PUBLICATIONS MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUES DE RENNES

H. CHEBLI

Sur les fonctions presque-périodiques relativement à un opérateur différentiel singulier sur $(0, \infty)$

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1981-1982, fascicule 3
« Séminaire « Équations aux dérivées partielles » », , p. 1-29

<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1981-1982___3_A3_0>

© Département de mathématiques et informatique, université de Rennes, 1981-1982, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications mathématiques et informatiques de Rennes » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

SUR LES FONCTIONS PRESQUE-PERIODIQUES RELATIVEMENT A UN OPERATEUR DIFFERENTIEL SINGULIER SUR $(0,\infty)$.

INTRODUCTION.

1- La propriété de compacité qui caractérise les fonctions presque-périodiques de Bohr, et qui a été établie par Bochner [8] est à la base de toutes les généralisations de la théorie des fonctions presque-périodiques, généralisations relatives à des fonctions définies sur un groupe abstrait et possédant une propriété de compacité tout à fait analogue à celle de Bochner. La généralisation qu'a proposée J. Delsarte [6], et à laquelle nous nous intéressons dans ce travail, à un point de départ tout différent ; considérons l'équation des cordes vibrantes :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

l'expression de la solution générale : $u(x,t) = f(x + t) + g(x - t)$ fait apparaître le rôle du groupe des translations sur la droite réelle, en particulier si f et g sont presque-périodiques de Bohr, il en sera de même de la solution u relativement au temps t, et, cela uniformément par rapport à la variable x. Ceci suggère la géné-

ralisation suivante : soit L un opérateur différentiel linéaire du second ordre et soit u la solution générale de :

$$L_x(u) - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

$$u(x,o) = f(x) \ , \ \frac{\partial u}{\partial t}(x,o) = 0$$

Quelles conditions doit satisfaire f pour que la solution u soit presque périodique de Bohr relativement au temps t, et cela uniformément par rapport à la variable x? Dans, ce cas nous dirons que f est L-presque périodique. J. Delsarte a étudié cette question dans le cas où L est l'opérateur de Bessel

$$L\ v = v'' + \frac{2\alpha+1}{x}\ v' \quad , \quad x > o \ ,$$

où α est strictement compris entre $-\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{2}$. Il a alors mis en évidence une classe de fonctions L-presque périodiques qui, en beaucoup de points, est analogue à la classe des fonctions presque périodiques de Bohr. L'élément simple qui joue le rôle de l'exponentielle est dans ce cas la fonction :

$$x \mapsto j_\alpha(\lambda x) = \frac{2^\alpha \Gamma(\alpha+1)}{(\lambda x)^\alpha} J_\alpha(\lambda x)$$

où J_α est la fonction de Bessel d'indice α. Toute la théorie est alors basée sur les formules intégrales explicites qui lient l'exponentielle à la fonction j_α, [15], et qui transmutent les opérateurs L et $\frac{d^2}{dx^2}$.

2- L'objet du présent travail est d'étudier la question posée plus haut relativement à une classe d'opérateurs différentiels L de la forme :

$$L\ v = -\frac{1}{A(x)}\frac{d}{dx}(A(x)\ \frac{dv}{dx})$$

où A est une fonction positive définie sur $[o,\infty[$ et satisfaisant certaines hypothèses de régularité et de convexité assez larges de manière que la partie radiale de l'opérateur de Laplace-Beltrami sur un espace symétrique de type

non compact et de rang 1 soit de ce type. Ces hypothèses que nous préciserons au second paragraphe, nous permettent, en outre, de montrer l'existence et l'unicité d'une fonction notée $\varphi_\lambda(.)$, $\lambda \in \mathbb{C}$, qui vérifie :

$$L\varphi_\lambda - (\lambda^2 + \rho^2)\varphi_\lambda = 0$$

$$\varphi_\lambda(o) = 1 \ , \ \frac{d}{dx}\varphi_\lambda(o) = 0$$

ρ désigne la limite à l'infini de $\frac{1}{2}\frac{A'}{A}(x)$. Cette solution jouera le rôle de l'exponentielle dans la théorie de Bohr.

La suite de l'exposé est divisée essentiellement en trois parties.

* Dans la première, nous dégageons les principales propriétés de φ_λ que voici :

Propriété d'orthogonalité : Pour tout λ et μ strictement positifs

$$\lim_{R \to \infty} \frac{1}{R} \int_0^R \varphi_\lambda(x)\, \varphi_\mu(x)\, A(x)\, dx = \begin{cases} 0 & \text{si } \lambda \neq \mu \\ 2|C(\lambda)|^2 & \text{si } \lambda = \mu \end{cases}$$

où $C(.)$ est une certaine fonction qu'on précisera.

Représentation intégrale : Pour tout $x > o$, il existe une fonction $W(x;.)$ continue paire, positive et à support dans $[-x,x]$ telle que pour tout complexe λ :

$$\varphi_\lambda(x) = \int_0^x W(x,t) \cos \lambda t \, dt$$

Formule produit : Pour tout x et $y > o$, il existe une mesure de probabilité notée $T(x,y,dz)$ à support dans $[|x-y|, x+y]$ telle que pour tout complexe λ :

$$\varphi_\lambda(x)\ \varphi_\lambda(y) = \int_{|x-y|}^{x+y} \varphi_\lambda(z)\ T(x,y,dz)$$

ces deux dernières propriétés nous permettent de définir les deux opérateurs suivants sur l'espace des fonctions continues :

$$\mathcal{A}(F)(x) = \begin{cases} \int_0^x F(\tau)\ W(x,\tau)\ d\tau & ; x > 0 \\ F(0) & ; x = 0 \end{cases}$$

$$T^x F(y) = \begin{cases} \int_{|x-y|}^{x+y} F(z)\ T(x,y,dz) & ; x,y > 0 \\ F(y) & ; x = 0 \end{cases}$$

Le premier est appelé opérateur de Poisson généralisé, il transmute les opérateurs $L - \rho^2$ et $-\frac{d^2}{dx^2}$ ($(L - \rho^2)\,\mathcal{A} = -\mathcal{A}(\frac{d^2}{dx^2})$). Le second opérateur est appelé opérateur de translation généralisé, il joue le rôle de la translation ordinaire dans la théorie de Bohr.

* Dans la seconde partie, nous introduisons les espaces fonctionnels suivants :

- $\mathcal{B}_0$ est l'espace des fonctions paires, presque-périodiques de Bohr et de moyenne de Bohr nulle.

- $\mathcal{B}'_0$ est le sous-espace de $\mathcal{B}_0$ des fonctions qui sont dérivées d'une fonction presque-périodique impaire.

- $\mathcal{B}_L$ est l'espace image par $\mathcal{A}$ de $\mathcal{B}_0$: <u>c'est l'espace des fonctions L-presque périodiques</u>.

- Enfin $\mathcal{H}_L$ désignera l'espace image par $\mathcal{A}$ de $\mathcal{B}'_0$.

Nous montrerons les principaux résultats que voici :

THEOREME : Si f est dans $\mathcal{B}_L$, la limite

$$\lim_{R\to\infty} \frac{1}{R} \int_o^R f(x)\, \varphi_\lambda(x)\, A(x)\, dx \quad , \quad \lambda > o$$

existe et est finie, elle est nulle sauf pour un ensemble dénombrable de valeurs positives (λ_n) de λ, valeurs que nous appellerons les exposants de Fourier sphérique de f ; pour ces valeurs la limite s'écrit :

$$2\, a_n\, |C(\lambda_n)|^2$$

où la série $\sum |a_n|^2$ est convergente. La série $\sum a_n \varphi_{\lambda_n}(x)$ est appelé série de Fourier sphérique de f et nous écrivons :

$$f(x) \sim \sum a_n \varphi_{\lambda_n}(x)$$

THEOREME : Si f est dans $\mathcal{B}_L$, alors

i) $T^s f$ est dans $\mathcal{B}_L$ pour tout $s \geq o$.

ii) De toute suite $T^{s_1} f, T^{s_2} f, \ldots, T^{s_n} f, \ldots$ on peut extraire une sous suite uniformément convergente dans $\overline{R}$ vers une fonction dans $\mathcal{B}_L$.

* Dans la troisième partie nous étudions les propriétés du sous-espace $\mathcal{H}_L$, et nous montrons en outre les résultats suivants :

THEOREME : Pour toute fonction f dans $\mathcal{H}_L$, la fonction

$$x \mapsto \sqrt{A(x)}\, f(x)$$

est bornée dans $[o, \infty[$.

Ce théorème permet de prouver le suivant.

THEOREME : Si f et g sont dans $\mathcal{H}_L$, la limite

$$\lim_{R\to\infty} \frac{1}{2R} \int_o^R f(x)\, \overline{g(x)}\, A(x)\, dx$$

existe et est finie, elle est nulle si les deux fonctions n'ont aucun exposant de Fourier sphérique en commun ; sinon elle a pour valeur la somme de la série convergente

$$\sum a_n \overline{b}_n |C(\lambda_n)|^2$$

où les (λ_n) *sont les exposants de Fourier sphériques communs à f et g et où* (a_n) *et* (b_n) *sont respectivement les coefficients de Fourier sphériques de f et g.*

Nous terminons, cette introduction par les deux remarques suivantes.

Remarque 1 : L'introduction de fonctions presque-périodiques de Bohr qui sont en plus de moyenne de Bohr nulle est dictée par le fait que la propriété d'orthogonalité de φ_λ tombe, en général, en défaut lorsque $\lambda = \mu = 0$; pour s'en convaincre il suffit de noter que lorsque $A(x) = sh^2x$, φ_0 est donnée par :

$$\varphi_0(x) = \frac{x}{shx}$$

Remarque 2 : La réponse à la question posée au début de l'introduction peut se formuler de la manière suivante : si f est dans l'espace $C^\infty_*(\mathbb{R})$ des fonctions de classe $C^\infty(\mathbb{R})$ et paires alors :

> u est presque-périodique de Bohr par rapport à t et de moyenne de Bohr (uniformément en x) si et seulement si f est dans $\mathcal{B}_L$.

La condition à priori sur f d'être dans $C^\infty_*(\mathbb{R})$ est due à ce que l'opérateur de transmutation $\mathcal{A}$ est bijectif de $C^\infty_*(\mathbb{R})$ sur lui-même et non bijectif de $C_*(\mathbb{R})$ sur lui-même [12]. Cependant on peut remplacer, cette condition à priori en demandant que f soit $\mathcal{A}(C_*(\mathbb{R}))$ et l'énoncé reste le même.

I - L'OPERATEUR L ET LES SOLUTIONS DE L'EQUATION (1).

1- L'OPERATEUR L : Nous désignons par L un opérateur différentiel de la forme :

$$Lu = -\frac{1}{A(x)}\frac{d}{dx}(A(x)\frac{du}{dx}) \quad , \quad x > o$$

où A est une fonction définie sur $[o,\infty[$, à valeurs positives et vérifiant les hypothèses suivantes.

(H_1) - Hypothèse de Convexité : Nous supposons que la fonction A est croissante, tend vers l'infini avec x et que la fonction $\frac{A'}{A}$ est décroissante ; nous posons :

$$\rho = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2}\frac{A'(x)}{A(x)}$$

(H_2) - Hypothèse de Régularité :

(H_{2o}) Au voisinage de l'origine : la fonction A s'écrit sous la forme

$$A(x) = x^{2\alpha+1} B(x)$$

où B est de classe $C^\infty(R)$, paire, strictement positive, nous pourrons supposer $B(o) = 1$ et où $\alpha > \frac{1}{2}$.

$(H_{2\infty})$ Au voisinage de l'infini : soit q(.) la fonction définie sur $]o,\infty[$ par

$$q(x) = \frac{1}{4}(\frac{A'(x)}{A(x)})^2 - \rho^2 + \frac{1}{2}(\frac{A'}{A})'(x)$$

Nous supposerons que la fonction $x \mapsto x^2 q(x)$ est intégrable sur $[o,\infty[$. Remarquons tout de suite que cette condition intervient essentiellement dans l'assertion 2 de la proposition 5 et dans la proposition 8 et les résultats qui la suivent. Nous poserons :

$$\sigma_j(x) = \int_x^\infty t^j |q(t)| dt \ , \ j = 0,1,2 \ ; \quad x > 0.$$

Exemple : Si X est un espace riemannien symétrique de type non compact et de rang 1, la partie radiale de l'opérateur de Laplace-Beltrami sur X est du type L [10] avec :

$$A(x) = sh^n x \ ch^m x$$

où n et m sont des entiers naturels $n \geqslant 1$ et $m \geqslant 0$.

2- LES SOLUTIONS DE L'EQUATION (1) : Considérons l'équation différentielle suivante :

$$\lambda \in \mathbb{C} \ , \ Lu - (\lambda^2 + \rho^2)u = 0 \quad (1)$$

si l'on pose $v = \sqrt{Au}$, et si u est solution de (1), v est solution de :

$$v'' + \lambda^2 v = q(x)v \quad (2)$$

les hypothèses sur A montre que l'on peut écrire (2) sous la forme suivante :

$$v'' - \frac{\alpha^2 - \frac{1}{4}}{x^2} v + \lambda^2 v = \chi(x) \quad (3)$$

où χ est une fonction de classe $C^\infty(R)$ et intégrable.

* Les hypothèses (H_{2o}) montre que l'origine est un point singulier régulier ; les racines de l'équation caractéristique étant 0 et $- 2\alpha$, le théorème de Bôcher [2] permet de montrer qu'il existe une unique solution de (1) qui sera notée dans toute la suite φ_λ et qui vérifie :

$$\varphi_\lambda(o) = 1 \ , \ \frac{d\varphi_\lambda}{dx}(o) = 0$$

* Le changement de variable $t = e^{-x}$, dans l'équation (1), ramène le point à l'infini, à l'origine ce dernier étant un point singulier régulier où

les racines de l'équation caractéristique sont $\pm i\lambda - \rho$, il en résulte qu'il existe deux solutions de l'équation (1), que nous noterons dans la suite $\Phi_{\pm\lambda}$, linéairement indépendantes si $\lambda \neq 0$, et telles que :

$$\Phi_{\pm\lambda}(x) = e^{(\pm i\lambda-\rho)x}\, V_{\pm}(x,\lambda)$$

$$\Phi'_{\pm\lambda}(x) = (\pm i\lambda-\rho)\, e^{(\pm i\lambda-\rho)x}\, V^1_{\pm}(x,\lambda)$$

où $\lim_{x\to\infty} V_{\pm}(x,\lambda) = \lim_{x\to\infty} V^1_{\pm}(x,\lambda) = 1$

de plus, si $\lambda = 0$, avec la solution Φ_0, il existe une deuxième ψ_0 telle que :

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{A}(x)\, [\Psi_0(x) - x\Phi_0(x)] = 0$$

En exploitant les hypothèses $(H_{2\infty})$ et en résolvant l'équation (2) par la méthode de la variation de la constante, nous pouvons préciser le comportement de $\Phi_{\pm\lambda}$ comme suit :

Proposition 1 : Pour tout complexe λ, de partie imaginaire négative ou nulle, la solution $\Phi_{-\lambda}$ admet la représentation intégrale suivante :

$$\sqrt{A(x)}\, \Phi_{-\lambda}(x) = e^{-i\lambda x} + \int_x^\infty k(x,t)\, e^{-i\lambda t} dt \quad , \quad x > 0$$

où $k(.,.)$ est un noyau défini pour $0 < x \leq t$, admettant des dérivées partielles continues à n'importe quel ordre et tel que :

$$\int_x^\infty |k(x,t)|dt \leq \sigma_1(x)\, e^{\sigma_1(x)}, \quad \int_x^\infty t|k(x,t)|dt \leq \frac{1}{4}\sigma_2(x)\, e^{\sigma_1(x)}$$

$$\int_x^\infty \left|\frac{\partial k}{\partial t}(x;t)\right| dt \leq \frac{1}{2}\sigma_0(x) + \sigma_0^2(x)\, \sigma_1(x)\, e^{\sigma_1(x)}$$

la représentation de Φ_λ, valable pour tout complexe λ de partie imaginaire positive ou nulle, s'obtient à partir de celle de $\Phi_{-\lambda}$ en changeant λ en $-\lambda$; on peut voir la démonstration de cette proposition dans [ ], p. 20.

Corollaire 2 :

1) Pour tout $x > 0$, la fonction $\lambda \mapsto \Phi_{\pm\lambda}(x)$ est holomorphe dans l'ensemble $\{\lambda \in \mathbb{C} \ / \ Im(\pm\lambda) > 0\}$, elle est continûment dérivable dans $\{\lambda \in \mathbb{C} \ / \ Im(\pm\lambda) \geq 0\}$.

2) Lorsque $|\lambda x|$ vers l'infini, $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :

$$\sqrt{A(x)}\ \Phi_{\pm\lambda}(x) = e^{\pm i\lambda x}\ [\,1 + O(\tfrac{1}{\lambda x})]$$

$$(\sqrt{A(x)}\ \Phi_{\pm\lambda}(x))' = \pm\, i\lambda\ e^{\pm i\lambda x}\ [\,1 + O(\tfrac{1}{\lambda x})]$$

ce corollaire est une conséquence immédiate de la proposition 1.

Il est aussi important de connaître le comportement de la solution φ_λ au voisinage de l'infini ; pour cela on résoud l'équation (3) par la méthode de la variation de la constante ; nous en déduisons la proposition suivante :

Proposition 3 : Il existe deux constantes positives N_0 et N_1 telles que pour $|\lambda| \geq N_0$, $x > N_1$, on ait :

$$\sqrt{A(x)}\ \varphi_\lambda(x) = x^{\frac{1}{2}+\alpha}\ j_\alpha(\lambda x) + \lambda^{-(\frac{3}{2}+\alpha)}\ \{e^{i\lambda x}\ O(1) + e^{-i\lambda x}\ O(1)\}$$

$$(\sqrt{A(x)}\ \varphi_\lambda(x))' = (x^{\frac{1}{2}+\alpha}\ j_\alpha(\lambda x))' + \lambda^{\frac{1}{2}+\alpha}\ \{e^{i\lambda x}\ O(1) + e^{-i\lambda x}\ O(1)\}$$

où $O(1)$ sont des fonctions bornées lorsque $|\lambda x|$ tend vers l'infini.

3 - FORMULE PRODUIT ET REPRESENTATION INTEGRALE DE φ_λ.

Proposition 4 :

1) Pour tout x et y positifs, il existe une mesure de probabilité à support dans $[\,|x-y|, x+y]$, notée $T(x,y,.)$, telle que pour tout complexe λ, on ait :

$$\varphi_\lambda(x)\,\varphi_\lambda(y) = \int_{|x-y|}^{x+y} \varphi_\lambda(z)\; T(x,y,dz)$$

2) Pour tout $x > 0$, il existe un noyau $W(x,t)$ paire, continue à support dans $[-x,x]$ tel que pour tout complexe λ, on ait :

$$\varphi_\lambda(x) = \int_0^x \cos \lambda t . W(x,t)\; dt$$

Démonstration. La première assertion est démontrée dans [3] voir aussi [4]. Le comportement asymptotique de φ_λ à l'infini et le fait que T soit une mesure de probabilité, permet de montrer que pour tout complexe λ de partie imaginaire dans $[-\rho,\rho]$.

$$|\varphi_\lambda(x)| \leq 1 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

D'autre part, il est déjà prouver dans [4] l'existence d'une mesure positive $W(x,dt)$ à support dans $[-x,x]$ et telle que :

$$\varphi_\lambda(x) = \int_0^x \cos \lambda t\; W(x;dt)$$

La proposition précédente et le théorème de Paley-Wiener, montrent l'existence d'une fonction $t \mapsto \tilde{W}(x,t)$, continue, paire à support dans $[-x,x]$ et telle que :

$$\sqrt{A(x)}\;\varphi_\lambda(x) - x^{\frac{1}{2}+\alpha}\; j_\alpha(\lambda x) = \int_0^x \cos \lambda t\; \tilde{W}(x,t)\; dt$$

la représentation intégrale classique de j_α ([15]) termine la preuve de la deuxième assertion.

4 - LA FONCTION C(.) ET LA PROPRIETE D'ORTHOGONALITE DES φ_λ, $\lambda > 0$.

Les solutions $\Phi_{\pm\lambda}$, $\lambda \neq 0$, étant linéairement indépendantes, la solution φ_λ étant paire en λ, nous en déduisons qu'il existe une constante $C(\lambda)$ telle que :

$$\varphi_\lambda(x) = C(\lambda)\ \Phi_\lambda(x) + C(-\lambda)\ \Phi_{-\lambda}(x)$$

désignons par $[\varphi_\lambda, \Phi_\lambda]$ le wronskien de φ_λ et Φ_λ :

$$[\varphi_\lambda, \Phi_\lambda] = A(x)\ [\varphi_\lambda(x)\ \Phi'_\lambda(x) - \varphi'_\lambda(x)\ \Phi_\lambda(x)]$$

le wronskien de deux solutions de (1) étant indépendant de x, le comportement à l'infini de $\Phi_{\pm\lambda}$ permet de montrer que :

$$[\varphi_\lambda, \Phi_\lambda] = 2i\ \lambda C(-\lambda)$$

La proposition suivante est alors une conséquence des propriétés de φ_λ et Φ_λ et du comportement asymptotique de j_α.

Proposition 5 :

1) Pour tout λ réel :

$$\overline{C(\lambda)} = C(-\lambda)$$

2) La fonction $\lambda \mapsto \lambda\ C(-\lambda)$ est holomorphe dans $\{\lambda \in \mathbb{C}\ /\ \mathrm{Im}\ \lambda > 0\}$, et continûment dérivable sur $\mathbb{R}$, son seul zéro réel possible est $\lambda = 0$.

3) La fonction C(.) admet le comportement asymptotique suivant lorsque λ tend vers l'infini :

$$C(\lambda) = 2^\alpha \Gamma(\alpha+1)\ e^{\frac{1+2\alpha}{4}\pi i}\ \lambda^{-(\frac{1}{2}+\alpha)}\ [1 + O(\tfrac{1}{\lambda})]$$

Remarque 1 : L'origine $\lambda = 0$ est un zéro de la fonction $\lambda \mapsto \lambda\ C(-\lambda)$ seulement lorsque φ_0 et Φ_0 sont linéairement dépendantes, dans ce cas la fonction C(.) est continue sur $\mathbb{R}$ et la fonction $x \to \sqrt{A(x)}\ \varphi_0(x)$ est bornée, et puisque d'après la proposition 4, on a toujours :

$$|\varphi_\lambda(x)| \leq \varphi_0(x) \quad \forall\ \lambda \in \mathbb{R}$$

il en résulte que la fonction $x \mapsto \sqrt{A(x)}\ \varphi_\lambda(x)$ est bornée sur $[0,\infty[$ indépendamment de $\lambda \geq 0$. Dans le cas où $\lambda = 0$ n'est pas un zéro de la fonction $\lambda \mapsto \lambda\, C(-\lambda)$, nous pouvons dire qu'il existe une constante non nulle a et une fonction b(.) continue sur $\mathbb{R}$ telles que :

$$C(\lambda) = \frac{a}{\lambda} + b(\lambda)$$

de plus

$$\sqrt{A(x)}\ \varphi_0(x) = O(x) \quad , \quad x \to \infty$$

Remarque 2 : Dans le cas de l'opérateur de Bessel, la fonction $C(\lambda)$ se comporte comme $\lambda^{-(\frac{1}{2}+\alpha)}$ aussi au voisinage de l'origine qu'à l'infini.

THEOREME 1 : Pour $\lambda > 0$ et $\mu > 0$:

$$\lim_{R\to\infty} \frac{1}{R} \int_0^R \varphi_\lambda(x)\ \varphi_\mu(x)\ A(x) = \begin{cases} 2|C(\lambda)|^2 & , \text{ si } \lambda = \mu \\ 0 & , \text{ si } \lambda \neq \mu \end{cases}$$

Démonstration : On exprime φ_λ à l'aide de $\Phi_{\pm\lambda}$ et on utilise la proposition 1.

Désignons par $L^2(A(x)dx)$ l'espace des (classes de) fonctions de carré sommable sur $(0,\infty)$ pour la mesure $A(x)dx$, W le sous-espace de $L^2(A(x)dx)$ des fonctions v absolument continues ainsi que leurs dérivées premières et telles que L(u) est dans $L^2(A(x)dx)$, enfin W_0 le sous espace de W des fonctions u telles que $\lim_{x\to 0} A(x)\, u'(x) = 0$. Soit D_L l'ensemble suivant :

$$D_L = \begin{cases} W & \text{si } \alpha \geq 1 \\ W_0 & \text{si } \alpha < 1 \end{cases}$$

L'opérateur (L, D_L) est auto-adjoint de spectre absolument continu égal à $[\rho^2, \infty[$, la transformation

$$f \mapsto \hat{f}(\lambda) = \int_0^\infty f(x)\ \varphi_\lambda(x)\ A(x)\ dx$$

réalise un isomorphisme isométrique de $L^2(A(x)dx)$ sur l'espace $L^2((2\pi)^{-1}|C(\lambda)|^{-2}d\lambda)$ des fonctions de carré sommable sur (o,∞) pour la mesure $\frac{d\lambda}{2\pi|C(\lambda)|^2}$, dont l'inverse est donnée par :

$$f(x) = \int_0^\infty \hat{f}(\lambda)\,\varphi_\lambda(x)\,\frac{d\lambda}{2\pi|C(\lambda)|^2}$$

Les deux intégrales précédentes étant convergentes respectivement dans $L^2((2\pi)^{-1}|C(\lambda)|^{-2}d\lambda)$ et $L^2(A(x)dx)$, on a donc l'égalité de Plancherel :

$$\int_0^\infty |f(x)|^2\,A(x)dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty |\hat{f}(\lambda)|^2\,\frac{d\lambda}{|C(\lambda)|^2} \qquad (4)$$

pour les détails, on peut voir [5].

Notations : Dans la suite L^o désignera l'opérateur associé à la fonction $A^o : x \mapsto \mathrm{sh}x^{2\alpha+1}$; W^o, T^o, K^o, φ_λ^o, $\Phi_{\pm\lambda}^o$, C^o, a^o, b^o,... désigneront les fonctions associées à l'opérateur L^o comme dans tout ce qui a précédé ; nous avons en particulier [9] :

$$\varphi_\lambda^o(x) = \frac{2^{\alpha+\frac{1}{2}}\Gamma(\alpha+1)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\alpha+\frac{1}{2})}\,\mathrm{sh}x^{-2\alpha}\int_0^x (\mathrm{ch}x - \mathrm{ch}t)^{\alpha-\frac{1}{2}}\cos\lambda t\,dt \qquad (5)$$

Nous remarquons tout de suite que φ_o^o et Φ_o^o sont linéairement indépendantes si bien que nous avons :

$$C^o(\lambda) = \frac{a^o}{\lambda} + b^o(\lambda)\ ,\ \sqrt{A^o(x)}\,\varphi_o^o(x) = \gamma^o x + O(1),\ x \to +\infty$$
$$a^o \neq 0\ ,\ \gamma^o \neq 0. \qquad (6)$$

II - LES FONCTIONS L-PRESQUE PERIODIQUES ET LEURS DEVELOPPEMENTS EN SERIES DE FOURIER SPHERIQUE.

I- L'ESPACE B_L.

Soient $\mathcal{C}_*(\mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues et paires sur $\mathbb{R}$, $\mathcal{C}^\infty_*(\mathbb{R})$ le sous-espace des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ et paires sur $\mathbb{R}$; soit $\mathcal{B}_0$ l'espace des fonctions paires, presque-périodique de Bohr et de moyenne de Bohr nulle :

$$f \in \mathcal{B}_0 : \lim_{R\to\infty} \frac{1}{R} \int_0^R f(x)dx = 0$$

les exposants de Fourier de telles fonctions sont strictement positifs.

Soient $\mathcal{A}$ et T^s, $s \geq 0$, les opérateurs définies sur $C_*(\mathbb{R})$ par :

$$\mathcal{A}_x[f(\tau)] = \mathcal{A}(f)(x) = \begin{cases} \int_0^x f(\tau)\, W(x,\tau)d\tau & x > 0 \\ f(0) & x = 0 \end{cases}$$

$$T^s f(x) = T^x f(s) = \begin{cases} \int_{|x-s|}^{x+s} f(z)\, T(x,s,dz) & , s > 0,\ x > 0 \\ f(x) & , s = 0 \end{cases}$$

le noyau $W(.,.)$ et la mesure $T(x,s,.)$ étant définis dans la proposition 4.

Les opérateurs $\mathcal{A}$ et T^s se prolongent, par parité , en des opérateurs linéaires de $\mathcal{C}_*(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{C}_*(\mathbb{R})$; [7] ou [14] ; la proposition 4 montre de plus que :

$$||\mathcal{A}(f)||_\infty \leq ||f||_\infty \quad ||T^s f||_\infty \leq ||f||_\infty$$

soit $\mathcal{B}_L$ l'image de $\mathcal{B}_0$ par l'opérateur $\mathcal{A}$; si f est dans $\mathcal{B}_L$ nous désignerons par F_f sa pré-image dans $\mathcal{B}_0$:

$$f(x) = \int_0^x F_f(\tau)\, W(x,\tau)d\tau$$

Définition : Une fonction f est dite L-presque périodique si et seulement si elle est dans $\mathcal{B}_L$.

Soit f une fonction dans $\mathcal{C}_*(\mathbb{R})$ et supposons qu'elle soit image par $\mathcal{A}$ d'une

fonction F_f dans $\mathcal{C}_*(\mathbb{R})$; posons :

$$\Psi_f(x,t) = \frac{1}{2}\alpha_x[F_f(t+\vartheta)+F_f(t-\tau)]$$

L'opérateur α agissant par rapport à la variable τ.

Proposition 6 : La fonction F_f est dans $\mathcal{B}_0$ si et seulement si la fonction $\Psi_f(x,.)$ est paire presque périodique de Bohr, de moyenne de Bohr nulle, et cela uniformément par rapport à x.

La démonstration repose sur le fait que l'opérateur α est borné d'une part, et sur le fait que $\Psi_f(s,.) = F_f(.)$ d'autre part.

Cette proposition justifie la remarque 2 de l'introduction.

Exemple : Toute fonction f de la forme :

$$f(x) = \sum_{q=1}^{N} \mathcal{B}_q \varphi_{\lambda_q}(x) \ , \ \lambda_q > 0 \ , \mathcal{B}_q \in \mathbb{C}$$

est dans $\mathcal{B}_L$ et pré-image est le polynôme trigonométrique

$$F_f(x) = \sum_{q=1}^{N} \mathcal{B}_q \cos \lambda_q x$$

Définition : Un polynôme sphérique P est toute fonction de la forme :

$$P(x) = \sum_{q=1}^{N} \mathcal{B}_q \varphi_{\lambda_q}(x) \ , \ \lambda_q > 0 \ , \ \mathcal{B}_q \in \mathbb{C}.$$

THEOREME 2 :

(i) Toute fonction f de $\mathcal{B}_L$ peut être approchée uniformément dans $\overline{R}$ par une suite de polynômes sphériques et cela d'une infinité de manières.

(ii) Si f est dans $\mathcal{B}_L$, toutes ses translatées $(T^s f)$, $s \geq 0$, sont dans $\mathcal{B}_L$.

Démonstration :

(i) Résulte de ce que toute fonction de $\mathcal{B}_0$ peut être approchée uniformément dans $\bar{R}$ par une suite de polynômes trigonométriques paires et sans terme constant, et du fait que $\mathcal{A}$ est borné sur $\mathcal{C}_*(\mathbb{R})$.

(ii) En remarquant que pour tout $\lambda > 0$

$$\varphi_\lambda(x)\,\varphi_\lambda(s) = \frac{1}{2}\mathcal{A}_x\,\{\mathcal{A}_s[\cos\lambda(\tau+\sigma) + \cos\lambda(\tau-\sigma)]\}$$

où $\mathcal{A}_s$ agit par rapport à σ et $\mathcal{A}_x$ par rapport à τ, nous en déduisons que pour tout polynôme sphérique P :

$$T^s P(x) = \mathcal{A}_x[\Psi_p(s,\tau)]$$

l'étape (i) et le fait que T^s est borné sur $\mathcal{C}_*(\mathbb{R})$ montrent que pour toute fonction f de $\mathcal{B}_L$:

$$T^s f(x) = \mathcal{A}_x[\Psi_f(p,\tau)]$$

la proposition 6 termine la démonstration de (ii).

2 - DEVELOPPEMENT EN SERIE DE FOURIER SPHERIQUE.

Soit f dans $\mathcal{B}_L$ et F_f sa pré-image ; désignons par (λ_q) et $(\mathcal{B}_q)$ respectivement les exposants de Fourier et les coefficients de Fourier de F_f, nous avons les relations classiques suivantes :

$$\mathcal{B}_q = \lim_{R\to\infty} \frac{2}{R}\int_0^R F_f(x)\cos\lambda_q x\,dx \quad , \quad q = 1,2,\ldots$$

$$\sum_{q=1}^{\infty} |\mathcal{B}_q|^2 = \lim_{R\to\infty} \frac{2}{R}\int_0^R |F_f(x)|^2 dx$$

suivant les conventions habituelles, nous écrivons :

$$F_f(x) \sim \sum \beta_q \cos \lambda_q x$$

Définition : Nous dirons que (λ_q) et (β_q) sont respectivement les exposants et les coefficients de Fourier sphérique de la fonction f, et nous écrirons :

$$f(x) \sim \sum \beta_q \varphi_{\lambda_q}(x)$$

le second membre étant appelé la série de Fourier sphérique de f.

Cette définition est justifiée par le théorème suivant.

THEOREME 3 : Soit f une fonction L-presque périodique dont les exposants et les coefficients de Fourier sphérique sont respectivement (λ_q) et (β_q). Alors pour tout λ strictement positif :

$$\lim_{R\to\infty} \frac{1}{R} \int_0^R f(x)\, \varphi_\lambda(x)\, A(x)dx = \begin{cases} 2\beta_q |C(\lambda_q)|^2 & si\ \lambda = \lambda_q \\ 0 & si\ \lambda \neq \lambda_q\ \forall q \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Démonstration : Soient f dans $\mathcal{B}_L$, F_f sa pré-image (dans $\mathcal{B}_0$), pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un polynôme trigonométrique p de la forme :

$$p(x) = \sum_{q=1}^{N} \gamma_q \cos \lambda_q x$$

où (λ_q) sont les exposants de Fourier de F_f, tel que :

$$||F_f - p||_\infty \leq \varepsilon$$

en posant $\gamma_q = 0$ pour $q > N$, on a aussi :

$$|\gamma_q - \beta_q| \leq \left\{ \sum_{q=1}^{\infty} |\gamma_q - \lambda_q|^2 \right\}^{\frac{1}{2}} = \left\{ \lim_{R\to\infty} \frac{2}{R} \int_0^R |F_f(x) - p(x)|^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}} \leq \varepsilon \sqrt{2}$$

soit $P = \alpha(p)$, le théorème 1 montre qu'il existe $R_o > 0$ tel que :

$$R \geqslant R_o \Longrightarrow \left| \frac{1}{R} \int P(x)\, \varphi_{\lambda_q}(x)\, A(x)\, dx - 2\, \gamma_q |C(\lambda_q)|^2 \right| \leqslant \varepsilon$$

l'inégalité triangulaire et ce qui précède montre alors que :

$$R \geqslant R_o \Longrightarrow \left| \frac{1}{R} \int_o^R f(x)\varphi_{\lambda_q}(x)A(x)dx - 2\beta_q |C(\lambda_q)|^2 \right| \leqslant \left|\frac{1}{R}\int_o^R (f(x)-P(x)\varphi_{\lambda_q}(x)A(x)dx\right| +$$

$$\varepsilon(1+2|C(\lambda_q)|^2\sqrt{2})$$

posons

$$J_q(R,t) = \int_t^R \varphi_{\lambda_q}(x)\, W(x,t)\, A(x)dx$$

le théorème de Fubini et l'inégalité de Hölder permettent d'écrire :

$$\left|\frac{1}{R}\int_o^R (f(x)-P(x)A(x)\varphi_{\lambda_q}(x)dx\right| \leqslant \left\{\frac{1}{R}\int_o^R |F_f(x)-p(x)|^2 dx\right\}^{\frac{1}{2}} \left\{\frac{1}{R}\int_o^R |J_q(R,t)|^2 dt\right\}^{\frac{1}{2}}$$

De cette inégalité et de celle au-dessus, résulte que le théorème est une conséquence du lemme suivant :

Lemme : Il existe une constante M telle que :

$$R \geqslant R_o \Longrightarrow \frac{1}{R}\int_o^R |J_q(R,t)|^2\, dt \leqslant M.$$

Démonstration du lemme : la démonstration est assez technique et longue, nous en donnerons les principales étapes ; on remarque d'abord que d'après la formule de Fourier-Plancherel classique :

$$\frac{1}{R}\int_o^R |J_q(R,t)|^2\, dt = \frac{2}{\pi R}\int_o^\infty \left|\int_o^R \varphi_{\lambda_q}(r)\, \varphi_\mu(r)\, A(r)\, dr\right|^2 d\mu$$

(a) Pour tout $m > 0$, la fonction $R \mapsto \frac{1}{R}\int_m^\infty \left|\int_o^R \varphi_{\lambda_q}(r)\varphi_\mu(r)A(r)dr\right|^2 d\mu$,

est bornée sur $[R_o,\infty[$.

La démonstration utilise la formule (4), les propriétés de $C(\lambda)$ au voisinage de l'infini et le théorème 1.

(b) Soient m_o et R_o fixés, $\frac{1}{R_o} < m_o < \lambda_q$; alors la fonction

$$R \mapsto \frac{1}{R} \int_{\frac{1}{R}}^{m} \left| \int_1^R \varphi_{\lambda_q}(r)\, \varphi_\mu(r)\, A(r)\, dr \right|^2 d\mu$$ est bornée sur $[R_o,\infty[$.

Pour le voir, on exprime φ_μ à l'aide de $\Phi_{\pm\mu}$ et on utilise la représentation intégrale de $\Phi_{\pm\mu}$ (proposition 1).

(c) La fonction $R \mapsto \frac{1}{R} \int_0^{\frac{1}{R}} \left| \int_1^R \varphi_\mu(r)\, \varphi_{\lambda_q}(r)\, A(r)\, dr \right|^2 d\mu$ est bornée sur $[R_o,\infty[$. Pour la preuve de (c), on distingue les deux cas suivants :

- Si φ_o et Φ_o sont linéairement dépendantes, l'assertion résulte de la remarque 1 suivant la proposition 5.

- Si φ_o et Φ_o sont linéairement indépendantes, on écrit alors $\varphi_o(x)\sqrt{A(x)} = \gamma x + O(1)$, $x \to \infty$, on pose :

$$\varphi^1_\lambda(x) = \frac{\gamma^o}{\gamma}\varphi_\lambda .$$

où γ^o est défini par (6), on montre alors d'une part :

$$R \mapsto \frac{1}{R} \int_0^{\frac{1}{R}} \left| \int_1^R \left| \varphi^1_{\lambda_q}(x)\, \varphi^1_\mu(x)\, A(x) - \varphi^o_{\lambda_q}(x)\, \varphi^o_\mu(x)\, A^o(x) \right| dx \right|^2 d\mu$$

est bornée sur $[R_o,\infty[$, et que d'autre part, en utilisant (5)

$$R \mapsto \frac{1}{R} \int_0^{\frac{1}{R}} \left| \int_1^R \varphi^o_{\lambda_q}(x)\, \varphi^o_\mu(x)\, A^o(x)\, dx \right|^2 d\mu$$

est aussi bornée sur $[R_0,\infty[$; dans cette dernière étape il y a lieu de distinguer aussi les cas $-\frac{1}{2} < \alpha < \frac{1}{2}$ et $\frac{1}{2} \leq \alpha$.

Proposition 7 : Soit f dans $\mathcal{B}_L$, dont les exposants et les coefficients de Fourier sphérique sont respectivement (λ_q) et (β_q), alors :

i) $T^s f$, $s \geq 0$, a les mêmes exposantes de Fourier sphérique que f.

ii) Les coefficients de Fourier sphérique de $T^s f$ sont $(\beta_q \varphi_{\lambda_q}(s))$.

Il suffit seulement de se rappeler que la pré-image de $T^s f$ est la fonction :

$$t \mapsto \Psi_f(s,t) = \frac{1}{2} a_s [F_f(t+\tau) + F_f(t-\tau)]$$

3 - PROPRIETE DE COMPACITE.

Soit f dans $\mathcal{B}_L$ et F_f sa pré-image et supposons que :

$$f(x) \sim \sum \beta_q \varphi_{\lambda_q}(x) \quad ; \quad F_f(x) \sim \sum \beta_q \cos \lambda_q x$$

nous avons donc

$$\Psi_f(s,x) \sim \sum \beta_q \varphi_{\lambda_q}(s) \cos \lambda_q x$$

THEOREME 4 : De toute suite $(T^{s_m} f)$, $m \in \mathbb{N}$, on peut extraire une sous-suite qui converge uniformément sur $\mathbb{R}$.

Démonstration :

(a) On remarque d'abord que grâce en fait que l'opérateur $\mathcal{A}$ est borné par 1, la famille $\Psi_f(s_m,.)$ est également presque-périodique de Bohr et également uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

(b) Il résulte de (a) que de la suite $\Psi_f(s_m,.)$, $m \in \mathbb{N}$, on peut

extraire une sous-suite qui converge uniformément sur $\bar{R}$.

(c) Le théorème résulte alors de (b).

Remarque 1 : La démonstration de (b) est analogue à celle du théorème page 304 de [6].

Remarque 2 : Le théorème ci-dessus constitue une généralisation partielle du théorème de Bochner qui caractérise les fonctions presque-périodiques.

III - L'ESPACE $\mathcal{H}_L$ ET LE PRODUIT SCALAIRE.

Soit f dans $\mathcal{B}_L$:

$$f(x) \sim \sum \mathcal{B}_q \varphi_{\lambda_q}(x)$$

la série $\sum |\mathcal{B}_q|^2$ est convergente et a pour somme :

$$\lim_{R\to\infty} \frac{2}{R} \int_0^R |F_f(x)|^2 \, dx$$

Cependant rien n'assure en général la convergence de la série $\sum |\mathcal{B}_q|^2 |C(\lambda_q)|^2$ si bien que l'intégrale :

$$\frac{1}{R} \int_0^R |f(x)|^2 A(x) \, dx$$

n'admet pas de limite lorsque R tend vers l'infini, c'est ce qui nous a conduit à introduire le sous-espace $\mathcal{H}_L$ suivant :

$\mathcal{B}'_0$ étant le sous-espace de $\mathcal{B}_0$ des fonctions F dont la primitive G, qui s'annule à l'origine est presque-périodique de Bohr impaire.

Définition : $\mathcal{H}_L$ est le sous-espace de $\mathcal{B}_L$ des fonctions f dont la

pré-image F_f est dans $\mathcal{B}'_0$; pour une telle fonction, on notera G_f la primitive de F_f qui s'annule à l'origine.

Remarque : Si f est dans $\mathcal{H}_L$: $f(x) \sim \sum \mathcal{B}_q \varphi_{\lambda_q}(x)$, on a :

$$F_f(x) \sim \sum \mathcal{B}_q \cos \lambda_q x \; ; \; G_f \sim \sum \mathcal{B}_q \frac{\sin \lambda_q x}{\lambda_q}$$

et les deux séries $\sum |\mathcal{B}_q|^2$ et $\sum |\mathcal{B}_q|^2 \lambda_q^{-2}$ sont convergentes.

Proposition 8 : Soit f dans $\mathcal{H}_L$ dont les exposants et les coefficients de Fourier sphérique sont respectivement (λ_q) et $(\mathcal{B}_q)$ alors la série suivante est convergente :

$$\sum |\mathcal{B}_q|^2 |C(\lambda_q)|^2$$

La démonstration consiste à distinguer les λ_q tels que $\lambda_q \leqslant 1$ et ceux tels que $\lambda_q > 1$ et à utiliser la proposition 5.

Remarque 1 :

- Tout polynôme sphérique est dans $\mathcal{H}_L$.
- Si f est dans $\mathcal{H}_L$, $T^s f$ est aussi dans $\mathcal{H}_L$, $\forall\, s \geqslant 0$.

Remarque 2 : La remarque 2 suivant la proposition 5 montre que la convergence des deux séries :

$$\sum |\mathcal{B}_q|^2 \; , \; \sum |\mathcal{B}_q|^2 \lambda_q^{-2}$$

n'entraîne pas celle de la série

$$\sum |\mathcal{B}_q|^2 \, |C(\lambda_q)|^2$$

dans le cas où $A(x) = x^{2\alpha+1}$, sauf si $-\frac{1}{2} < \alpha < \frac{1}{2}$.

Proposition 9 : Pour toute fonction f dans $\mathcal{H}_L$, il existe une cons-

tante $\ell_f > 0$ telle que :

$$\sup_{x \geq 0} \left| \sqrt{A(x)}\ f(x) \right| \leq \ell_f \left[||F_f||_\infty + ||G_f||_\infty \right]$$

Démonstration : On a toujours :

$$|f(x)| \leq F_f(x)\ \varphi_0(x)$$

(a) Si l'origine est un zéro de la fonction $\lambda \mapsto \lambda C(-\lambda)$ ou qui revient au même si φ_0 et ϕ_0 sont linéairement dépendantes, la proposition résulte de la remarque 1 suivant la proposition 5.

(b) On pose :

$$f^0(x) = \int_0^x F_f(t)\ W^0(x,t)\ dt$$

utilisant l'expression de W^0 (5), on montre qu'il existe $\ell_1(f) > 0$ telle que :

$$\sup_{x \geq 0} \left| \sqrt{A^0(x)}\ f^0(x) \right| \leq \ell_1(f) \left[||F_f||_\infty + ||G_f||_\infty \right]$$

(c) Si $\lambda = 0$ n'est pas un zéro de la fonction $\lambda \mapsto \lambda C(-\lambda)$, on écrit:

$$C(\lambda) = \frac{a}{\lambda} + b(\lambda)$$

on a aussi (6) $\qquad C^0(\lambda) = \frac{a^0}{\lambda} + b^0(\lambda)$

le comportement des fonctions C et C^0, montre que :

$$b(\lambda) - b^0(\lambda) = O(\lambda^{-1}) + O(\lambda^{-(\frac{3}{2} + \alpha)}) \quad \lambda \to \infty$$

moyennant l'étude du paragraphe I, on peut montrer qu'il existe une constante $\ell_2(f) > 0$ telle que :

$$\sup_{x \geq 0} \left| \sqrt{A(x)}\ f(x) - \sqrt{A^0(x)}\ f^0(x) \right| \leq \ell_2(f) \left[||F_f||_\infty + ||G_f||_\infty \right]$$

la proposition en résulte.

THEOREME 5 : Soient f et g deux fonctions dans $\mathcal{H}_L$ telles que :

$$f(x) \sim \sum a_n \varphi_{\lambda_n}(x) \; ; \; g(x) \sim \sum b_m \varphi_{\lambda_m}(x)$$

Alors la limite :

$$\lim_{R\to\infty} \frac{1}{R} \int_o^R f(x)\, \overline{g(x)}\, A(x)\, dx$$

existe et est finie, elle est nulle si les deux fonctions n'ont aucun exposant de Fourier sphérique commun, dans le cas contraire elle est égale à la somme de la série convergente :

$$\sum a_n \overline{b_n}\, |C(\lambda_n)|^2$$

la sommation ne portant que sur les exposants de Fourier sphérique communs à f et g.

Démonstration :

i) Supposons que f et g ont les mêmes exposants de Fourier sphérique (λ_n). Il existe une suite (p_n) de polynômes trigonométriques impairs qui converge sur $\mathbb{R}$ vers G_f et telle que (p'_n) converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers F_f :

$$\forall \varepsilon > 0 \; , \; \exists \; n_0 \mid n \geq n_0 \Longrightarrow ||G_f - p_n||_\infty \leq \varepsilon, \; ||F_f - p'_n||_\infty \leq \varepsilon$$

écrivons p'_n sous la forme :

$$p'_n(x) = \sum_{q=1}^{N_n} \alpha_q^n \cos \lambda_q x$$

les (λ_q) étant parmi les exposants de Fourier sphérique de f ; et posons $\alpha_q^n = 0 \; ; \; \forall q > N_n$.

L'inégalité de Bessel et la proposition montrent que la série $2 \sum a_q \overline{b_q} |C(\lambda_q)|^2$ est convergente, soit S sa somme, il existe un entier n_1 qu'on peut supposer supérieur ou égal à n_0 tel que :

$$|S - 2 \sum_{q=1}^{N_{n_1}} a_q \overline{b_q} |C(\lambda_q)|^2 | \leq \varepsilon$$

l'entier n_1 étant ainsi fixé, l'inégalité triangulaire donne :

$$|\frac{1}{R}\int_o^R f(x)\ \overline{g(x)}\ A(x)\ dx - S| \leq |\frac{1}{R}\int_o^R [f(x) - P_{n_1}(x)]\ \overline{g(x)}\ A(x)\ dx| +$$

$$|\frac{1}{R}\int_o^R P_{n_1}(x)\ \overline{g(x)}\ A(x)\ dx - 2 \sum_{q=1}^{N_{n_1}} \alpha_q^{n_1}\ \overline{b_q}|C(\lambda_q)|^2 | +$$

$$| 2 \sum_{q=1}^{N_{n_1}} (\alpha_q^{n_1} - a_q)\ \overline{b_q}|C(\lambda_q)|^2 | + | \sum_{q=1}^{N_{n_1}} 2\ a_q\ \overline{b_q}|C(\lambda_q)|^2 - S |$$

où on a posé :

$$P_{n_1}(x) = \sum_{q=1}^{N_{n_1}} \alpha_q^{n_1}\ \varphi_{\lambda_q}(x)$$

- Une application de la proposition 9 montre que le premier terme du second membre de l'inégalité ci-dessus est majoré par :

$$\ell_f\ \ell_g\ [||F_g||_\infty + ||G_g||_\infty]\ \varepsilon$$

- Une application du théorème 3, permet de montrer qu'il existe $R_o > 0$ tel que pour $R \geq R_o$ le second terme du second membre de l'inégalité ci-dessus soit majoré par ε.

- L'inégalité de Bessel, le comportement de la fonction et une distinction entre les λ_q, $\lambda_q \leq 1$ et les λ_q, $\lambda_q > 1$, montrent que le troisième terme du second membre de l'inégalité ci-dessus est majoré par $M\varepsilon$ où $M > 0$.

ii) Il est facile de voir que si f et g n'ont aucun exposant de Fourier sphérique commun, en remplaçant S par 0 dans ce qui précède :

$$\frac{1}{R}\int_o^R f(x)\ \overline{g(x)}\ A(x)\ dx \leq \ell_f\ \ell_g\ [||F_f||_\infty + ||G_f||_\infty]\ \varepsilon$$

le théorème est ainsi démontré.

Conclusion : Pour deux fonctions f et g dans $\mathcal{H}_L$, posons :

$$||f||_L^2 = \lim_{R\to\infty} \frac{1}{2R} \int_0^R |f(x)|^2 \, A(x) \, dx$$

$$\langle f,g \rangle = \lim_{R\to\infty} \frac{1}{2R} \int_0^R f(x) \, \overline{g(x)} \, A(x) \, dx$$

l'espace $\mathcal{H}_L$ muni de la norme $||.||_L$ et du produit scalaire $\langle,\rangle$ est un espace préhilbertien ; le sous-espace des polynômes sphériques est dense dans $\mathcal{H}_L$, en particulier la série de Fourier sphérique d'une fonction f de $\mathcal{H}_L$ converge vers f au sens de la norme $||.||_L$.

B I B L I O G R A P H I E

[1] : Z.J. AGRANOVICH - V.A. MARCHENKO - The inverse problem of scattering theory Gordon and Breach, New-York and London 1963.

[2] : M. BOCHER - On regular singular points of linear differential equations of the second order, whose coefficients are not necessarily analytic. Trans. Ann. Math. Soc. Vol. 1 (1900) p. 40-52

[3] : H. CHEBLI - Positivité des opérateurs de "translation généralisée" associés à un opérateur de Sturm-Lionville et quelques applications à l'analyse harmonique. Thèse Strasbourg 1974.

[4] : H. CHEBLI - Sur un théorème de Peley-Weiner associé à la décomposition spectrale d'un opérateur de Sturm-Lionville sur (o,∞). J. of Functional analysis, vol 17, n° 4 (1974) p. 447-461.

[5] : H. CHEBLI - Théorême de Peley-Weiner associé à un opérateur différentiel singulier sur (o,∞). J. Math. Pures et Appl. 58 (1979) p. 1-19.

[6] : J. DELSARTE - Une extension nouvelle de la théorie des fonctions presque-périodiques de Bohr. Acta Math. 69 (1938) p. 259-317.

[7] : J. DELSARTE - J. LIONS - Moyennes généralisées. Comm. Math. Helv. Vol 33, 1953, p. 59-69.

[8] : J. FAVARD - Leçons sur les fonctions presque-périodiques- Gauthier-Villars Paris 1933.

[9] : M. FLENSTEND-JENSEN - Paley-Weiner type theorems for a differential operator conneted with symetric space. Ark. Math. 10 (1972).

[10] : S. HELGASON - Differential geometry and symetric spaces. Academic Press 1962.

[11] : K. JORGENS - Spectral theory of second order ordinary differential operator lecture delivred at Arhus Universitet (1962-1963).

[12] : J.L. LIONS - Opérateurs de Delsarte et problèmes mixtes. Bull. Soc. Math. France, 84, (1956), p. 9-95.

[13] : F.W. OLVER - Asymptotic and special functions. Academic Press, 1974.

[14] : K. TRIMECHE - Transformation intégrale de Weyl et théorème de Paley-Weiner associé à un opérateur différentiel singulier sur (o,∞). J. Math. Pures et Appl., Vol 60, (1981) p. 51-98.

[15] : G.N. WATSON - A treatise on the theory of Bessel functions. Second edition Cambridge University Press.