JEAN LACROIX

Problèmes probabilistes liés à l'étude des opérateurs aux différences aléatoires

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1982, fascicule 1
« Séminaire de probabilités », , p. 1-16
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1982___1_A7_0>

Prépublication :
A paraitre dans "**Les Annales Institut Elie Cartan**" n°7 Nancy

PROBLEMES PROBABILISTES LIES A L'ETUDE DES OPERATEURS AUX DIFFERENCES ALEATOIRES

par Jean LACROIX

Soit L l'opérateur défini sur les suites complexes $(U_n)_{n\geq 0}$ par $(LU)_n = -a_n U_{n-1} + b_n U_n - a_n U_{n+1}$ $(U_{-1} = 0)$ où a_n et b_n sont des suites réelles données avec $a_n > 0$.

De nombreuses questions relatives à des phénomènes de propagation dans une suite de particules conduisent à l'étude du spectre de l'opérateur L sur certains sous-espaces hilbertiens de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. En particulier, il est important de déterminer s'il existe une base de vecteurs propres pour L.

Dans (I) nous montrons que ce problème peut se ramener à l'étude du comportement asymptotique de certains produits de matrices de $Sl(2, \mathbb{R})$. Cette étude étant, sauf cas particuliers, relativement difficile, on décide dans la partie (II) de considérer $(a_n, b_n)_{n \geq 0}$ comme les réalisations d'une suite $(A_n, B_n)_{n \geq 0}$ de variables aléatoires à valeurs $\mathbb{R}^2$ indépendantes et de même loi, on prouve alors des propriétés presque sûres relatives au spectre et aux fonctions propres de L.

Ces questions ont été traitées par de très nombreux auteurs (dont on trouvera la liste dans [1]). Nous nous proposons ici, en nous plaçant dans un cadre simple, de donner une version simplifiée et améliorée de leurs résultats. En effet, on peut poser le même problème sur $\mathbb{R}$ où des difficultés techniques parfois sérieuses masquent souvent les arguments essentiels.

Quelques exemples d'opérateurs L

On rencontre le genre de problème mentionné plus haut lorsque l'on veut étudier les valeurs du paramètre λ pour lesquelles l'équation $Lu = \lambda u$ admet une solution "localisée" (c'est-à-dire satisfaisant à une condition limite nulle à l'infini). On doit alors touver les valeurs propres de L sur des espaces de suites tendant vers zéro à l'infini.

Dans les exemples ci-dessous Δ désigne le laplacien discrétisé soit

$$\Delta U_n = U_{n+1} - 2U_n + U_{n-1}$$

- Equation des cordes vibrantes (ou chaine harmonique) :

k étant une constante positive, $y_n(t)$ l'ordonnée de la $n^{\text{ième}}$ particule de masse m_n les solutions du genre $y_n(t) = U_n e^{i\lambda t}$ de l'équation

$m_n \dfrac{\partial^2 y_n}{\partial t^2} = k\, \Delta y_n$ satisfont à $Lu = \lambda^2 u$ avec $a_n = \dfrac{b_n}{2} = \dfrac{k}{m_n}$

(de même pour l'équation de la chaleur $C_n \dfrac{\partial y_n}{\partial t} = \Delta y_n$ et pour les solutions du genre $y_n(t) = U_n e^{-\lambda t}$)

- Equation de Schrödinger :

q_n étant une suite réelle donnée, il s'agit de trouver les valeurs propres de l'opérateur $-\Delta + q$ soit de résoudre

$$Lu = \lambda u \quad \text{avec } a_n = 1 \text{ et } b_n = 2 + q_n$$

I

Le Spectre de l'opérateur L (non aléatoire)

On montre dans l'annexe (A) que si la suite a_n est bornée (Hypothèse que l'on fera dans toute la suite) L est un opérateur autoadjoint sur l'espace de Hilbert $H = \{u / \sum \frac{|U_n|^2}{a_n} < +\infty$ muni du produit scalaire $< u,v > = \sum \frac{U_n \bar{V}_n}{a_n}$ et de domaine $D = \{u \ / \ Lu \in H\}$.

En notant par e_n la base orthonormée canonique de H , E_t la résolution de l'identité de L et $\sigma_{m,n}$ la mesure de fonction de répartition $t \to < E_t e_m, e_n >$ on prouve sans peine que $\{L^n e_0\}_{n\geq 0}$ est total dans H et que par conséquent le spectre de L est simple d'élément générique e_0. La probabilité $\sigma = \sigma_{00}$ a donc pour support le spectre de L et pour support ponctuel les valeurs propres de L. Si l'on peut prouver que σ est une mesure ponctuelle, on en déduit immédiatement que H possède une base orthonormée de vecteurs propres.

Pour étudier σ qui résume les propriétés de spectre L on en construit des approximations par restriction de L aux intervalles finis et on démontre [voir annexe B] que si $p_n(z)$ est la solution de $(L - zI)p = 0$ avec $p_0(z) = 1$ on a les propriétés :

(i) $\frac{d\,\sigma_{m,n}}{d\,\sigma} = a_0 \frac{p_n\, p_m}{\sqrt{a_n a_m}}$

(ii) La suite des mesures $\overset{N}{\sigma}_{m,n}$, de densités $\frac{1}{\pi} \frac{p_n\, p_m}{\sqrt{a_n a_m}} \frac{1}{p_N^2 + p_{N+1}^2}$

par rapport à la mesure de Lebesque, converge étroitement vers $\sigma_{m,n}$ quand $N \to +\infty$

On en déduit les deux conséquences importantes :

(F_1) puisque $\sigma_{n,n}$ est une probabilité on a $\int p_n^2\, d\sigma = \frac{a_n}{a_0}$, par conséquent en posant $C(\lambda) = \sum \frac{p_n^2}{n^2}$, $C(\lambda)$ est finie σ presque surement (puisque σ intégrable) et $|p_n(\lambda)| \leq C(\lambda)\, n$

Il s'en suit que pour σ presque tout λ, $\overline{\lim_n} \frac{1}{n} \operatorname{Log}(p_n^2 + p_{n+1}^2) \leq 0$

(F_2) Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $\alpha \in]0,2[$

Si $\sum_{n\geq 0} \int_I \left|\frac{p_n}{a_n}\right|^\alpha d\sigma < +\infty$ alors la restriction σ à I est ponctuelle puisque pour σ presque tout λ dans I, $\sum_n \left|\frac{p_n}{a_n}\right|^\alpha < +\infty$ et donc $p_n \in H$, ce qui équivaut à λ valeur propre. (on ne peut utiliser $\alpha = 2$ car $\int \frac{p_n^2}{a_n} d\sigma = \frac{1}{a_0}$)

La fonction $\lambda \to 1_I(\lambda) \left| \frac{p_n(\lambda)}{\sqrt{a_n}}\right|^\alpha$ étant s.c.i. , la série de terme général $\int_I \left|\frac{p_n}{\sqrt{a_n}}\right|^\alpha d\sigma$ est convergente dès qu'il en est de même de celle de terme général $\underline{\lim}_N \int_I \left|\frac{p_n}{\sqrt{a_n}}\right|^\alpha d\tilde{\sigma}^N_{00}$

Dans la suite nous introduisons la suite de matrices de $Sl(2, \mathbb{R})$

$$g_n^\lambda = \begin{pmatrix} \frac{b_n - \lambda}{a_n} & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

en remarquant que $\begin{pmatrix} p_{n+1} \\ p_n \end{pmatrix} = g_n^\lambda \dots g_0^\lambda \; x_0$ avec $x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ on voit que les formules précédentes font apparaître des produits de matrices dépendant d'un paramètre λ . Sauf cas particuliers, ce dernier problème étant sans solutions nous passons à l'étude de l'opérateur L à coefficients aléatoires qui se révèlera plus aisée.

II

Le Spectre de l'opérateur L aléatoire

On suppose maintenant que $(A_n,B_n)_{n\geq 0}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes de loi ν à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ définies sur un espace Ω ; par conséquent pour chaque ω on a un opérateur L_ω défini par

$$(L_\omega U)_n = -A_n(\omega)U_{n-1} + B_n(\omega)U_n - A_n(\omega)U_{n+1} \qquad U_{-1} = 0$$

Dans la suite on note par σ_ω la mesure spectrale de L et l'on supposera que les A_n sont à valeurs dans un compact de $\mathbb{R}^+$ ne contenant pas zéro.

Les différents espaces H_ω sont alors tous égaux à $l^2(\mathbb{N})$.

Nous utiliserons la version suivante d'un théorème dû à Furstenberg (voir par exemple [2] pour retrouver les hypothèses classiques) :

"Soit U_n une suite de variables aléatoires réelles indépendantes de loi μ, non portée par un point, et vérifiant $\int \mathrm{Log}(1 + |x|)d\mu(x) < +\infty$

Soit g_n la suite de matrices $g_n = \begin{pmatrix} U_n & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et x un point non nul de $\mathbb{R}^2$.

Alors pour presque tout ω la suite $\frac{1}{n}\mathrm{Log}\,\|g_n \ldots g_0\, x\|$ a une limite strictement positive".

THEOREME 1 : *Si* ν *est non portée par un point et si la loi marginale de* B *soit* ν_B *vérifie* $\int \mathrm{Log}(1 + |x|)d\nu_B(x) < +\infty$ *alors pour toute mesure de Radon positive* θ *sur* $\mathbb{R}$ *, les mesures* σ_ω *sont orthogonales à* θ *pour presque tout* ω .

Preuve : On pose $W = \{(\omega,\lambda) \mid \frac{1}{n}\mathrm{Log}\,\|g_n^\lambda \ldots g_0^\lambda\, x_0\|$ a une limite strictement positive $\}$. W est mesurable dans $\Omega \times \mathbb{R}$ et d'après la propriété F_1 de (I) on sait que pour tout ω , $\sigma_\omega(W_\omega) = 0$.

Le résultat de Furstenberg est applicable aux λ pour lesquels $\frac{B-\lambda}{A}$ n'est pas portée par un point et $\int \mathrm{Log}(1 + |\frac{b-\lambda}{a}|)d\nu < +\infty$

La seconde condition est toujours vérifiée d'après les hypothèses faites. Toujours sous les hypothèses faites $\frac{B-\lambda}{A}$ ne peut être portée par un point C que pour une seule valeur de λ au plus (ordonnée à l'origine de la droite portant ν).

Dans ce cas, la solution de Lu = λu est donnée par

$$-a_n U_{n-1} + (Ca_n + \lambda)U_n - a_n U_{n+1} = \lambda U_n$$

soit $\quad -U_{n-1} + CU_n - U_{n+1} = 0 \qquad (U_{-1} = 0)$

Une telle suite U_n ne tend jamais vers zéro à l'infini et par conséquent n'est pas dans H et donc le λ précédent n'est pas valeur propre.

Soit λ_0 cette valeur exceptionnelle de λ si elle existe. Alors pour $\lambda \neq \lambda_0$ on a d'après Furstenberg $P(W_\lambda) = 1$, λ_0 n'étant pas valeur propre le théorème de Fubini appliqué au calcul de $P \otimes \theta$ (CW) donne le résultat.

Cette preuve très simple (quand on la compare à celle donnée par Ishii pour l'équation de Schrödinger qui de plus n'envisageait que le cas de la mesure de Lebesque pour θ) est inspirée de [3] .

Si maintenant on veut passer à une propriété plus précise du spectre à savoir σ_ω ponctuelle pour presque tout ω , il nous suffit de prouver que pour une famille d'intervalles ouverts I recouvrant $\mathbb{R}$ (sauf peut-être un nombre fini de points) on a :

$$\underline{\lim_N}\ \mathbb{E} \int_I \frac{|p_n|^\alpha}{p_N^2 + p_{N+1}^2}\, d\lambda \le C\rho^n$$

les constantes α, C, ρ pouvant dépendre de I avec $\alpha \in\ ]0,2[$, C >0 et $\rho \in\ ]0,1[$

En écrivant que $|p_n| \le (p_n^2 + p_{n+1}^2)^{\frac{1}{2}}$ on voit que :

$$\mathbb{E} \int_I \frac{|p_n|^\alpha}{p_N^2 + p_{N+1}^2}\, d\lambda \le \int_I T^{n+1}_{2-\alpha,\lambda} (T^{N-n}_{2,\lambda} 1)(\bar{x}_0)\, d\lambda$$

où les opérateurs $T_{\gamma,\lambda}$ sont les opérateurs introduits par Nagaev, Tutubalin... et associés à l'action de $Sl(2,\mathbb{R})$ sur l'espace projectif $\mathbb{P}^1$ par la formule :

$$T_{\gamma,\lambda}\, f(\bar{x}) = \int \left(\frac{\|x\|}{\|gx\|}\right)^{\gamma} f(\overline{gx})\, dp^{\lambda}(g)$$

Dans cette formule f est une fonction bornée sur $\mathbb{P}^1$, $\bar{x}$ est l'image dans $\mathbb{P}^1$ de l'élément x de $\mathbb{R}^2$, p_λ est la loi image sur $Sl(2,\mathbb{R})$ de la probabilité ν par l'application

$$(a,b) \to \begin{pmatrix} \frac{b-\lambda}{a} & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

"γ est un réel positif" et G est le groupe $Sl(2,\mathbb{R})$.

Il est facile de constater que $T_{\gamma,\lambda}$ définit un opérateur borné de $C(\mathbb{P}^1)$ dès que $\int |b|^{\gamma}\, d\nu_B(b) < +\infty$

Nous allons tout d'abord établir une propriété des opérateurs $T_{\gamma,\lambda}$ pour "γ petit" qui n'exige que des hypothèses très faibles sur ν en utilisant des méthodes inspirées de [4] .

<u>LEMME 2</u> : *On suppose que ν est non ponctuelle et que ν_B a un moment d'ordre strictement positif.*
Soit I un intervalle compact ne contenant pas la valeur exceptionnelle λ_0 (si elle existe).
Il existe alors $\varepsilon > 0$, $C > 0$, $\rho \in]0,1[$ avec

$$|T^n_{\varepsilon,\lambda} 1(\bar{x})| \leq C\rho^n \quad \forall\, \bar{x} \in \mathbb{P}^1,\ \forall \lambda \in I,\ \forall n \in \mathbb{N}$$

<u>Preuve</u> : On recopie pratiquement la démonstration donnée dans [4] avec quelques vérifications supplémentaires dues à la présence du paramètre λ . Nous nous contenterons donc de donner les étapes essentielles.

Tout d'abord pour $\lambda \in I$, il existe une unique probabilité π_λ avec $p_\lambda * \pi_\lambda = \pi_\lambda$ (voir [5]).
Si on considère la probabilité de transition Q_λ sur $G \times \mathbb{P}^1$ définie par $Q_\lambda f(g,\bar{x}) = \int f(u,\overline{gx})\, dp_\lambda(u)$ elle admet donc l'unique probabilité invariante $p_\lambda \otimes \pi_\lambda$ et l'on a la relation :

$$\mathbb{E}\left[\frac{1}{n}\operatorname{Log}\left(\frac{\|g_{n-1}^{\lambda}\cdots g_0^{\lambda}\, x\|}{\|x\|}\right)\right] = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} Q_\lambda^k\ \sigma(e,\bar{x})$$

avec $\sigma(g,x) = \operatorname{Log}\left(\frac{\|gx\|}{\|x\|}\right)$

Le point essentiel de la démonstration est de prouver que cette expression converge uniformément pour $\lambda \in I$, $\bar{x} \in \mathbb{P}^1$ vers $p_\lambda \otimes \pi_\lambda(\sigma)$.

Pour ceci on établit que λ_n étant une suite de I de limite λ_0, et $\bar{x}_n$ une suite de $\mathbb{P}^1$, la suite de probabilités

$$\nu_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} Q_{\lambda_n}^k((e,\bar{x}_n\,,\cdot)$$

converge étroitement vers $p_{\lambda_0} \otimes \pi_{\lambda_0}$

Dans ce but, on vérifie que la suite ν_n est équitendue en remarquant que la famille $\{Q_\lambda^k((e,\bar{x}),\cdot)$ est de type produit sur $G\times\mathbb{P}^1$, la composante sur G étant p_λ, il suffit alors de constater que $\{p_\lambda\}_{\lambda\in I}$ est équitendue sur G.

Ensuite en utilisant la relation

$$\nu_n\, Q_{\lambda n} = \nu_n + \frac{1}{n}\left[Q_{\lambda n}^{n+1}((e,\bar{x}_n,\cdot) - Q_{\lambda n}((e,\bar{x}_n),\cdot)\right]$$

on vérifie que toute valeur d'adhérence étroite de ν_n est Q_{λ_0} invariante (en remarquant que si φ est continue à support compact sur $G\times\mathbb{P}^1$ l'application $\lambda \to \|Q_\lambda\varphi\|$ est continue)

On en déduit (après approximation de σ par des fonctions continues bornées de type $\varphi\,\sigma$ avec φ continue à support compact) que $\nu_n(\sigma)$ converge vers $p_{\lambda_0} \otimes \pi_{\lambda_0}(\sigma)$ ce qui établit la convergence uniforme demandée.

On sait par ailleurs (voir [5]) que la quantité $p_\lambda \otimes \pi_\lambda(\sigma)$ est strictement positive , comme elle est continue en λ on en déduit qu'il existe un entier N_0 et un nombre β avec :

$$\mathbb{E}\ \frac{1}{N_0}\operatorname{Log}\left(\frac{\|x\|}{\|g_{N_0-1}^{\lambda}\cdots g_0^{\lambda}\, x\|}\right) \leq \beta < 0$$

$\forall \bar{x} \in \mathbb{P}^1$, $\forall \lambda \in I$.

En appliquant la majoration ($a > 0$ et $\gamma > 0$)

$$a^{\gamma} \leq 1 + \gamma \operatorname{Log} a + \frac{\gamma^2}{2} (\operatorname{Log} a)^2 e^{\gamma |\operatorname{Log} a|}$$

à la fonction

$$\gamma \to \left(\frac{\|x\|}{\|g^{\lambda}_{N_0-1} \cdots g^{\lambda}_0 x\|}\right)^{\gamma}$$

puis en prenant l'espérance on prouve avec les hypothèses de moment faites sur ν qu'il existe $\rho < 1$ et $\varepsilon > 0$ avec

$$\sup_{(\bar{x},\lambda)} T^{N_0}_{\varepsilon,\lambda} 1(\bar{x}) \leq \rho$$

La sous multiplicativité du membre de gauche de cette inégalité donne le résultat énoncé.

Si ce lemme permet l'étude de $T_{\gamma,\lambda}$ pour γ petit, il semble que pour $T_{2,\lambda}$ on ne puisse conclure facilement que dans le cas où p_λ possède une densité. On dira que ν induit une densité pour $\lambda \in I$ si la loi de $\frac{B-\lambda}{A}$ a une densité sur $\mathbb{R}$ pour tout λ dans I. (Par exemple dans le cas de Schrödinger si ν_B a une densité ou dans le cas des cordes vibrantes si ν_B a une densité et si I ne contient pas zéro.)

<u>Lemme 3</u> : *Si ν induit une densité pour un intervalle compact* I *et si* ν_B *a un moment d'ordre deux, il existe une constante* C' *avec :*

$$|T^n_{2,\lambda} 1(\bar{x})| \leq C' \quad \forall \bar{x} \in \mathbb{P}^1, \quad \forall \lambda \in I, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

<u>Preuve</u> : Sous les hypothèses écrites, $T^2_{2,\lambda}$ est un opérateur compact de $C(\mathbb{P}^1)$ ne possédant qu'une valeur propre simple positive égale à 1 et dont toutes les autres valeurs propres ont un module strictement inférieur à 1. (voir [6]).

Si φ_λ est la fonction harmonique d'intégrale 1 par rapport à la loi de Cauchy on peut écrire :

$$T^{2n}_{2,\lambda} 1 = \varphi_\lambda + Q^n_\lambda 1$$

Q_λ étant la restriction de $T^2_{2,\lambda}$ au sous espace de $C(\mathbb{P}^1)$ des fonctions d'intégrale nulle pour la loi de Cauchy et de donc de rayon spectral strictement inférieur à 1.

La continuité de l'application $\lambda \to T_{2,\lambda}$ fournit celle de $\lambda \to \varphi_\lambda$ et $\lambda \to Q_\lambda$

Le rayon spectral de Q_λ étant alors une fonction semi-continue supérieurement de λ, et la suite $\| Q_\lambda^n \|$ étant sous-multiplicative on prouve facilement le résultat annoncé.

<u>Lemme 4</u> : *Si ν induit une densité pour un intervalle compact I et si ν_B a un moment d'ordre un, il existe $C'' > 0$, $\rho \in]0,1[$ avec*

$$|T_{1,\lambda}^n\, 1(\bar{x})| \leq C''\rho^n \qquad \forall \lambda \in I, \quad \forall \bar{x} \in \mathbb{P}^1, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

<u>Preuve</u> : Sous les hypothèses écrites, $T_{(1,\lambda)}$ est un opérateur compact de $C(\mathbb{P}^1)$ et donc son rayon spectral est inférieur à celui de $T_{1,\lambda}$ opérant sur les fonctions de carré intégrable pour la loi de Cauchy dont on saitqu'il est strictement inférieur à 1. (voir [5]).

La semi continuité supérieure du rayon spectral et la sous multiplicativité de $\| T_{1,\lambda}^n \|$ fournissent le résultat annoncé.

<u>Théorème 5</u> : *Si ν induit une densité pour une famille d'intervalles I recouvrant $\mathbb{R}$ (sauf peut-être un nombre fini de points) et si ν_B a un moment d'ordre deux alors pour presque tout ω , σ_ω est ponctuelle.*

<u>Preuve</u> : En utilisant les résultats des lemmes 3 et 4, on obtient

$$\mathbb{E} \int_I |p_n|\, d\sigma \leq \frac{1}{\pi} \frac{\lim}{N}\ \mathbb{E} \int_I \frac{|p_n|}{p_{N+1}^2 + p_N^2}\, d\lambda \leq K\rho^n$$

<u>Théorème 6</u> : *Sous les hypothèses de théorème 5, pour presque tout ω les fonctions propres de L_ω sont à décroissance exponentielle.*

<u>Preuve</u> : En reprenant la formule écrite dans le théorème 5 et en choisissant $\rho < \rho' < 1$ et $r = \frac{\rho}{\rho'}$ on obtient :

$$\mathbb{E} \left(\int_I \sum_n |p_n|\, r^{-n}\, d\sigma \right) < +\infty$$

Donc pour presque tout ω , si λ est une valeur propre de L_ω appartenant à I, on a :

$$\sum_n |p_n(\lambda)|\, r^{-n} < +\infty \qquad \text{et donc} \quad |p_n(\lambda)| \leq K'\, r^n$$

<u>Commentaires</u> :

(i) Le lemme 2 n'a pas été utilisé pour établir le théorème 5 mais il constitue une étape essentielle dans la preuve d'un théorème du même genre sans hypothèse de densité car il suffirait alors de prouver que les opérateurs $T_{2,\lambda}$ sont de rayon spectral égal à 1 (ce qui parait une conjecture raisonnable) pour avoir le résultat.

(ii) On peut facilement prouver (voir [3]) qu'il existe un fermé F tel que pour presque tout ω le spectre de L_ω soit égal à F. En reprenant les notations du théorème 1, si m est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ on a $m(CW_\omega) = 0$ pour presque tout ω .
Si I est un intervalle ouvert non disjoint de F, on a

$$\sigma(I) \leq \underline{\lim}_N \int_I \frac{d\lambda}{p_N^2 + p_{N+1}^2}$$

et donc pour presque tout ω la famille $\frac{1}{p_N^2 + p_{N+1}^2}$ n'est pas équiintégrable sur I.

Il est donc à fortiori exclu que la convergence de $\frac{1}{n}\,\mathrm{Log}(p_n^2 + p_{n+1}^2)$ vers une constante strictement positive puisse avoir lieu presque surement uniformément sur I ce qui donne très facilement un résultat établi par Golsheid dans [7] .

(iii) Les problèmes identiques posés sur $\mathbb{Z}$ donnent lieu aux mêmes solutions que dans cet exposé, la seule différence tenant à ce que le spectre de L est dans ce cas de multiplicité au plus deux ce qui conduit à manipuler des expressions légèrement plus compliquées dans la partie I, la partie II étant presque inchangée.

ANNEXE A

L'opérateur L vérifie la formule de Green suivante :

$$\sum_{0}^{N} \frac{(LU)_n \overline{V}n}{a_n} = \sum_{0}^{N} \frac{U_n(L\overline{V})_n}{a_n} - U_{N+1}\overline{V}_N + U_N \overline{V_{N+1}}$$

Si D_0 désigne les suites n'ayant qu'un nombre fini de termes non nuls et L_0 la restriction de L à D_0, l'opérateur (L_0,D_0) est symétrique. Il s'agit de savoir dans quelles conditions on peut affirmer que sa fermeture ne possède qu'une seule extension auto-adjointe, c'est-à-dire lorqu'il a (0,0) pour indices .

Pour ceci on vérifie que l'adjoint (L^*, D^*) est défini par $D^* = \{ U \in H \ / \ LU \in H \}$ et sur D^* on a $LU = L^*U$; L étant à coefficients réels et les solutions de $L^*U = zU$ formant des espaces de dimension 0 ou 1 dans H les indices sont (0,0) ou (1,1) suivant qu'il existe ou non des solutions de cette équation dans H pour $\text{Im} z \neq 0$. Il est facile de constater que si la suite a_n est bornée alors L est symétrique äur D^* et par conséquent (L, D^*) est l'unique extension auto-adjointe, mais on peut trouver des conditions plus faibles (par exemple $\sum \frac{1}{a_n} = +\infty$) qui assurent que $\overline{(L_0,D_0)}$ a une unique extension auto-adjointe(qui n'est plus (L^*, D^*)).

ANNEXE B

Si on suppose la suite a_n bornée, il est facile de construire par approximation les mesures spectrales $\sigma_{(m,n)}$. Pour ceci, on note ${}^N L$ la restriction de L aux suites nulles hors de [0, N] et ${}^N L^x$ l'opérateur ${}^N L - x a_N \pi_N$ (où $\pi_N U$ est la $N^{\text{ème}}$ composante de U, $x \in \mathbb{R}$).

On vérifie que ${}^N L^x$ est symétrique sur H ([0, N]) et que si ${}^N\sigma^x_{(m,n)}$ est la mesure spectrale associée (m et $n \leq N$), on a

$$ {}^N\sigma^x_{(m,n)} = \sum_{\{\lambda / p_{N+1}(\lambda) = x p_N(\lambda)\}} p_m\, p_n \frac{1}{\sqrt{a_m a_n}} \left(\sum_{k=0}^{N} \frac{p_k^2}{a_k} \right)^{-1} \varepsilon_\lambda $$

En effet les sous espaces propres de ${}^N L^x$ sont de dimension 1 et λ est valeur propre si et seulement si $p_{N+1}(\lambda) = x\, p_N(\lambda)$ le vecteur propre normalisé étant $p(\lambda) \left(\sum_{k=0}^{N} \frac{p_k^2}{a_k} \right)^{-1/2}$.

(On en déduit en particulier que le polynome $p_{N+1}(\lambda) - x\, p_N(\lambda)$ a ses racines réelles et distinctes).

On remarquera que l'on ne peut avoir $p_N(\lambda)$ et $p_{N+1}(\lambda)$ simultanément nuls.

La formule écrite ci-dessus permet de constater que

$$ {}^N\sigma^x_{(m,n)} = a_0 \frac{p_n\, p_m}{\sqrt{a_n a_m}} \; {}^N\sigma^x_{(0,0)} $$

Pour établir la convergence étroite de ces restrictions, un procédé classique consiste à utiliser les résolvantes ${}^N R_z^x$ et R_z. Pour ceci, si $({}^N U)$ est une suite nulle hors de [0 N] et en prolongeant par 0 les suites définies sur [0 N]) on prouve la relation :

$$ ({}^N L^x - zI)({}^N U) = (L - zI)({}^N U) - x\, a_N \langle ({}^N U), e_N \rangle e_N + \sqrt{a_N a_{N+1}} \langle ({}^N U), e_N \rangle e_{N+1} $$

En choisissant ${}^N U = {}^N R_z^x e_n$ (n fixé $\leq N$) et $\operatorname{Im} z \neq 0$ la suite ${}^N U$ est bornée dans H par $\frac{1}{|\operatorname{Im} z|}$ elle est donc faiblement compacte et toute valeur d'adhérence faible U vérifie $e_n = (L - zI)\,U$, par conséquent ${}^N U$ converge faiblement vers $R_z\, e_n$.

Il s'en suit que les mesures ${}^N\sigma^x_{(m,n)}$ convergent étroitement vers $\sigma_{(m,n)}$ et $p_n(\lambda)$ étant un polynome en λ (donc continu) on en déduit que

$$\sigma_{m,n} = a_0\, \frac{p_n\, p_m}{\sqrt{a_n\, a_m}}\, \sigma$$

Les approximations ${}^N\sigma^x_{(m,n)}$ sont peu maniables, mais on peut en fabriquer de nouvelles en prenant par exemple des barycentres sur x pour une probabilité τ sur $\mathbb{R}$.

Si on pose ${}^N\tilde{\sigma}_{(m,n)} = \int {}^N\sigma^x_{(m,n)}\, d\tau(x)$ la suite ${}^N\tilde{\sigma}_{(m,n)}$ converge étroitement vers $\sigma_{(m,n)}$ et en choisissant convenablement τ on peut espérer trouver des mesures ${}^N\tilde{\sigma}_{(m,n)}$ relativement simples.

Soit alors N fixé, $(h_1 \ldots h_N)$ les racines de $p_N(\lambda)$ et I_k $(k=0,\ldots,N)$ l'intervalle $]h_k, h_{k+1}[$ (où on a posé $h_0 = -\infty$, $h_{N+1} = +\infty$).

La formule $\displaystyle\sum_0^N \frac{p_k^2}{a_k} = p_N \frac{\partial}{\partial\lambda} p_{N+1} - p_{N+1} \frac{\partial}{\partial\lambda} p_N$

montre que dans chaque intervalle I_k, la fonction $\frac{p_{N+1}}{p_N}$ ayant une dérivée strictement positive est strictement croissante de $-\infty$ à $+\infty$, par conséquent chaque intervalle I_k contient une solution et une seule de l'équation $p_{N+1} = x\, p_N$

Soit $\lambda_k(x)$.

Si maintenant φ est une fonction continue à support compact contenu dans I_k, on a :

$${}^N\tilde{\sigma}_{(m,n)}(\varphi) = \int \psi(\lambda_k(x)) \left[\frac{\partial}{\partial\lambda} \left(\frac{p_{N+1}}{p_N}\right)(\lambda_k(x)) \right]^{-1} d\tau(x)$$

avec $\displaystyle\psi(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{a_m\, a_n}}\, p_m(\lambda)\, p_n(\lambda)\, \varphi(\lambda) \times \frac{1}{p_N^2(\lambda)}$

Si τ a une densité continue $f(x)$ le théorème du changement de variable dans $\mathbb{R}$ donne immédiatement :

$${}^N\tilde{\sigma}_{(m,n)}(\varphi) = \int \psi(\lambda)\, f\left(\frac{p_{N+1}}{p_N}(\lambda)\right) d\lambda$$

En choisissant pour $\mathcal{C}$ la loi de Cauchy on a :

$$^{N}\tilde{\sigma}_{(m,n)}(\varphi) = \frac{1}{\pi\sqrt{a_m\, a_n}} \int \frac{p_m(\lambda)p_n(\lambda)\ \varphi(\lambda)}{p_N^{\,2}(\lambda)+p_{N+1}^{\,2}(\lambda)}\, d\lambda$$

Comme aucune mesure $^{N}\sigma^{x}_{(m,n)}$ ne charge les points $(h_1,\ldots h_N)$ la formule écrite ci-dessus est vraie pour φ continue à support compact quelconque.

REFERENCES :

[1] Kunz et Souillard "Sur le spectre des opérateurs aux différences finies aléatoires"
Commun Maths Phys. 78, 201-246 (1980)

[2] Yoshioka Y. "On the singularity of the spectral measures of a semi infinite random system"
Proc Japan Acad 49, 665 (1973)

[3] Pastur "Spectral properties of disordered systems in the one body approximation"
Commun. Math Phys. 75, 179-196 (1980)

[4] Le Page "Théorèmes limites pour les produits de matrices aléatoires"
Séminaires de Rennes 1981

[5] Guivarc'h "Quelques propriétés asymptotiques des produits de matrices aléatoires"
Lecture Notes in Math. 774

[6] Raugi "Produits de matrices aléatoires"
Cours à l'E.N.S. 1980

[7] Goldsheid "Asymptotic properties of the product of random matrices depending on a parameter"
"Multicomponent Random Systems"
Advances in Proba Vol 6