Jean Marot

Conservation des propriétés des fibres formelles d'un anneau semi-local noethérien par complétion adique

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1980, fascicule S3
« Colloque d'algèbre », , p. 119-122
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1980___S3_119_0>

CONSERVATION DES PROPRIÉTÉS DES FIBRES FORMELLES D'UN ANNEAU SEMI-LOCAL NOETHÉRIEN PAR COMPLÉTION ADIQUE

Jean MAROT

Université de Bretagne Occidentale

0. INTRODUCTION

Donnons d'abord quelques définitions.

Définition 1

Un homomorphisme d'anneaux noethériens $\varphi : A \to B$ est dit régulier (normal, réduit, resp.) si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

1) φ est plat.

2) Pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de A, la $k(\mathfrak{p})$-algèbre $B \otimes_A k(\mathfrak{p})$ est géométriquement régulière (géométriquement normale, géométriquement réduite, resp.).

Définition 2

Soit A un anneau noethérien. On dit que les fibres formelles de A sont géométriquement régulières (géométriquement normales, géométriquement réduites, resp.) si, pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de A, l'homomorphisme canonique $A_{\mathfrak{p}} \to \widehat{A}_{\mathfrak{p}}$ (séparé complété radical-adique de $A_{\mathfrak{p}}$) est régulier (normal, réduit, resp.).

Problèmes posés

Dans E.G.A., IV, 7.4.8 [2], A. Grothendieck pose, entre autres, le problème suivant :

Soit $(A, \mathfrak{J})$ un anneau de Zariski complet. Si les fibres formelles de $A/\mathfrak{J}$ sont géométriquement régulières (géométriquement normales, géométriquement réduites, resp.), en est-il de même de celles de A ?

Résultats

La réponse est positive, si en outre A est semi-local (cas réduit : Marot, 1975 ; cas régulier : Rotthaus, 1977 ; cas normal : Nishimura, 1979).

La réponse est négative, si A n'est pas semi-local (contre-exemple de Nishimura, 1979).

1. RESULTATS

Nous nous limitons au cas régulier et au cas normal. Le principaux résultats sont fournis par les théorèmes 1 et 2 qui suivent.

THEOREME 1 (Rotthaus, Nishimura)[4] [5]

Soit $(A, \mathfrak{J})$ un anneau de Zariski complet semi-local tel que les fibres formelles de $\frac{A}{\mathfrak{J}}$ soient géométriquement régulières (resp. géométriquement normales). Alors les fibres formelles de A sont aussi géométriquement régulières (resp. géométriquement normales).

THEOREME 2 (Nishimura) [4]

Il existe un anneau noethérien intègre A de dimension 3, et un idéal $\mathfrak{J}$ de A tels que :

1) les fibres formelles de A sont géométriquement régulières.

2) les fibres formelles du séparé complété $\mathfrak{J}$-adique B de A ne sont pas géométriquement réduites.

Les démonstrations seront trouvées dans [4] [5]. Signalons seulement que la démonstration du théorème 1 utilise de manière essentielle les deux résultats suivants :

THEOREME 3 (Rotthaus, Nishimura) [4] [5]

Soient $(A, \mathfrak{J})$ un anneau de Zariski complet, B une A-algèbre noéthérienne ; $\mathfrak{P}$ un idéal de B, $\mathfrak{p} = \mathfrak{P} \cap A$; et, pour tout entier $n > 0$, $\mathfrak{P}_n = \mathfrak{P} + \mathfrak{J}^n B$, $\mathfrak{p}_n = \mathfrak{P}_n \cap A$. On suppose que :

1) B est A-fidèlement plat.
2) $\mathfrak{P}_n = \mathfrak{p}_n B$ pour tout n.
3) $\mathfrak{J} B$ est contenu dans le radical de Jacobson de B.

Alors $\mathfrak{P} = \mathfrak{p} B$.

THEOREME 4 (André) [1]

Soient $\varphi : A \to B$ un homomorphisme local d'anneaux locaux noethériens ; $\mathfrak{m}$, l'idéal maximal de A, $k(\mathfrak{m})$ son corps résiduel. On suppose que :

1) φ est plat.
2) l'homomorphisme $\bar{\varphi} : k(\mathfrak{m}) \to B \otimes_A k(\mathfrak{m})$, induit par φ, est régulier.
3) les fibres formelles de A sont géométriquement régulières.

Alors φ est régulier.

4

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. ANDRE, Localisation de la lissité formelle,
Manuscripta Math. 13 (1974), 297-307.

[2] A. GROTHENDIECK, E.G.A., IV, Paris, 1964-1965.

[3] J. MAROT, Sur les anneaux universellement japonais,
Bull. S.M.F., 103 (1975), 103-111.

[4] J. NISHMIMURA, On ideal-adic completion of noetherian rings
(à paraître), Kyoto University.

[5] C. ROTTHAUS, Komplettierung semilokaler quasiansgezeichneter ringe,
Nagoya Math. J. 76 (1979), 173-180

[6] H. SEYDI, Sur la complétion des anneaux excellents, I
(à paraître).