{x_1}$ et $B^{-q} \in (F_1^{-q}/F_1^{-q+3})_{x_1}$, alors

$$[[A^{-p}, B^{-q}]] \in (F_1^{-p-q}/F_1^{-p-q+3})_{x_1} \quad \text{et}$$

$$\pi_1^{-p-q}([A^{-p}, B^{-q}]) = [[\pi_1^{-p}(A^{-p}), \pi_1^{-q}(B^{-q})]]$$

(avec $\pi_1^i : (F_1^i/F_1^{i+3}) \rightarrow F_0^i/F_0^{i+2}$)

2) Si $a^{-p} \in (F_0^{-p}/F_0^{-p+2})_{x_0}$ et $B^{-q} \in (F_1^{-q}/F_1^{-q+3})_{x_1}$:

$$\varphi_0^{-p-q}([a^{-p}, \pi_1^{-q}(B^{-q})]) = [[\varphi_0^{-p}(a^{-p}), B^{-q}]]$$

(avec $\varphi_0^i : (F_0^i/F_0^{i+2})_{x_0} \rightarrow (F_1^{i-1}/F_1^{i+2})_{x_1}$)

3) Le pseudo-crochet est invariant par les translations à droite de H^1 .

PREUVE

Soit θ_1 la restriction à $H^1(M, F)$ de la forme fondamentale de $\bar{H}^1(M, F)$. Cette forme θ_1 , définie dans $\bar{T}_1^1 H^1 = (F_1^{-k-1}/F_1^{-k+1}) \oplus \dots \oplus F_1^{-1}$, prend ses valeurs dans $(e^{-k-2} \oplus e^{-k-1}) \oplus (e^{-k-1} \oplus e^{-k}) \oplus \dots \oplus (e^{-2} \oplus e^{-1}) \oplus (e^{-1} \oplus e^0)$ (noter que $e^{-k-i} = 0$ et donc : $e^{-k-2} \oplus e^{-k-1} = 0$, $e^{-k-1} \oplus e^{-k} = e^{-k}$). De plus, θ_1 est de degré 0 (en convenant que $(e^{-i} \oplus e^{-i+1})$ est de degré $-i$).

On note θ_1^{-p} la restriction de θ_1 à F_1^{-p}/F_1^{-p+3} et, plus généralement, la composée de la projection $F_1^{-p} \rightarrow F_1^{-p}/F_1^{-p+3}$ et de θ_1^{-p} . Ceci étant, pour définir $[[A^{-p}, B^{-q}]]$, avec $A^{-p} \in (F_1^{-p}/F_1^{-p+3})_{x_1}$ et $B^{-q} \in (F_1^{-q}/F_1^{-q+3})_{x_1}$, on procède comme suit :

- On choisit dans $(F_1^{-P})_1$ (resp $(F_1^{-Q})_{x_1}$) un représentant $x_{x_1}^{-P}$ (resp $y_{x_1}^{-Q}$) de A^{-P} (resp B^{-Q}).

- On prolonge ces vecteurs $x_{x_1}^{-P}$ et $y_{x_1}^{-Q}$ en des champs différentiables x^{-P} et y^{-Q} , à valeurs dans F_1^{-P} et F_1^{-Q} respectivement et tels que $\theta_1^{-P}(x^{-P}) = C^{te}$ $\theta_1^{-Q}(y^{-Q}) = C^{te}$. On vérifie alors que la classe $[x^{-P}, y^{-Q}]_{x_1}$ de $[x^{-P}, y^{-Q}]_{x_1}$ dans $(F_1^{-P-Q}/F_1^{-P-Q+3})_{x_1}$ ne dépend que de A^{-P} et B^{-Q} . En posant : $[[A^{-P}, B^{-Q}]] = [x^{-P}, y^{-Q}]_{x_0}$. On définit le pseudo-crochet annoncé, et ce pseudo-crochet vérifie les conditions 1), 2) et 3).

On pose $\Delta(H^1) = \bigcup_{x_1 \in H^1} \Delta_{x_1} H^1$, et on note Π la projection $\Delta(H^1) \rightarrow H^1$.

Un élément de connexion en $x_1 \in H^1(M, F)$ est défini par la donnée d'une section C_{x_1} de la projection $\bar{T}_{x_1}^1 H^1 \rightarrow \bar{T}_{x_{-1}}^1 H^{-1}$, vérifiant la condition suivante : la composée de C_{x_1} et de la projection $\bar{T}_{x_1}^1 H^1 \rightarrow \bar{T}_{x_0}^1 H^0$ (qui est un élément de connexion en $x_0 \in H^0$) est l'élément de connexion défini par x_1 (x_0 et x_{-1} sont évidemment les projections de x_1).

On définit, comme dans le cas semi-holonome, la notion de connexion (généralisée) dans un ouvert $U^1 = (\pi)^{-1}(U)$ de H^1 (U ouvert de M) et à toute connexion généralisée C^1 on associe une carte $\Phi_{C^1} : U^1 \times E_1^1 \rightarrow \Pi^{-1}(U^1)$. Ceci munit ΔH^1 d'une structure fibrée de base H^1 , de fibre type E_1^1 et de groupe structural N^2 .

CONSTRUCTION DE $H^2(M, F)$

Par définition, $H^2(M, F)$ est le fibré principal associé à ΔH^1 , il admet donc H^1 pour base et N^2 comme groupe structural.

On définit une action de L^2 dans $H^2(M, F)$ par :

$$x_2 \cdot u_2 = \Delta_{x_1}^{u_1} R^1 \circ x_2 \circ u_2$$

où : $x_2 \in \check{H}^2(M, F)$, $u_2 \in \check{L}^2 = L^1 \cdot \check{N}^2$, u_1 est la projection de u_2 dans L^1 ,

$\Delta_{x_1}^{u_1} R^1$ est l'application induite dans ΔH^1 par la translation à droite R^{u_1} dans H^1 .

On définit ainsi $\check{H}^2(M, F)$ comme fibré principal de base M et de groupe structural $\check{L}^2$ (l'action précédente de $\check{N}^2$ étant obtenue par restriction).

Comme pour l'ordre 1 ; on définit $\Delta_{x_2}^\infty H^1$, pour $x_2 \in \check{H}^2(M, F)$, comme l'image de E_1^∞ ($\subset \bar{E}_1^\infty$) par l'isomorphisme (de diagrammes semi-holonomes) $\bar{E}_1^\infty \rightarrow \bar{\Delta}_{x_1}^\infty (H^1)$ déduit de x_2 .

PROJECTION FONDAMENTALE - COURBURE

La projection fondamentale Π est la projection de $\ker(\bar{T}^1 H^1 \rightarrow \bar{T}^1 H^{-1})$ sur $\ker(\bar{T}^1 H^1 \rightarrow \bar{T}^1 H^0)$ ainsi définie :

Etant donné $x_1 \in H^1$, $\ker(\bar{T}_{x_1}^1 H^1 \rightarrow \bar{T}_{x_1}^1 H^{-1})$ est canoniquement isomorphe, par les flèches obliques φ_o du diagramme $\Delta_{x_1} H^1$ (cf page 60) à $\bar{T}_{x_o}^1 H^0 \oplus (f_o^0)_{x_1}$.

Par définition même, x_1 définit un élément de connexion $\tilde{x}_1$ en x_o .

On a donc une décomposition canonique :

$$\bar{T}_{x_o}^1 H^0 \oplus (f_o^0)_{x_1} = (\text{Im } \varphi_{-1}) \oplus (\text{Im } \tilde{x}_1)$$

(Remarque : à priori, $\tilde{x}_1$ est définie dans $\bar{T}_{x_{-1}}^1 H^{-1}$, mais elle se prolonge en une section de $f_{x_{-1}}^0$ dans $(f_o^0)_{x_1}$). On a donc :

$$\begin{aligned} \text{Ker}(\bar{T}_{x_1}^1 H^1 \rightarrow \bar{T}_{x_{-1}}^1 H^{-1}) &= (\text{Im } \varphi_o \circ \varphi_{-1}) \oplus \varphi_o(\text{Im } \tilde{x}_1) \\ &= \text{Ker}(\bar{T}_{x_1}^1 H^1 \rightarrow \bar{T}_{x_o}^1 H^0) \oplus \varphi_o(\text{Im } \tilde{x}_1) \end{aligned}$$

La projection Π est la projection sur le premier facteur pour cette décomposition.

Ceci étant, soit $x_2 \in \check{H}^2(M, F)$, x_1 , x_0 et x_{-1} ses projections dans H^1 , H^0 , H^{-1} respectivement. Soit $\tilde{x}_2$ la section de $\bar{T}_{x_1}^1 H^1 \rightarrow \bar{T}_{x_{-1}}^1 H^{-1}$ associée à x_2 ($\tilde{x}_2$ est donc l'élément de connexion défini par x_2).

DEFINITION 9

La courbure de $x_2 \in \check{H}^2(M, F)$ est la 2-cochaîne $\Omega_{x_2} \in C^{1,2}$ définie par :

$$\Omega_{x_2}(a^{-p}, b^{-q}) = (x_0)^{-1} \circ (\varphi_{-1}^{-p-q+2})^{-1} \circ \Pi([[\tilde{x}_2 x_0(a^{-p}), \tilde{x}_2 x_0(b^{-q})]] - \tilde{x}_2([x_0(a^{-p}), x_0(b^{-q})]))$$

où Π est la projection fondamentale, $-p \leq -1$, $-q \leq -1$, $a^{-p} \in e^{-p}$, $b^{-q} \in e^{-q}$.

Pour justifier cette définition, on doit vérifier que :

$$[[\tilde{x}_2 x_0(a^{-p}), \tilde{x}_2 x_0(b^{-q})]] - \tilde{x}_2([x_0(a^{-p}), x_0(b^{-q})])$$

appartient à $\text{Ker}(\bar{T}_{x_1}^1 H^1 \rightarrow \bar{T}_{x_{-1}}^1 H^{-1})$, ce qui est évident car le pseudo-crochet est compatible avec les projections.

Comme à l'ordre 1, on démontre le résultat suivant :

LEMME 10

La pseudo-courbure Ω est une application différentiable de $\check{H}^2(M, F)$ dans $C^{1,2}$ vérifiant :

$$1) \Omega_{x_2 \cdot u_2} = u_2^{-1}(\Omega_{x_2})$$

2) Pour tout automorphisme f de (M, F) :

$$\Omega_{\check{H}^2(f)(x_2)} = \Omega_{x_2}$$

$\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{H}^2(f) = \text{relèvement de } f \text{ à } \mathbb{H}^2(M, F) \end{array} \right\}.$

On en déduit donc (comme à l'ordre 1) que, si $u_2 \in \mathbb{N}^2$:

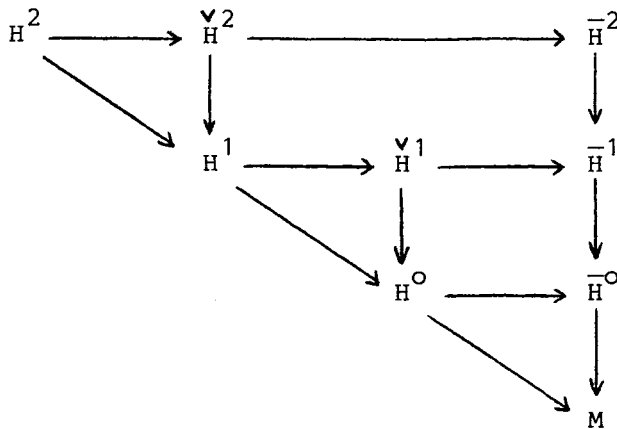
$$\Omega_{x_2} \cdot u_2 = \Omega_{x_2} + \partial u_2$$

et donc que l'image réciproque $\Omega^{-1}(S^1)$ du supplémentaire S^1 de $\text{Im } \partial$ dans $C^{1,2}$ est stable par l'action du sous-groupe L^2 de $\mathbb{L}^2$ (caractérisé par :

$$\partial u_2 = 0).$$

PAR DEFINITION : $H^2(M, F) = \Omega^{-1}(S^1)$.

Entre les espaces déjà définis, on a donc les relations suivantes :



Le processus de construction des espaces $H^n(M, F)$ est, nous l'espérons, désormais clair. Ainsi, pour passer de $H^2(M, F)$ à $H^3(M, F)$, on procède comme suit :

1) On construit le fibré ΔH^2 , de base H^2 , de fibre type E_2^2 et de groupe structural $\mathbb{N}^3$.

2) Le fibré principal associé à ΔH^2 est noté $\mathbb{H}^3(M, F)$. Ce fibré, de base H^2 et de groupe structural $\mathbb{N}^3$, est ensuite muni d'une structure fi-

brée principale de base M et de groupe structural $\mathbb{L}^3$ par :

$$x_3 \cdot u_3 = \Delta_{x_2}^{u_2} \circ x_3 \circ u_3$$

Cette structure prolonge la structure précédente (au sens où l'action de $\mathbb{N}^3$ dans $\mathbb{H}^3(M, F)$ est la même dans les deux cas).

3) On définit le pseudo-crochet dans $\bar{T}_{x_2}^{-1} H^2 = (F_2^{-k-3}/F_2^{-k+1})_{x_2} \oplus \dots \oplus (F_2^{-1})_{x_2}$ comme dans les cas précédents, à l'aide de la restriction à $\bar{T}^{-1} H^2$ de la forme fondamentale θ_2 de $\bar{H}^2$. Plus précisément : $[[A^{-p}, B^{-q}]] = [\overline{X^{-p}}, \overline{Y^{-q}}]_{x_2}$ où X^{-p} et Y^{-q} sont des champs de vecteurs dans F_2^{-p} et F_2^{-q} respectivement, tels que : $\theta_2^{-p}(X^{-p}) = c^{te}$, $\theta_2^{-q}(Y^{-q}) = c^{te}$ et $A^{-p} = \bar{X}_{x_2}^{-p}$, $B^{-q} = \bar{Y}_{x_2}^{-q}$. Ce pseudo-crochet est compatible avec les projections π et les injections φ .

4) La projection fondamentale Π est définie de la manière suivante, par la suite d'égalités :

$$\begin{aligned} \text{Ker}(\bar{T}_{x_2}^{-1} H^2 \rightarrow \bar{T}_{x_{-1}}^{-1} H^{-1}) &= \varphi_1[\bar{T}_{x_1}^{-1} H^1 \oplus (f_1^0)_{x_2}] \\ &= \varphi_1[\text{Ker}(\bar{T}_{x_1}^{-1} H^1 \rightarrow \bar{T}_{x_{-1}}^{-1} H^{-1}) \oplus \varphi_0(f_0^1)_{x_1} \oplus \text{Im } \tilde{x}_2] \\ &= \varphi_1[(\text{Im } \varphi_0 \circ \varphi_{-1}) \oplus \varphi_0(\text{Im } x_1) \oplus \varphi_0((f_0^1)_{x_1}) \oplus \text{Im } \tilde{x}_2] \\ &= (\text{Im } \varphi_1 \circ \varphi_0 \circ \varphi_{-1}) \oplus \varphi_1 \varphi_0(\text{Im } \tilde{x}_1 \oplus (f_0^1)_{x_1}) \oplus \varphi_1(\text{Im } \tilde{x}_2). \end{aligned}$$

La projection sur le premier facteur fournit la projection fondamentale Π .

5) On définit la courbure d'un élément $x_3 \in \mathbb{H}^3(M, F)$ comme la 2-cochaine $\Omega_{x_3} \in C^{2,2}$ définie par :

$$\begin{aligned} \Omega_{x_3}(a^{-p}, b^{-q}) &= (x_0)^{-1} \circ (\varphi_{-1}^{-p-q+3})^{-1} \circ \Pi([[\tilde{x}_3 x_0(a^{-p}), \tilde{x}_3 x_0(b^{-q})]] \\ &\quad - \tilde{x}_3([x_0(a^{-p}), x_0(b^{-q})])) \end{aligned}$$

(où $\tilde{x}_3$ est la section de $\bar{T}_{x_2}^{-1} H^2 \rightarrow \bar{T}_{x_{-1}}^{-1} H^{-1}$ associée à x_3).

6) L'espace $H^3(M, F)$ est alors défini par :

$$H^3(M, F) = \Omega^{-1}(S^2)$$

où S^2 est le supplémentaire de $\text{Im } \partial$ dans $C^{2,2}$. La structure fibrée principale, de base M et de groupe L^3 , est définie sur $H^3(M, F)$, par restriction à L^3 de l'action du groupe $\check{L}^3$ dans $\check{H}^3(M, F)$.

La vérification du caractère fonctoriel des constructions précédentes est claire. On notera que la construction des pseudo-crochets est fonctorielle.

La forme fondamentale θ_n sur $H^n(M, F)$ peut être définie directement : pour tout $x_n \in H^n(M, F)$, en restriction à $\bar{T}_{x_n}^{-1} H^n$:

$$\theta_n|_{\bar{T}_{x_n}^{-1} H^n} = (x_n)^{-1} \circ \bar{T}_{x_n}^{-1} \Pi_{n-1}^n$$

Elle est donc, évidemment, à valeurs dans $\bar{T}^{-1} E_n$, et c'est la restriction à $\bar{T}^{-1} H^n$ de la forme fondamentale de $\bar{T}^{-1} \bar{H}^n$. Les deux propriétés essentielles de θ_n s'en déduisent, comme dans le cas semi-holonome (§-1, page 47), à savoir :

1) Si $f : (M, F) \rightarrow (M', F')$ est un isomorphisme (local) de NRF-variétés, alors :

$$(\bar{T}^{-1} H^n(f))^*(\theta'_n) = \theta_n$$

où θ'_n est la forme fondamentale de $H^n(M', F')$ et $H^n(f)$ le relèvement de f à $H^n(M, F)$.

2) Si $\varphi : H^n(M, F) \rightarrow H^n(M', F')$ est un difféomorphisme compatible avec les filtrations et tel que $(\bar{T}^{-1} \varphi)^*(\theta'_n) = \theta_n$ alors, localement, φ est le relèvement à $H^n(M, F)$ d'un isomorphisme (local) $f : (M, F) \rightarrow (M', F')$.

CHAPITRE IV

PROLONGEMENT DES NRF-G-STRUCTURES

STRUCTURES DE TYPE FINI

§-1 : PROLONGEMENT DES NRF-G-STRUCTURES

Nous montrons ci-dessous que la méthode de prolongement des NRF-variétés décrite au chapitre précédent s'adapte au cas des NRF-G-structures de type régulier, de tous ordres.

Soit $e = e^{-k} \oplus \dots \oplus e^{-1}$ une algèbre de Lie graduée, $E = \prod_{j \in \mathbb{Z}} e^j$ l'espace holonome associé et $E_1 = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} e^j$ le premier gradué correspondant (II, §-3).

DEFINITION 1

soit $a = \epsilon^0 \oplus \epsilon^1 \oplus \dots \oplus \epsilon^r$ un sous-espace vectoriel gradué de E_1 , avec, pour tout $i \leq r$, $\epsilon^i \subset e^i$. On dit que a est prolongeable s'il existe une sous-algèbre de Lie graduée B de E_1 telle que : $B \cap e^i = e^i$ pour $i \leq -1$ et $B \cap e^i = \epsilon^i$ pour $0 \leq i \leq r$.

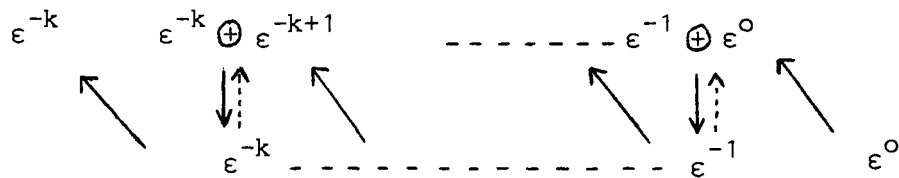
Lorsque a est prolongeable il existe une plus grande sous-algèbre

de Lie graduée, $\mathcal{a}$, vérifiant les conditions de la définition. On la construit aisément, comme au (II, §-3, Prop. 3), en imposant à ϵ^i , pour $i > r$, d'être l'espace des "dérivations graduées" de degré i de $\epsilon^{-k} \oplus \dots \oplus \epsilon^{-1}$ dans $\epsilon^{-k+i} \oplus \dots \oplus \epsilon^{-1+i}$. Lorsque $\mathcal{a} = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \epsilon^i$ est de dimension finie on dit que $\mathcal{a}$ est de type fini. L'algèbre de Lie filtrée $A = \prod_{i \in \mathbb{Z}} \epsilon^i$ obtenu par complétion de $\mathcal{a}$ est, par définition l'espace holonome associé à $\mathcal{a}$.

On note, comme précédemment, L^n (resp $\bar{L}^n$), les groupes de jets holonomes) associés à l'algèbre de Lie graduée $e = e^{-k} \oplus \dots \oplus e^{-1}$ (resp l'espace vectoriel gradué sous-jacent). Une fois choisi, dans L^0 , un sous-groupe de Lie K^0 , d'algèbre de Lie ϵ^0 , on construit, à l'aide des diagrammes holonomes A_n^n définis par l'espace holonome A , comme au chapitre II, une suite $(K^n)_{n \geq 0}$ de groupes possédant les propriétés suivantes :

- 1) K^n est un sous-groupe de Lie de L^n .
- 2) K^n se projette sur K^{n-1} , le noyau de cette projection est un groupe abélien canoniquement isomorphe à ϵ^n .
- 3) Il existe une section canonique de la projection $K^n \rightarrow K^{n-1}$ (pour tout n , K^n est donc produit semi-direct de K^{n-1} et ϵ^n , et l'algèbre de Lie de K^n a pour espace vectoriel sous-jacent $\epsilon^0 \oplus \epsilon^1 \oplus \dots \oplus \epsilon^n$).

Ainsi, A_0^0 est le diagramme suivant :



et K^1 est le groupe des automorphismes de A_0^0 dont la restriction à A_{-1}^{-1} est

un élément du groupe K^0 donné. Le diagramme A_0^0 est un sous-diagramme de E_0^0 (diagramme holonome de type (0,0) associé à l'espace holonome E). L'injection de K^1 dans L^1 est obtenue comme suit :

a) $K^0 \subset L^0$ par hypothèse

b) La restriction à $\varepsilon^{-i} \oplus \varepsilon^{-i+1}$ de l'action d'un élément u de $\text{Ker}(K^1 \rightarrow K^0)$ est définie par la matrice :

$$\begin{matrix} \varepsilon^{-i+1} & \begin{bmatrix} \mathbb{1} & a_{-i} \\ 0 & \mathbb{1} \end{bmatrix} \\ \varepsilon^{-i} & \end{matrix}$$

où a_{-i} est la matrice d'une application de ε^{-i} dans ε^{-i+1} . La somme directe $a_{-k} \oplus \dots \oplus a_{-1}$ définit un élément de ε^1 . Comme $\varepsilon^1 \subset e^1$, les mêmes matrices $\begin{bmatrix} \mathbb{1} & a_{-i} \\ 0 & \mathbb{1} \end{bmatrix}$ définissent aussi des automorphismes de $e^{-i} \oplus e^{-i+1}$ et donc un élément de $N^1 = \text{Ker}(L^1 \rightarrow L^0)$ d'où l'injection de $\text{Ker}(K^1 \rightarrow K^0)$ dans $\text{Ker}(L^1 \rightarrow L^0)$ (qui correspond à l'injection $\varepsilon^1 \subset e^1$).

On définit de même K^2 comme le groupe des automorphismes du diagramme holonome A_1^1 dont la restriction à A_0^0 appartient à K^1 et ainsi de suite.....

REMARQUE 2

Le procédé de construction précédent fournit l'expression matricielle des groupes $K^1, K^2, \dots$. Cette expression est de même nature que celle des groupes $L^1, L^2, \dots$ explicités au paragraphe suivant.

DEFINITION 3

Toute suite $K^0, K^1, \dots, K^r$ de sous-groupes de $L^0, L^1, \dots, L^r$ obtenue, comme ci-dessus, est dite adaptée à l'espace prolongeable $\alpha = \varepsilon^0 \oplus \dots \oplus \varepsilon^r$. Les groupes $K^{r+1}, K^{r+2}, \dots$ etc sont, par définition, les prolongements de K^r .

Ce sont de tels sous-groupes K^r de L^r que nous considérons désormais (en particulier, il leur correspond un espace holonome A).

DEFINITION 4

Soit (M, F) une NRF-variété de type e . Une G -structure d'ordre r est définie, sur (M, F) , par la donnée d'un sous-espace fibré principal différentiable P^r de l'espace $H^r(M, F)$ des repères de (M, F) .

Soit P^r un K^r -sous-espace fibré principal de $H^r(M, F)$. Pour $0 \leq s \leq r$, la projection P^s de P^r dans $H^s(M, F)$ est un K^s -sous-espace fibré principal de $H^s(M, F)$. On pose, pour $i \leq s$:

$$\Phi_s^i = (T P^s) \cap F_s^i$$

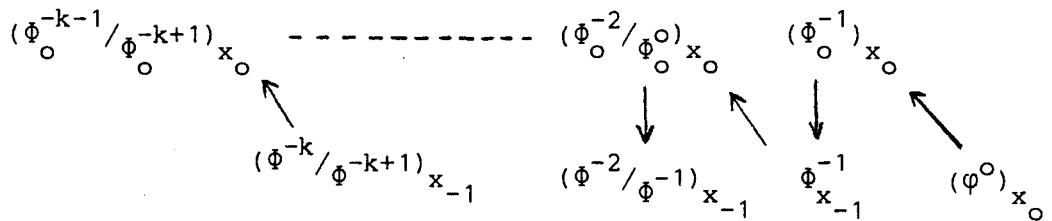
(où $T P^s$ est l'espace tangent à P^s et $(F_s^i)_{i \leq s}$ la filtration de $H^s(M, F)$ obtenue par relèvement de la filtration F). On a, pour $s \leq r$ et $j \leq -1$, une injection canonique de $\Phi_s^j / \Phi_s^{j+s+2}$ dans F_s^j / F_s^{j+s+2} qui permet d'identifier $\Phi_s^j / \Phi_s^{j+s+2}$ à un sous-espace de F_s^j / F_s^{j+s+2} .

DEFINITION 5

On dit que P^r est de type régulier si, pour tout $x^r \in P^r$, quels que soient $j \leq 1$ et $s \leq r$; $x^r(A^j / A^{j+s+2}) = (\Phi_s^j / \Phi_s^{j+s+2})_{x^r}$ (où $(A^i)_{i \in \mathbb{Z}}$ est la filtration de l'espace holonome A associé à K^r et x^s est la projection de x^r dans P^s).

REMARQUE 6 : (Pour le cas usuel voir [1]).

Une structure de type régulier P^r étant donnée, on associe, par des méthodes analogues à celles du (III, §-2), à P^s , pour $s \leq r$, un fibré $\Delta(P^s)$ de base P^s , de fibre type A_s^s (diagramme de type (s,s) déduit de A) tel que, pour $s \leq r-1$, P^{s+1} soit un sous fibré du fibré principal associé à $\Delta(P^s)$. Voici, par exemple, comment construire la fibre de $\Delta(P^0)$ en x_0 . C'est le diagramme suivant :



où : $\Phi^{-i} = F^{-i}$

$(\varphi^0)_{x_0}$ est l'image de ε^0 par $\tilde{x}_0$ (notation III, §-2)

La flèche $(\varphi^0)_{x_0} \rightarrow (\Phi_0^{-1})_{x_0}$ est la composée $(\varphi^0)_{x_0} \xrightarrow{\sim} \varepsilon^0 \xrightarrow{\sim} (\Phi_0^0)_{x_0} \subset (\Phi_0^{-1})_{x_0}$, l'identification $\varepsilon^0 \xrightarrow{\sim} (\Phi_0^0)_{x_0}$ étant celle de l'algèbre de Lie ε^0 du groupe K^0 avec l'espace tangent vertical $(\Phi_0^0)_{x_0}$.

D'un autre côté, le pseudo-crochet défini au (III, §-2) dans $\bar{T}^1 H^s(M,F)$ induit, pour $s \leq r$, un pseudo-crochet dans $\bar{T}^1 P^s$, ceci du fait de la régularité.

Ceci étant, comme au chapitre III, §-2, on démontre alors le résultat suivant.

THEOREME 7

Avec les données précédentes, le choix, pour tout $\ell \geq r$

d'un supplémentaire de $\text{Im } \partial$ dans $C^{\ell,2}(A)$ permet d'associer à P^r , de manière canonique une suite $(P^n)_{n \geq r+1}$ de K^n -sous-fibrés principaux de $\bar{H}^n(M, F)$ vérifiant les conditions suivantes :

- 1) La restriction à $\bar{T}^1 P^n$ de la forme fondamentale θ_n de $\bar{H}^n(M, F)$ est à valeurs dans $\bar{T}^1 A_n$.
- 2) Les données $(P^n, \theta_n | \bar{T}^1 P^n)$ sont fonctorielles.
- 3) L'équivalence locale de deux K^r -structures P^r et P'^r de type régulier équivaut à l'équivalence locale de $(P^n, \theta_n | \bar{T}^1 P^n)$ et $(P'^n, \theta'_n | \bar{T}^1 P'^n)$ pour $n > r$.

Voici, brièvement, comment construire P^{r+1} .

On construit d'abord $\check{P}^{r+1}$, de base P^r : c'est le fibré principal associé à $\Delta(P^r)$. On définit ensuite la courbure $\Omega_{x_{r+1}}$ d'un élément $x_{r+1} \in \check{P}^{r+1}$ de la même façon qu'au (III, §-2), elle est à valeurs dans $C^{r,2}(A)$. On définit P^{r+1} comme l'image réciproque $\Omega^{-1}(S^r)$, où S^r est le supplémentaire de $\text{Im } \partial$ dans $C^{r,2}(A)$, fixé.

Un cas est particulièrement intéressant : celui où P^r est de type fini (i.e. : A de dimension finie), c'est l'objet du paragraphe suivant.

§-2 : NRF-VARIETES ET NRF-G-STRUCTURES DE TYPE FINI

L'algèbre de Lie graduée suivante est bien connue [3], [12] :

$$e = e^{-3} \oplus e^{-2} \oplus e^{-1}$$

avec : $\dim e^{-3} = 2$ (base : $\varepsilon_4, \varepsilon_5$) ; $\dim e^{-2} = 1$ (base : ε_3) ; $\dim e^{-1} = 2$ (base $\varepsilon_1, \varepsilon_2$). Le crochet est défini par : $[\varepsilon_1, \varepsilon_2] = \varepsilon_3$; $[\varepsilon_3, \varepsilon_1] = \varepsilon_4$; $[\varepsilon_3, \varepsilon_2] = \varepsilon_5$; $[\varepsilon_i, \varepsilon_j] = 0$ sinon, on vérifie que l'espace holonome E associé à cette algèbre de Lie graduée (II, §-3) est de dimension finie. Plus précisément :

$$E = e^{-3} \oplus e^{-2} \oplus e^{-1} \oplus e^0 \oplus e^1 \oplus e^2 \oplus e^3$$

est l'algèbre simple G_2 à 14 paramètres. On a : $\dim e^0 = 4$ et $\dim e^i = \dim e^{-i}$ pour $i \geq 1$. (Pour d'autres exemples voir [13], [5]).

Les groupes de jets holonomes inversibles correspondants, notés L^n , (II, §-3), vérifient donc la condition suivante : pour $n > 4$, L^n est isomorphe à L^{n-1} . Voici, dans ce cas, quels sont les groupes L^0 , L^1 , L^2 et L^3 obtenus par application de la méthode du chapitre II, §-3.

L^0 est le groupe de matrices :

$$\begin{matrix} e^{-1} \left\{ \begin{array}{cccc} x & z & & \\ y & t & & 0 \end{array} \right. \\ e^{-2} \left\{ \begin{array}{cccc} & & \Delta & \\ & & & \Delta x & \Delta z \\ & & & \Delta y & \Delta t \end{array} \right. \\ e^{-3} \left\{ \begin{array}{cccc} & & & 0 \end{array} \right. \end{matrix}$$

où $\Delta = xt - yz \neq 0$.

Soit $u_o = u_o^{-3} \oplus u_o^{-2} \oplus u_o^{-1}$ un élément de L^0 (avec $u_o^{-i} : e^{-i} \leftrightarrow e^{-i}$) et soit $a^{-2} \oplus a^{-1} \oplus a^0$ un élément de e^1 (avec $a^i : e^{i-1} \rightarrow e^i$).

Les éléments de L^1 sont les matrices du type suivant :

$$\begin{array}{c}
 e^0 \\
 e^{-1} \\
 e^{-1} \\
 e^{-2} \\
 e^{-2} \\
 e^{-3} \\
 e^{-3}
 \end{array}
 \left[\begin{array}{cc|cc|cc|c}
 \text{Ad } u_0 & a^0 & & & & & \\
 0 & u_0^{-1} & & & & & \\
 & & u_0^{-1} & a^{-1} & & & \\
 & & 0 & u_0^{-2} & & & \\
 & & & & u_0^{-2} & a^{-2} & \\
 & & & & 0 & u_0^{-3} & \\
 & & & & & & u_0^{-3}
 \end{array} \right]$$

De même les éléments de L^2 sont les matrices du type suivant :

$$\begin{array}{c}
 e^1 \\
 e^0 \\
 e^{-1} \\
 e^0 \\
 e^{-1} \\
 e^{-2} \\
 e^{-1} \\
 e^{-2} \\
 e^{-3} \\
 e^{-2} \\
 e^{-3} \\
 e^{-3}
 \end{array}
 \left[\begin{array}{cc|cc|cc|cc|cc|c}
 \text{Ad } u_1 & b^1 & & & & & & & & & \\
 & 0 & & & & & & & & & \\
 & u_0^{-1} & & & & & & & & & \\
 & & \text{Ad } u_0 & a^0 & b^0 & & & & & & \\
 & & 0 & u_0^{-1} & 0 & & & & & & \\
 & & & & u_0^{-2} & & & & & & \\
 & & & & & u_0^{-1} & a^{-1} & b^{-1} & & & \\
 & & & & & u_0^{-2} & 0 & & & & \\
 & & & & & & & u_0^{-3} & & & \\
 & & & & & & & & u_0^{-2} & a^{-2} & \\
 & & & & & & & & 0 & u_0^{-3} & \\
 & & & & & & & & & & u_0^{-3}
 \end{array} \right]$$

avec $u_2 \in L^2$ (défini par $u_0, a^{-2} \oplus a^{-1} \oplus a^0 \in e^1$ et $b^{-1} \oplus b^0 \oplus b^1 \in e^2$) et $c^2 \oplus c^1 \oplus c^0 \in e^3$.

DEFINITION 1

Une algèbre de Lie graduée $e = e^{-k} \oplus \dots \oplus e^{-1}$ est dite de type fini si l'espace holonome qui lui est associé est de dimension finie.

Une NRF-variété est dite de type fini si son algèbre de Lie graduée type est de type fini.

EXEMPLE 2

Soit M une variété de dimension 5. Soit F^{-1} un champ d'éléments de contact homogène de dimension 2 sur M , dérivable $(I, S-2)$ au sens suivant : $F^{-2} = (F^{-1}, F^{-1})'$ est de dimension 3 et $F^{-3} = (F^{-1}, F^{-2})' = TM$. On reconnaît les systèmes étudiés par E. Cartan en [3]. On pose $F = (F^i)_{i=-1,-2,-3}$. Il est clair que (M, F) est une NRF-variété, dont le type est l'algèbre graduée $e = e^{-3} \oplus e^{-2} \oplus e^{-1}$ du début de ce paragraphe.

Etudions, de manière détaillée, l'exemple précédent. Au-delà de l'ordre 3, les espaces de repères de cette NRF-variété sont tous isomorphes à $H^3(M, F)$. En particulier, la dimension de ces espaces est celle de $E = e^{-3} \oplus e^{-2} \oplus \dots \oplus e^2 \oplus e^3$, c'est à dire 14. La forme fondamentale θ_n sur $H^n(M, F)$ est, par définition, la somme directe de formes θ_n^{-i} , $-i \leq -1$, définies sur les fibrés vectoriels F_n^{-i} , à valeurs dans $e^{-i} \oplus \dots \oplus e^{n-i}$, dont les restrictions aux fibres de F_n^{-i} sont, par construction même, surjectives. Vues les hypothèses, F_n^{-3} n'est rien d'autre que l'espace tangent TH^n , (usuel), de $H^n(M, F)$. Pour $n = 6$, la composante θ_6^{-3} de la forme fondamentale θ_6 sur $H^6(M, F)$ est définie sur TH^6 et à valeurs dans

$E = e^{-3} \oplus \dots \oplus e^3$. Donc θ_6^{-3} définit un parallélisme sur H^6 . De plus, la forme fondamentale θ_6 elle-même est entièrement définie par θ_6^{-3} . Plus précisément :

- Pour $-i < -3$, $\theta_6^{-i} : F_6^{-i} = F_6^{-3} \rightarrow e^{-3} \oplus \dots \oplus e^{6-i}$ est obtenue en composant θ_6^{-3} et la projection de $E = e^{-3} \oplus \dots \oplus e^3$ sur $e^{-3} \oplus \dots \oplus e^{6-i}$.

- Pour $-i > -3$, $\theta_6^{-i} : F_6^{-i} \rightarrow e^{-i} \oplus \dots \oplus e^{6-i}$ est obtenue par restriction de θ_6^{-3} à $F_6^{-i} \subset F_6^{-3}$.

Comme, en outre, F_6^{-i} est, pour $-i > -3$ le noyau de la composée de θ_6^{-3} avec la projection de $E = e^{-3} \oplus \dots \oplus e^3$ sur $e^{-3} \oplus \dots \oplus e^{-i-1}$ un difféomorphisme (local) f de $H^6(M, F)$ vérifiant la condition : $f^*(\theta_6^{-3}) = \theta_6^{-3}$ est compatible avec la filtration de $H^6(M, F)$ et, de plus, vérifie : $(\bar{T}^1 f)^* \theta_6 = \theta_6$. En fait, les conditions : $f^*(\theta_6^{-3}) = \theta_6^{-3}$ et $(\bar{T}^1 f)^* \theta_6 = \theta_6$ sont équivalentes. Le résultat suivant s'en déduit : deux NRF-variétés (M, F) et (M', F') de type $e (= e^{-3} \oplus e^{-2} \oplus e^{-1})$ sont localement équivalentes si et seulement si les variétés parallélisées $(H^6(M, F), \theta_6^{-3})$ et $(H^6(M', F'), \theta_6'^{-3})$ qui leur correspondent le sont.

Le résultat précédent n'est en rien spécifique à l'algèbre de Lie $e = e^{-3} \oplus e^{-2} \oplus e^{-1}$, il est vrai pour toute algèbre de Lie de type fini. Plus généralement, le même raisonnement est applicable aux G -structures de type régulier, et de type fini, sur une NRF-variété (§-1). Nous pouvons donc énoncer le résultat suivant qui étend notablement le domaine d'application d'un résultat de N. Tanaka [12], auquel est dû le principe de la démonstration.

THEOREME 3

Soient $P(M, F)$ et $P'(M', F')$ deux NRF- G -structures régu-

lières de même type, fini, sur des NRF-variétés (M, F) et (M', F') . Pour n suffisamment grand, les prolongements $P^n(M, F)$ et $P'^n(M', F')$ de $P(M, F)$ et $P'(M', F')$ respectivement, sont des variétés parallélisées. Une condition nécessaire et suffisante pour que $P(M, F)$ et $P'(M', F')$ soient (localement) équivalentes est que les variétés parallélisées $P^n(M, F)$ et $P'^n(M', F')$ le soient.

Plus précisément, si les deux G-structures sont de type

$A = e^{-k} \oplus \dots \oplus e^{-1} \oplus \varepsilon^0 \oplus \dots \oplus \varepsilon^r$ et si le prolongement holonome de A est $e^{-k} \oplus \dots \oplus \varepsilon^r \oplus \dots \oplus \varepsilon^\ell$, alors : $n = \ell + k$. Le parallélisme sur $P^{\ell+k}(M, F)$ est défini par la forme $\theta_{\ell+k}^{-k}$, déduite de la forme fondamentale.

Les corollaires du théorème précédent (structure de groupe de Lie, du groupe des automorphismes d'une G-structure de type fini, équivalence à certaines G-structures type etc...), sont les mêmes, et se démontrent de la même façon qu'en [11].

BIBLIOGRAPHIE

- [1] : C. ALBERT - P. MOLINO : "Pseudogroupes de Lie transitifs". Hermann (1984)
- [2] : V. ARNOLD : "Chapitres supplémentaires de la théorie des équations différentielles ordinaires". MIR (1980), p. 60
- [3] : E. CARTAN : "Les systèmes de Pfaff à 5 variables". Ann. Sc. Ecole Normale (1910).
- [4] : C. EHRESMANN : C. R. Acad. Sc. Paris, T 240 (1954), T 241 (1955), T 246 (1958).
- [5] : S. KOBAYASHI - T. NAGANO : "On filtered Lie algebras and geometric structures I. J. of Math. and Mech., vol 13, n° 5, (1964).
- [6] : P. LIBERMANN : "Pfaffian systems and transverse differential geometry". Cahen-Flato, Diff. Geom. and relativity 107-126 (1976).
- [7] : P. LIBERMANN : "Remarques sur les systèmes différentiels". Cahiers de topologie et géométrie différentielle (1980).
- [8] : P. MOLINO : "Sur quelques propriétés des G-structures". J. of Diff. Geom., vol 7, n° 3 et 4 (1972).
- [9] : P. MOLINO : "Connexions et G-structures sur les variétés feuilletées". Bull. Sc. Math. Paris 92 (1968).
- [10]: I.M. SINGER - S. STERNBERG : "The infinite groups of Lie and Cartan". J. Anal. Math., 15 (1965), 1-114.
- [11]: S. STERNBERG : "Lectures on Differential geometry". Prentice Hall 1964.
- [12]: N. TANAKA : "On differential systems, graded Lie algebras and pseudo-groups". J. Math. Kyoto Univ. (1970).
- [13]: N. TANAKA : "On the equivalence problems associated with simple graded Lie algebras". Hokkaido Math. Journ., vol 8 (1979).