PUBLICATIONS MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUES DE RENNES

J. F. CIAVALDINI
M. POGU
G. TOURNEMINE

Sur un problème de mécanique des fluides conduisant à l'étude d'une équation non linéaire dans un ouvert présentant un coin : existence et régularité de solutions

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1978, fascicule S4
« Journées éléments finis », , p. 1-32

<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1978___S4_A13_0>

© Département de mathématiques et informatique, université de Rennes, 1978, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications mathématiques et informatiques de Rennes » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

SUR UN PROBLEME DE MECANIQUE DES FLUIDES CONDUISANT A L'ETUDE D'UNE EQUATION NON LINEAIRE DANS UN OUVERT PRESENTANT UN COIN : EXISTENCE ET REGULARITE DE SOLUTIONS

par

J.F. CIAVALDINI, M. POGU, G. TOURNEMINE

Laboratoire d'Analyse Numérique et Mécanique
INSA de RENNES, B.P. 14 A, 35031 RENNES CEDEX

Année 1977-1978

1. INTRODUCTION

Dans ce papier, on développe les résultats déjà présentés en [1] et qui concernent les écoulements portants stationnaires, irrotationnels, subcritiques, d'un fluide parfait compressible autour d'un profil donné dans le plan physique et présentant une pointe.

Le premier théorème d'existence et d'unicité qui prend en compte la condition de Kutta-Joukowski pour le type d'écoulements précédents a été obtenu par BERS [2] où il utilise la théorie des fonctions pseudo-analytiques et des transformations quasi-conformes. Ses travaux ont été repris par FINN et GILBARG [3] qui ont étudié plus particulièrement le comportement asymptotique à l'infini des solutions.

Ici nous envisageons le lien entre l'existence d'une solution et son approche numérique ce qui nous conduit à étudier la situation où le profil est placé en atmosphère borné. Cette dernière condition ne constitue pas vraiment une simplification par rapport au cas où le profil est placé en atmosphère infini ; en particulier, nous ne pouvons pas utiliser directement la théorie de L. BERS, puisque celle-ci est basée sur des résultats explicites donnés essentiellement dans l'ouvert non borné extérieur au profil. D'autre part, nous allons traiter le problème dans le cadre des espaces de Sobolev dont l'approche numérique nous semble plus aisée que celle des espaces de fonctions pseudo-analytiques.

Ainsi on borne le domaine extérieur au profil et, sur la frontière artificielle obtenue, on impose comme condition, le comportement à l'infini de la fonction de courant de l'écoulement en atmosphère non borné [3]. Ceci nous amène à introduire un paramètre σ qui représente la circulation du vecteur vitesse de l'écoulement dans l'ouvert extérieur au profil.

En modifiant a priori la loi d'état du fluide [4] , on est conduit à étudier la régularité d'un problème elliptique non-linéaire dépendant du paramètre σ , dans un ouvert borné, non simplement connexe et présentant un angle supérieur à π.

On ajuste le paramètre σ , en approchant le problème non-linéaire par une suite de problèmes aux limites linéaires, en faisant choix d'un algorithme déjà utilisé dans [5] pour traiter des profils réguliers. On montre que la fonction de courant est dans un espace de Sobolev d'ordre suffisamment élevé, pour que la vitesse soit continue sur le profil et nulle au bord de fuite ; c'est la condition classique de Kutta-Joukowski.

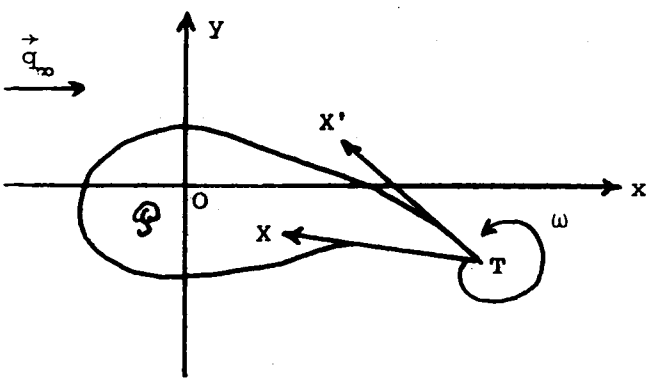
Le plan de ce papier est le suivant : le paragraphe 2 est consacré à la présentation du problème et des résultats obtenus. Au paragraphe 3, nous exposons l'algorithme qui permet d'approcher le problème par une suite de problèmes linéaires. A l'aide des résultats de GRISVARD [6] nous étudions au paragraphe 4 la régularité des problèmes aux limites linéaires et nous donnons un ajustement de la circulation (théorème 1). Ensuite aux paragraphes 5 et 6 nous établissons des estimations a priori (théorème 2) qui nous permettent de prouver la convergence de l'algorithme (théorème 3). Les premiers résultats numériques sont donnés au paragraphe 7. Enfin, au paragraphe 9, nous rassemblons sous forme d'appendice les résultats dont la démonstration n'est pas essentielle en première lecture. Les symboles $(AN)_{1 \leqslant N \leqslant 4}$ font référence à l'appendice.

2. PRESENTATION DU PROBLEME ET DES RESULTATS

2.1. DONNEES GEOMETRIQUES

On désigne par $\mathcal{P}$ un profil de frontière Γ régulière [1] sauf au voisinage du point T où elle présente une pointe formée de deux segments rectilignes portés par les axes TX, TX' ; on note ω l'angle orienté $(\vec{TX},\vec{TX'})$ (voir figure 1).

On place l'origine du repère (Oxy) à l'intérieur de $\mathcal{P}$ et on choisit l'axe des x parallèle à la vitesse à l'infini $q_\infty = (u_\infty, 0)$. On note Ω l'ouvert borné par la frontière Γ et le cercle Γ_∞ de centre O et de rayon R.



- Figure 1 -

2.2. LES EQUATIONS

Soit q le module de la vitesse, nous choisissons l'unité de vitesse de telle sorte que la vitesse limite soit égale à 1. L'écoulement étant isentropique, on montre à l'aide du théorème de Bernouilli que la masse volumique est une fonction de q^2 donnée par

$$\rho(q^2) = \rho_o (1-q^2)^{\frac{1}{\gamma-1}} \qquad (1)$$

---

(1) Au voisinage de tout point de Γ différent de T, on suppose que Γ est de classe C^∞ et que Ω reste d'un même côté de Γ.

où $\gamma > 1$ est l'indice adiabatique du gaz et où $\rho_o > 0$ est la masse volumique du fluide au repos. Dans ces conditions, la vitesse critique est définie par

$$q_c = \left(\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\right)^{1/2} .$$

Sur $[o,q_c^2]$, la fonction $z(\lambda) = \lambda\rho^2(\lambda)$ est strictement croissante elle est donc inversible en $\lambda(z) = z\, h^2(z)$ [2] sur $[o,t_c^2]$, $t_c = q_c = \rho(q_c^2)$. Ainsi, la fonction de courant ψ satisfait les conditions [3].

(2) $\quad \operatorname{div}\left[h\left(|\nabla\psi|^2\right)\nabla\psi\right] = 0 \quad$ dans Ω,

(3) $\quad |\nabla\psi| \leqslant t_c \quad$ dans Ω,

(4) $\quad \psi = 0$ sur Γ, $\quad \psi = S \quad$ sur Γ_∞,

(5) $\quad \nabla\psi = 0 \quad$ au point T ,

où la fonction S est donnée par la comportement à l'infini de la fonction de courant $\tilde{\psi}$ associée à l'écoulement dans le domaine non borné, complémentaire de $\mathcal{S}$ dans $\mathbb{R}^2$. Pour les mêmes raisons qu'en [5], on pose :

(6) $$S = t_\infty\, y + \sigma\alpha_\infty \operatorname{Log}(x^2 + \beta_\infty^2\, y^2) \ ,$$
$$t_\infty = \rho(u_\infty^2)\, u_\infty \ , \ \alpha_\infty = -\rho(u_\infty^2)\,\frac{\beta_\infty}{4\pi} \ ,$$
$$\beta_\infty = (1 - M_\infty^2)^{1/2} \ , \ M_\infty < 1 \ ,$$

où M_∞ est le nombre de Mach à l'infini.

Le paramètre σ traduit la circulation du vecteur vitesse lorsque $\tilde{\psi}$ est une fonction régulière.

Il résulte de la définition de h que

(7) $$\beta_\infty = h'(t_\infty^2) \Big/ \left[2\, h''(t_\infty^2)\, t_\infty^2 + h'(t_\infty^2)\right] \ .$$

La condition (5) traduit la condition de Kutta-Joukowski.

---

(2) h est une fonction strictement croissante et convexe sur $[o,t_c^2]$ et de classe C^∞ sur $[o,t_c^2[$.

(3) Pour $a = (a_1,a_2)$ et $b = (b_1,b_2) \in \mathbb{R}^2$ on note $|a| = (a_1^2 + a_2^2)^{1/2}$ la norme euclidienne et a.b le produit scalaire associé

2.3. RESULTATS OBTENUS

En faisant l'hypothèse suivante sur l'angle ω :

$$(8) \qquad \exists\, p \in \mathbb{R},\ p > 2,\quad 1 < \frac{2\omega}{\pi p'} < 2\ ,\quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1,$$

nous allons montrer :

(9) qu'il existe un couple de réels positifs (R_1, u_1), tels que pour $R > R_1$ et $u_\infty < u_1$, le problème (2).... (5) admet une solution ψ dans $W^{2,p}(\Omega)$ (4).

Dans ces conditions, $\nabla\psi$ est continue sur $\bar{\Omega}$ grâce à un théorème d'injection de Sobolev [7] et la condition (5) en résulte lorsque l'on tient compte de la forme de Γ au voisinage de T, ainsi que de la condition de Dirichlet sur Γ .

3. UN ALGORITHME DE RESOLUTION DU PROBLEME (2)...(5)

3.1. Comme dans [4] la contrainte (3) est levée en introduisant au-delà d'un réel $\lambda_1 \in [0, q_c^2]$, un C^1 - prolongement g de ρ, tel que

$$(10) \qquad \begin{cases} g(\lambda) = \rho(\lambda) & 0 \leq \lambda \leq \lambda_1\ , \\ g(\lambda) \geq 0 & \lambda_1 \leq \lambda \leq \lambda_1 (1+\varepsilon)\ , \\ g'(\lambda) = 0 & \lambda_1(1+\varepsilon) \leq \lambda\ , \end{cases}$$

où $\varepsilon > 0$ est arbitrairement petit (une construction de g sera donnée en A4).

---

(4) $W^{\ell,p}(\Omega)$ désigne l'espace des fonctions définies sur Ω telles que toutes les dérivées d'ordre inférieur ou égal à ℓ soient dans $L^p(\Omega)$; pour v dans $W^{\ell,p}(\Omega)$ on définit sa norme par

$$\|v\|_{W^{\ell,p}(\Omega)} = \left[\sum_{|\alpha| \leq \ell} |D^\alpha v|^p_{L^p(\Omega)} \right]^{1/p}$$

ce qui munit $W^{\ell,p}(\Omega)$ d'une structure d'espace de Banach réflexif. On note $H^\ell(\Omega) = W^{\ell,2}(\Omega)$ et $H_0^\ell(\Omega)$ la fermeture pour la norme ci-dessus de l'espace $\mathcal{D}(\Omega)$ des fonctions de classe C^∞ et à support compact.

On note

$$S_1 = t_\infty\, y \quad , \quad S_2 = \alpha_\infty \ \mathrm{Log}\ (x^2 + \beta_\infty^2\, y^2) .$$

3.2. DESCRIPTION DE L'ALGORITHME

On part de

$$m^o \in \left[W^{1,p}(\Omega)\right]^2 \quad , \ \mathrm{div}\ m^o = 0 \ ,$$

on passe de l'étape n à l'étape (n+1) comme suit [5]

$$(11) \qquad \left| \begin{array}{l} e^{n+1} = g(|m^n|^2)\, m^n \\ \psi^{n+1} \ \text{est solution variationnelle dans } H^1(\Omega) \text{ de} \\ \Delta\psi^{n+1} = \mathrm{div}\ e^{n+1} \ \text{dans } \Omega \ , \\ \psi^{n+1} = 0 \ \text{sur } \Gamma \ , \\ \psi^{n+1} = S^{n+1} = S_1 + \sigma^{n+1}\, S_2 \ \text{sur } \Gamma_\infty \ , \end{array} \right.$$

$$(12) \qquad m^{n+1} = m^n + \nu(\nabla\psi^{n+1} - e^{n+1}) \quad , \ \nu > 0 \ .$$

A l'aide de (8), on montre qu'il existe un couple (R_1, u_1) tel que pour : $R > R_1$ et $u_\infty < u_1 < q_c$, on peut choisir σ^{n+1} de sorte que ψ^{n+1} reste borné dans $W^{2,p}(\Omega)$. Ainsi, on peut extraire une sous-suite convergente et par passage à la limite, on déduit qu'il existe $\psi \in W^{2,p}(\Omega)$ tel que

$$(13) \qquad \left| \begin{array}{l} \nabla\psi = e = g(|m|^2)\ m \quad , \ \mathrm{div}\ m = 0 \quad , \\ \psi = 0 \ \text{sur } \Gamma \ , \quad \psi = S \ \text{ sur } \Gamma_\infty \ , \end{array} \right.$$

en ajustant convenablement u_1, on montre ensuite que $m(x,y)$ est borné uniformément par λ_1 et en revenant à la construction de h, on en déduit (9) grâce à (13).

Dans toute la suite, on suppose p choisi comme en (8).

4. REGULARITE DU PROBLEME AUX LIMITES (11)

On remarque que toute solution de (11) se décompose ainsi :

$$\psi^{n+1} = \psi_1^{n+1} + \sigma^{n+1}\ \psi_2 \ , \tag{14}$$

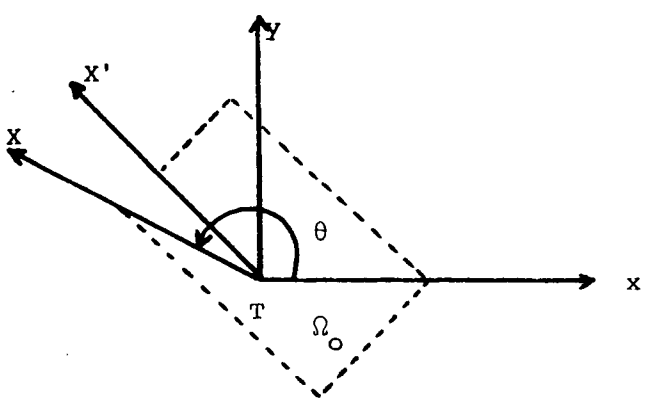
où les fonctions ψ_1^{n+1} et ψ_2 sont solutions variationnelles dans $H^1(\Omega)$ de

$$\left| \begin{array}{l} \Delta\psi_1^{n+1} = \text{div } e^{n+1} \quad \text{dans} \quad \Omega \ , \\ \psi_1^{n+1} = 0 \quad \text{sur } \Gamma \ , \ \psi_1^{n+1} = S_1 \quad \text{sur } \Gamma_\infty \ , \end{array} \right. \tag{15}$$

$$\left| \begin{array}{l} \Delta\psi_2 = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega \ , \\ \psi_2 = 0 \quad \text{sur } \Gamma \quad , \ \psi_2 = S_2 \quad \text{sur } \Gamma_\infty \quad ; \end{array} \right. \tag{16}$$

une décomposition analogue a été utilisée dans [8] pour traiter par une méthode de singularités, un problème linéaire singulier dans le plan.

Pour étudier la régularité de ψ^{n+1}, on va utiliser des résultats de [6] en localisant le problème au voisinage de T. On introduit un ouvert Ω_o polygonal, simplement connexe et ayant ω pour angle au sommet T, la mesure des autres angles au sommet étant strictement inférieure à $\frac{\pi p'}{2}$ (voir figure 2)



- Figure 2 -

Soit z_T l'affixe de T et ϕ_o la fonction définie sur Ω_o par

$$\phi_o = \mathfrak{Im}\left\{ \left[e^{-i\theta}(z-z_T) \right]^{-\pi/\omega} \right\}, \quad \theta = (\vec{Ox},\vec{TX}) \ ;$$

on pose $u_o = w_o + \phi_o$ où w_o est la solution variationnelle dans $H^1(\Omega_o)$ de

$$\Delta w_o = 0 \text{ dans } \Omega_o \quad , \quad w_o = -\phi_o \quad \text{sur } \partial\Omega_o .$$

Proposition 1

Etant donné $f \in L^p(\Omega)$ et $\ell \in H^{1/2}(\Gamma_\infty)$; la solution variationnelle $\xi \in H^1(\Omega)$ de

$$\left| \begin{array}{l} \Delta\xi = f \quad \text{dans} \quad \Omega \ , \\ \xi = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma \ , \quad \xi = \ell \quad \text{sur} \ \Gamma_\infty \ , \end{array} \right.$$

vérifie l'équivalence

$$\xi/_{\Omega_o} \in W^{2,p}(\Omega_o) \iff F(\xi,f) = 0$$

où l'on note

$$F(\xi,f) = \int_{\partial\Omega_o \setminus \Gamma} \frac{\partial u_o}{\partial n} \cdot \xi \, ds + \int_{\Omega_o} u_o . f \, dxdy \ .$$

Démonstration

On introduit une fonction de troncature α de classe C^∞, identique à un au voisinage de T et dont le support vérifie :

$$T \in \text{supp}(\alpha) \cap \bar{\Omega} \subset \bar{\Omega}_o$$

On pose $\bar{\xi} = \alpha\xi$, $\bar{f} = \Delta\alpha . \xi + 2 \nabla\alpha . \nabla\xi + \alpha . f$;

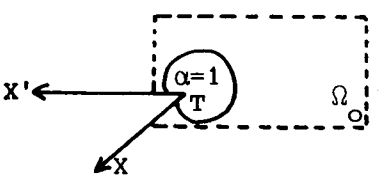
$\bar{\xi}$ est solution dans $H^1(\Omega_o)$ de

$$\Delta\bar{\xi} = \bar{f} \quad \text{dans} \quad \Omega_o , \quad \bar{\xi} = 0 \quad \text{dans} \quad \partial\Omega_o \ .$$

On montre classiquement [7] que ξ et ses dérivées premières sont localement p^e intégrables dans Ω , il en résulte que $\bar{f} \in L^p(\Omega_o)$ et à l'aide de A1 on en déduit

$$(17) \qquad \bar{\xi} \in W^{2,p}(\Omega_o) \iff \int_{\Omega_o} \Delta\bar{\xi} \, u_o \, dxdy = 0 \quad ;$$

pour montrer la proposition, on va transformer le membre de droite dans l'équivalence (17). On note $\Omega' = \{(x,y) \in \Omega \ ; \ \alpha(x,y) = 1\}$, $\Omega'' = \Omega_o \setminus \Omega'$ (voir figure 3)



- Figure 3 -

Par construction de α, on a

$$(18) \qquad \int_{\Omega_o} \Delta\bar{\xi} \, u_o \, dxdy = \int_{\Omega'} f \, u_o \, dxdy + \int_{\Omega''} \Delta\bar{\xi} \, u_o \, dxdy$$

on remarque que $\bar{\xi}$ et u_o sont régulières dans $\Omega"$, de sorte qu'en utilisant la formule de Green, il vient

$$\int_{\Omega"} (\Delta\bar{\xi}\, u_o - \bar{\xi}\, \Delta u_o)\,dx\,dy = \int_{\partial\Omega"} \left(\frac{\partial\bar{\xi}}{\partial n}\, u_o - \bar{\xi}\, \frac{\partial u_o}{\partial n} \right) ds \quad ,$$

par construction, u_o est harmonique sur $\Omega"$ et d'autre part ξ et u_o s'annulent sur Γ, il en résulte

$$(19) \qquad \int_{\Omega"} \Delta\,\bar{\xi}\, u_o\, dx\, dy = \int_{\partial\Omega' \setminus \Gamma} \left(\frac{\partial\xi}{\partial n}\, u_o - \xi \frac{\partial u_o}{\partial n} \right) ds$$

car $\bar{\xi}$ et ses dérivées s'annulent sur $\partial\,\Omega_o \setminus \Gamma$.

Il vient par ailleurs

$$\int_{\Omega"} (\Delta\,\xi\, u_o - \xi\,\Delta\, u_o)\,dx\,dy = \int_{\Omega"} \left(\frac{\partial\xi}{\partial n}\, u_o - \xi\, \frac{\partial u_o}{\partial n} \right) ds$$

et en remarquant que ξ et u_o s'annulent sur Γ et $\partial\Omega_o$ respectivement et que u_o est harmonique sur $\Omega"$, on a

$$\int_{\Omega"} f.u_o\, dx\, dy = \int_{\partial\Omega' \setminus \Gamma} \left(\frac{\partial\xi}{\partial n} \cdot u_o - \xi\, \frac{\partial u_o}{\partial n} \right) ds - \int_{\Omega_o \setminus \Gamma} \xi\, \frac{\partial u_o}{\partial n}\, ds$$

et la proposition résulte de (18) et (19). ■

Proposition 2

Il existe un couple (R_1, u_1) tel que $R > R_1$ et

$u_\infty < u_1 \Longrightarrow |F(\psi_2, 0)| \geq D > 0$

où la constante D est indépendante de R et u_∞.

Démonstration

En revenant à (16) on a la décomposition

$$(20) \qquad \psi_2 = \chi_1 + \chi_2$$

où χ_1 et χ_2 sont solutions dans $H^1(\Omega)$ de

$$\left| \begin{array}{l} \Delta\,\chi_1 = 0 \text{ dans } \Omega\,, \\ \chi_1 = 0 \quad \text{sur } \Gamma\,, \quad \chi_1 = \alpha_\infty\, \mathrm{Log}(x^2 + y^2) \text{ sur } \Gamma_\infty \quad ; \end{array} \right.$$

$$\left| \begin{array}{l} \Delta\chi_2 = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega \ , \\ \chi_2 = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma, \quad \chi_2 = \alpha_\infty \mathrm{Log}\left(\frac{x^2 + \beta_\infty^2 y^2}{x^2 + y^2}\right) \text{ sur } \Gamma_\infty . \end{array} \right.$$

Soit $\tilde{\Omega}$ le complémentaire du profil $\mathcal{S}$ dans $\mathbb{R}^2$, on définit l'espace

$$\tilde{V} = \left\{ \xi \in \mathcal{D}'(\tilde{\Omega}) \ , \ \xi/(x^2+y^2)^{1/2} \ \mathrm{Log}(x^2+y^2)^{1/2} \in L^2(\tilde{\Omega}) \ , \ \xi_x \ , \xi_y \ L^2(\tilde{\Omega}) \right\}$$

et on note $\tilde{\chi}_1$ la solution du problème aux limites

$$\left| \begin{array}{l} \tilde{\chi}_1 - \alpha_\infty \ \mathrm{Log}(x^2 + y^2) \in \tilde{V} \ , \\ \Delta\tilde{\chi}_1 = 0 \quad \text{dans} \quad \tilde{\Omega} \ , \\ \tilde{\chi}_1 = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma \ ; \end{array} \right.$$

on montre que $\tilde{\chi}_1/_{\Omega_o} \notin W^{2,p}(\Omega_o)$ (voir A2), il en résulte à l'aide de la proposition 1 que $F(\tilde{\chi}_1, 0) \neq 0$;

lorsque $R \to \infty$, $\chi_1/_{\Omega_o}$ converge vers $\tilde{\chi}_1/_{\Omega_o}$ dans $H^1(\Omega_o)$ (voir A2) ;

il en résulte qu'il existe $R_1 > 0$ tel que

$$(21) \qquad R \geqslant R_1 \Longrightarrow |F(\chi_1, 0)| \geqslant \frac{3}{2} D > 0.$$

D'autre part, à l'aide du principe du maximum [7] , il vient

$$|\chi_2|_{L^\infty(\Omega)} \leqslant \alpha_\infty \ |\mathrm{Log}\ \beta_\infty^2| \ ,$$

et grâce à (7) on peut choisir u_1 tel que

$$u_\infty \leqslant u_1 \Longrightarrow |F(\chi_2, 0)| \leqslant \frac{D}{2} \ ;$$

on en déduit la proposition en tenant compte de (20) (21). ■

Dans la suite on choisit le couple (R_1, u_1) comme dans la proposition 2 et on suppose que

$$R \geqslant R_1 \text{ et } u_\infty \leqslant u_1 \ .$$

Théorème 1

Si div $e^{n+1} \in L^p(\Omega)$ alors on a l'équivalence

$$\psi^{n+1} \in W^{2,p}(\Omega) \iff \sigma^{n+1} = - \frac{F(\psi_1^{n+1}, \text{ div } e^{n+1})}{F(\psi_2, 0)}$$

Démonstration

En revenant à (11), il vient à l'aide de la proposition 1

$$\psi^{n+1} \in W^{2,p}(\Omega) \iff F(\psi^{n+1}, \text{ div } e^{n+1}) = 0$$

tenant compte de la décomposition (14), le théorème résulte de la relation suivante :

$$F(\psi^{n+1}, \text{ div } e^{n+1}) = F(\psi_1^{n+1}, \text{ div } e^{n+1}) + \sigma^{n+1} F(\psi_2, 0) \quad \blacksquare$$

Dans la suite, on choisit σ^{n+1} comme dans le théorème 1.

5. ESTIMATIONS A PRIORI

Introduisons quelques notations : soit $m \in [W^{1,p}(\Omega)]^2$ la fonction à valeurs vectorielles de composantes m_1, m_2 ; on note ∇m la fonction à valeurs vectorielles de composantes m_{1x}, m_{1y}, m_{2x}, m_{2y}. Sur $[W^{1,p}(\Omega)]^2$ on définit la norme :

$$||m||_p = (|m|_p^p + |\nabla m|_p^p)^{1/p} \tag{22}$$

où l'on a posé

$$|m|_p = \left[\int_\Omega (|m_1|^p + |m_2|^p) \, dx \, dy \right]^{1/p}$$

$$|\nabla m|_p = \left[\int_\Omega (|m_{1x}|^p + |m_{1y}|^p + |m_{2x}|^p + |m_{2y}|^p) \, dx \, dy \right]^{1/p}$$

Dans ce paragraphe, en supposant que $m^n \in [W^{1,p}(\Omega)]^2$, on va estimer $||m^n||_p$.

Lemme 1

Soit $m \in [W^{1,p}(\Omega)]^2$ tel que div m = 0, alors $e = g(|m|^2)\, m$ vérifie

$$e \in [W^{1,p}(\Omega)]^2 \ , \quad \text{div } e \in L^p(\Omega) \ ; \tag{23}$$

en outre, on a les estimations suivantes

$$|\text{div } e|_{L^p(\Omega)} \leq C_1 |\nabla m|_p \ , \tag{24}$$

$$|\nabla(m - \nu e)|_p \leq (1 - \nu C_3) \ |\nabla m|_p \ , \quad 0 < \nu < C_2, \tag{25}$$

où l'on a posé

$$C_1 = 2^{2/p'} \sup_{\lambda \geq 0} \lambda |g'(\lambda)| \ ,$$

$$C_2 = \left[\sup_{\lambda \geq 0} g(\lambda) + 2 \sup_{\lambda \geq 0} \lambda |g'(\lambda)| \right]^{-1} \ ,$$

$$C_3 = \inf_{\lambda \geq 0} g(\lambda) - 3 \sup_{\lambda \geq 0} \lambda |g'(\lambda)| \ .$$

Démonstration

Sachant que $[C^\infty(\Omega)]^2$ est dense dans $[W^{1,p}(\Omega)]^2$ il suffit de raisonner sur des fonctions régulières, en particulier on obtient (23) grâce aux propriétés de g données en (10).

Soit maintenant $m \in [C^\infty(\bar{\Omega})]^2$, tenant compte de la condition div m = 0, il vient :

$$\text{div } e = \left[m_1^2 \, m_{1x} + (m_1 m_2) m_{1y} + (m_1 m_2) \, m_{2x} + m_2^2 \, m_{2y} \right] \times 2g'(|m|^2) \ ;$$

à l'aide de l'inégalité de Hölder, on a [5]

$$|\text{div } e| \leq 2^{2/p'} \ |g'(|m|^2)| \ |m|^2 \quad |\nabla m|_4$$

et (24) en résulte.

Notons $\tilde{m} = m - \nu e$, on a aisément

$$\left| \begin{array}{l} \tilde{m}_{1x} = (1 - \nu g - 2 g' \nu m_1^2) \, m_{1x} - 2\nu(g' m_1 m_2) \, m_{2x} \ , \\ \tilde{m}_{1y} = (1 - \nu g - 2 g' \nu m_1^2) \, m_{1y} - 2\nu(g' m_1 m_2) \, m_{2y} \ , \\ \tilde{m}_{2x} = (1 - \nu g - 2 g' \nu m_2^2) \, m_{2x} - 2\nu(g' m_1 m_2) \, m_{1x} \ , \\ \tilde{m}_{2y} = (1 - \nu g - 2 g' \nu m_2^2) \, m_{2y} - 2\nu(g' m_1 m_2) \, m_{1y} \ , \end{array} \right. \tag{26}$$

(5) Pour $a = (a_j)_{1 \leq j \leq 4} \in \mathbb{R}^4$, on note $|a|_4 = \left(\sum_{j=1}^4 |a_j|^p \right)^{1/p}$

tenant compte de (10), on a pour j = 1,2

$$1 - \nu \sup_{\lambda \geq 0} g(\lambda) - 2\nu \sup_{\lambda \geq 0} \lambda |g'(\lambda)| \leq 1 - \nu g(\lambda) - 2\nu g'(\lambda)\, m_j^2 \leq$$

$$\leq 1 - \nu \inf_{\lambda \geq 0} g(\lambda) + 2\nu \sup_{\lambda \geq 0} \lambda |g'(\lambda)| \quad ,$$

choisissons ν tel que $0 < \nu < C_2$;

à l'aide de (26), on en déduit

$$|\nabla \tilde{m}|_4 \leq (1 - \nu C_3)\ |\nabla m|_4 \quad \blacksquare$$

Proposition 3

Si $m^o \in [W^{1,p}(\Omega)]^2$ et div $m^o = 0$, alors pour $n \geq 0$

(27) div $m^{n+1} = 0$, $e^{n+1} \in [W^{1,p}(\Omega)]^2$, div $e^{n+1} \in L^p(\Omega)$, $\psi^{n+1} \in W^{2,p}(\Omega)$

et en outre on a l'estimation [6].

(28) $$||\psi^{n+1}||_{W^{2,p}(\Omega)} \leq C(u_\infty + C_1 |\nabla m^n|_p)$$

où C est une constante indépendante de n et u_∞.

Démonstration

Soit $m^o \in [W^{1,p}(\Omega)]^2$, alors à l'aide de (23), $e^1 \in [W^{1,p}(\Omega)]^2$, div $e^1 \in L^p(\Omega)$, on en déduit grâce au choix de σ^1 que $\psi^1 \in W^{2,p}(\Omega)$ et (27) en résulte par récurrence sur n.

A l'aide de A3, il vient :

$$||\psi^{n+1}||_{W^{2,p}(\Omega)} \leq C\left[|\text{div } e^{n+1}|_{L^p(\Omega)} + |s^{n+1}|_{W^{2-1/p,p}(\Gamma_\infty)}\right] \quad ;$$

par ailleurs

$$|s^{n+1}|_{W^{2-1/p,p}(\Gamma_\infty)} \leq C(u_\infty + |\sigma^{n+1}|)$$

et on déduit du théorème 1 et de A3 que

$$|\sigma^{n+1}| \leq C\left[u_\infty + |\text{div } e^{n+1}|_{L^p(\Omega)}\right] \quad ;$$

---

(6) On note C toute constante indépendante de n et de u_∞.

il résulte des estimations précédentes que

$$||\psi^{n+1}||_{W^{2,p}(\Omega)} \leq C\left[u_\infty + |\text{div } e^{n+1}|_{L^p(\Omega)}\right]$$

et on conclut (28) grâce à (24) ■

Théorème 2

Pour $0 < \nu < C_2$, on a l'estimation

$$||m^{n+1}||_p \leq (1 - \nu C_4)||m^n||_p + \nu C u_\infty \tag{29}$$

où

$$C_4 = \inf_{\lambda \geq 0} g(\lambda) - C \sup_{\lambda \geq 0} \lambda |g'(\lambda)| .$$

Démonstration

En utilisant l'équation (12) de l'algorithme et l'estimation (25) du lemme 1, on a

$$|m^{n+1}|_p \leq \left[1 - \nu \inf_{\lambda \geq 0} g(\lambda)\right] |m^n|_p + \nu |\nabla \psi^{n+1}|_p ,$$

$$|\nabla m^{n+1}|_p \leq (1 - \nu C_3) |\nabla m^n|_p + \nu |\nabla(\nabla \psi^{n+1})|_p ;$$

tenant compte de la norme introduite en (22), il vient

$$||m^{n+1}||_p \leq (1 - \nu C_3) ||m^n||_p + \nu |\nabla \psi^{n+1}||_p$$

et le théorème résulte de l'estimation (28) de la proposition 3 ■

6. CONVERGENCE DE L'ALGORITHME

Dans ce paragraphe, on choisit λ_1 dans (10) tel que le prolongement g satisfasse

$$C_4 = \inf_{\lambda \geq 0} g(\lambda) - C \sup_{\lambda \geq 0} \lambda |g'(\lambda)| > 0 \quad ; \tag{30}$$

voir A4.

Proposition 4

Si dans l'algorithme, on impose $0 < \nu < C_2$, alors on a l'estimation

$$||m^n||_p \leq \frac{C u_\infty}{C_4} + ||m^0||_p \quad ; \tag{31}$$

en outre, on peut extraire des sous-suites telles que

$$(32)\qquad \left|\begin{array}{lllll} \psi^{n'+1} \longrightarrow \psi & \text{dans} & W^{2,p}(\Omega) & \text{faible} & , \\ m^{n'} \longrightarrow m & \text{dans} & [W^{1,p}(\Omega)]^2 & \text{faible} & , \\ e^{n'} \longrightarrow e & \text{dans} & [W^{1,p}(\Omega)]^2 & \text{faible} & , \\ \sigma^{n'} \longrightarrow \sigma & \text{dans} & \mathbb{R} & & \end{array}\right.$$

où

$$(33)\qquad e = g(|m|^2)\, m = \nabla\psi \quad , \ \text{div}\, m = 0.$$

Démonstration

Notons $u^n = ||m^n||_p$, $a = (1 - \nu C_4)$, $b = \nu C u_\infty$

à l'aide de l'estimation (29) du théorème 2, u^n vérifie

$$u^1 \leqslant a\, u^o + b$$

$$u^2 \leqslant a\, u^1 + b$$

$$u^{n+1} \leqslant a\, u^n + b$$

en tenant compte du choix de ν , on en déduit grâce à (30)

$$u^n \leqslant a^n\, u^o + b\, \left(\frac{1-a^n}{1-a}\right) \leqslant u^o + \frac{b}{1-a}$$

et (31) en résulte.

En revenant à l'estimation (28) de la proposition 3, on remarque que ψ^{n+1} est borné dans $W^{2,p}(\Omega)$, indépendamment de n et les convergences (32) en résultent à l'aide d'arguments de compacité [7] .

On obtient (33) en passant à la limite dans l'équation (12) de l'algorithme. ■

Théorème 3

Sous l'hypothèse (8), il existe un couple de réels positifs (R_1, u_1) tel que si $R > R_1$ et $u_\infty < u_1$

alors le problème (2)..(5) admet une solution ψ dans $W^{2,p}(\Omega)$.

En outre il existe une constante λ_1 telle que

$$q^2 = \sup_{(x,y) \in \bar{\Omega}} |q(x,y)|^2 \leqslant \lambda_1 < q_c^2$$

Démonstration

Dans l'algorithme, on choisit pour m^o le vecteur de composantes (o,u_∞) alors l'estimation (31) devient

$$||m^n||_p \leq C(1 + \frac{1}{C_4})\ u_\infty \quad ;$$

à l'aide d'un théorème d'injection de Sobolev [7] on peut donc choisir u_∞ tel que

$$\sup_{(x,y)\in\Omega} |m(x,y)| \leq \lambda_1$$

où λ_1 a été introduit en (10) et (30), dans ces conditions g peut être inversée dans (33) et on en tire les équations (2)... (5) ■

Remarque 1

Lorsque le profil est symétrique par rapport à l'axe (ox), alors pour $m^o = (o,u_\infty)$ on a

$$\sigma^{n+1} = 0 \qquad \forall n \geq 0.$$

En effet, on montre par récurrence sur n qu'à chaque étape div e^{n+1} est antisymétrique par rapport à l'axe ox, on en déduit que ψ_1^{n+1} est aussi antisymétrique par rapport à (ox) donc que

$$\psi_1^{n+1} = 0 \quad \text{sur} \quad (ox) \cap \Omega \quad ;$$

il en résulte d'une part grâce à (8) que ψ_1^{n+1} est dans $W^{2,p}(\Omega \cap \{y > 0\})$ et dans $W^{2,p}(\Omega \cap \{y < 0\})$, d'autre part les dérivées de ψ_1^{n+1} se raccordent sur l'axe (ox).

Finalement $\psi_1^{n+1} \in W^{2,p}(\Omega)$ et on déduit de la proposition 1 que $\sigma^{n+1} = 0$ ■

7. ESSAIS NUMERIQUES

Les premiers tests ont été effectués pour l'écoulement incompressible autour du NACA 0012.

L'algorithme (11) (12) est mis en oeuvre par une méthode d'éléments finis d'ordre 1.

Les essais ont été réalisés avec les incidences 0°, 1° et 5°. On peut observer la distribution des vitesses autour du profil et les lignes de courant correspondantes sur les figures situées après la bibliographi

Nous y donnons aussi l'allure de la triangulation utilisée (3360 triangles, 1758 noeuds, 1600 degrés de liberté).

8. CONCLUSION

Dans le cas des écoulements bidimensionnels, la condition de Kutta-Joukowski apparaît comme étant un résultat de régularité.

Lorsque le fluide est incompressible, l'espace des solutions ψ (fonctions de courant) dans $H^1(\Omega)$ est une famille a un paramètre σ (la circulation en atmosphère infinie). Il existe une unique valeur $\bar{\sigma}$ telle que $\psi=\psi(\bar{\sigma})$ appartienne à $W^{2,p}(\Omega)$ et satisfasse la condition de Kutta-Joukowski.

L'écoulement compressible est obtenu comme limite d'une suite de problèmes de type "incompressible" pour lesquels le paramètre σ est convenablement ajusté.

9. APPENDICE

A1. Proposition

Etant donné $f \in L^p(\Omega_o)$, la solution $\xi \in H^1(\Omega_o)$ de

$$\Delta\xi = f \text{ dans } \Omega_o, \quad \xi = 0 \text{ sur } \partial\Omega \quad ,$$

satisfait l'équivalence

$$\xi \in W^{2,p}(\Omega_o) \iff \int_{\Omega_o} \Delta\xi \; u_o \; dx\, dy = 0.$$

Cette proposition résulte de lemmes et de théorèmes dus à [6] et nous allons nous limiter à donner un schéma de la démonstration ; auparavant, introduisons quelques espaces

$$W = W^{2,p}(\Omega_o) \cap H_o^1(\Omega_o) \quad , \quad R = \Delta W,$$

$$N = \left\{ \xi \in L^{p'}(\Omega_o) \quad ; \quad \int_{\Omega_o} \xi\chi \; dx\, dy = 0 \quad \forall \chi \in R \right\}.$$

Schéma de la démonstration (7)

A l'aide d'une estimation a priori dans $W^{2,p}(\Omega_o)$ (p. 16), on remarque que R est fermé dans $L^p(\Omega_o)$ et en utilisant un corollaire du théorème de Hahn-Banach, on en déduit

$$(34) \qquad \xi \in W \iff \forall \chi \in N \quad \int_{\Omega_o} \Delta\, \xi\, \chi \; dx\, dy = 0.$$

Utilisant une formule de Green généralisée (théorème 4, p. 18), on montre (p. 19, 20, 21) que

$$N \subset M = \left\{ \chi \in L^{p'}(\Omega_o) \; ; \; \Delta\chi = 0 \quad , \; \chi = 0 \quad \text{dans } W^{-1+1/p,p'}(\partial\Omega_o) \right\};$$

d'autre part, il résulte du choix des angles aux sommets dans Ω_o que (p. 24, 25, 26) la dimension de M est moindre que 1 et que N est non nul, donc

$$(35) \qquad \text{dimension } N = 1 \quad \text{et} \quad M = N.$$

Enfin, on vérifie que $u_o \neq 0$ est dans M et la proposition résulte de (34) et (35) ■

A2. Proposition

La solution $\tilde{\chi}_1$ du problème aux limites

$$(36) \qquad \tilde{\chi}_1 - \alpha_\infty \operatorname{Log}(x^2 + y^2) \in \tilde{V} \; ,$$

$$\Delta\tilde{\chi}_1 = 0 \quad \text{dans} \quad \tilde{\Omega} \; ,$$

$$\tilde{\chi}_1 = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma \; ,$$

vérifie $\tilde{\chi}_1/_{\Omega_o} \notin W^{2,p}(\Omega_o)$.

(7) Les pages indiquées correspondent à la référence [6].

Démonstration

Le problème considéré admet une solution unique (voir par exemple le cadre fonctionnel dans [5]).

On introduit la fonction

$$\chi = \tilde{\chi}_1 - \alpha_\infty \text{ Log } (x^2 + y^2)$$

et on procède en deux étapes.

1e étape

Les dérivées χ_x, χ_y sont continues dans $\tilde{\Omega}$, en outre $\nabla\chi(x,y) \to 0$ quand $(x,y) \to \infty$.

On introduit une fonction α de classe C^∞ définie sur R^2 à valeurs réelles, nulle au voisinage de $\mathcal{S}$ et identique à 1 lorsqu'on se place à une distance finie de l'origine.

On note

$$\overline{\chi} = \alpha\chi \ , \ \overline{f} = \Delta\,\alpha\,\chi + 2\,\nabla\alpha.\nabla\chi \ ,$$

alors $\overline{\chi}$ est solution de $\Delta\overline{\chi} = \overline{f}$ dans $\mathbb{R}^2$, avec $\overline{\chi}$ dans $\tilde{V}$, $\overline{f}$ dans $L^2(\mathbb{R}^2)$ et à support borné.

A l'aide de résultats classiques de régularité (voir par exemple [9] p. 40), on en conclut que $\overline{\chi}_x$ et $\overline{\chi}_y$ sont dans $H^2(\mathbb{R}^2)$ et la première étape résulte d'un théorème d'injection de Sobolev [10].

2e étape

Si $\tilde{\chi}_1/\Omega_o \in W^{2,p}(\Omega_o)$ on aboutit à une contradiction.

Supposons que $\tilde{\chi}_1/\Omega_o$ soit dans $W^{2,p}(\Omega_o)$, alors en utilisant un théorème d'injection de Sobolev [7], on en déduit que $\tilde{\chi}_1$ a ses dérivées premières continues dans $\overline{\tilde{\Omega}}$, finalement tenant compte de la première étape, $\tilde{\chi}_1$ satisfait aux conditions :

$$\Delta\tilde{\chi}_1 = 0 \quad \text{dans } \tilde{\Omega},$$
$$\tilde{\chi}_1 = 0 \quad \text{sur } \Gamma \ ,$$
$$\tilde{\chi}_{1x} \text{ et } \tilde{\chi}_{1y} \text{ sont continues sur } \overline{\tilde{\Omega}} \ ,$$
$$\nabla\tilde{\chi}_1(x,y) \longrightarrow 0 \quad \text{quand} \quad (x,y) \longrightarrow \infty \ ;$$

il en résulte que $\tilde{\chi}_1$ est identiquement nulle (voir par exemple [2] p. 446) et à l'aide de (36) $\mathrm{Log}(x^2+y^2)$ est dans $\tilde{V}$, ce qui est impossible ■

A3. Proposition

Etant donné $f \in L^p(\Omega)$ et $\ell \in W^{2-1/p,p}(\Gamma_\infty)$, alors pour $\xi \in W^{2,p}(\Omega)$ solution variationnelle dans $H^1(\Omega)$ de

$$\Delta\xi = f \text{ dans } \Omega \ ,$$
$$\xi = 0 \text{ sur } \Gamma, \quad \xi = \ell \text{ sur } \Gamma_\infty \ ;$$

on a l'estimation a priori

$$||\xi||_{W^{2,p}(\Omega)} \leqslant C\left[\, |f|_{L^p(\Omega)} + |\ell|_{W^{2-1/p,p}(\Gamma_\infty)} \,\right].$$

Démonstration

On procède par partition de l'unité. Au voisinage de T, l'estimation a été obtenue dans [11] p. 89 ; au voisinage des autres points, l'estimation est démontrée dans [12] ■

A4. Rappelons que pour $\lambda \in [0,1]$ on définit

$$\rho(\lambda) = \rho_0(1-\lambda)^\alpha \qquad \text{avec} \quad \alpha = \frac{1}{\gamma-1}$$

Lemme

Etant donné une constante $C > 2$, alors ρ admet au-delà de $\lambda_1 = \frac{1}{1+\alpha C}$ un C^1-prolongement g, décroissant, qui satisfait aux conditions

$$g(\lambda) = \rho(\lambda) \qquad \text{pour} \quad \lambda \leqslant \lambda_1 \ ,$$
$$g(\lambda) \geqslant 0 \qquad \text{pour} \quad \lambda_1 \leqslant \lambda \leqslant \lambda_1(1+\varepsilon) \ ,$$
$$g'(\lambda) = 0 \qquad \text{pour} \quad \lambda_1(1+\varepsilon) \leqslant \lambda \ ;$$

$$C_4 = \inf_{\lambda \geqslant 0} g(\lambda) - C \sup_{\lambda \geqslant 0} \lambda|g'(\lambda)| \geqslant \rho(\lambda_1) - (C+\varepsilon)\,\lambda_1|\rho'(\lambda_1)| > 0$$

où $\varepsilon > 0$ est choisi arbitrairement.

Démonstration

On va montrer que g peut être pris décroissant de classe C^1 et satisfaisant aux conditions :

$$(37)\qquad \lambda_1 < \frac{1}{1+\alpha C} \Longrightarrow \left| \begin{array}{l} \inf\limits_{0\leqslant\lambda\leqslant\lambda_1} g(\lambda) = \rho(\lambda_1)\ , \\ \sup\limits_{0\leqslant\lambda\leqslant\lambda_1} \lambda|g'(\lambda)| = \lambda_1\,|\rho'(\lambda_1)|\ ; \end{array} \right.$$

pour μ_1 suffisamment proche de λ_1

$$(38)\qquad \mu_1 > \lambda_1 \Longrightarrow \left| \begin{array}{l} \inf\limits_{\lambda_1\leqslant\lambda\leqslant\mu_1} g(\lambda) = g(\mu_1)\ , \\ \sup\limits_{\lambda_1\leqslant\lambda\leqslant\mu_1} \lambda|g'(\lambda)| = \lambda_1\,|\rho'(\lambda_1)|\ , \\ g(\mu_1) - C\ \lambda_1|\rho'(\lambda_1)| > 0\ ; \end{array} \right.$$

$$(39)\qquad \lambda \geqslant \mu_1 \Longrightarrow g(\lambda) = g(\mu_1) > 0\ ;$$

étant décroissante on aura :

$$C_4 = g(\mu_1) - C\ \lambda_1|\rho'(\lambda_1)| > 0$$

et posant $\mu_1 = (1+\varepsilon)\ \lambda_1$, on obtiendra à l'aide de la formule des accroissements finis

$$C_4 \geqslant \rho(\lambda_1) - \varepsilon\lambda_1|g'(\lambda)| - C\,\lambda_1|\rho'(\lambda_1)|$$

avec $\lambda_1 < \lambda < (1+\varepsilon)\ \lambda_1$

et $|g'(\lambda)|$ étant décroissante, le lemme en résultera.

Il reste à montrer (37), (38) (39) ; il vient

$$\frac{d}{d\lambda}\left[\lambda|\rho'(\lambda)|\right] > 0 \quad \text{pour} \quad \lambda \leqslant \lambda_1 < \frac{1}{\alpha}$$

et (37) en résulte. D'autre part, on a :

$$(40)\qquad \rho(\lambda_1) - C\ \lambda_1\,|\,\rho'(\lambda_1)| > 0 \qquad \text{pour} \quad \lambda_1 < \frac{1}{1+\alpha C}$$

Pour $\mu_1 > \lambda_1$ assez petit, on choisit $g(\lambda)$ polynomiale de degré deux pour $\lambda\in[\lambda_1, \mu_1]$ et vérifiant :

$$(41)\qquad \left|\begin{array}{l} g(\lambda_1) = \rho(\lambda_1) \quad , \quad g(\mu_1) > 0 \quad , \\ g'(\lambda_1) = \rho'(\lambda_1) \quad , \quad g'(\mu_1) = 0 \quad , \\ g(\lambda) \quad \text{et} \quad \lambda|g'(\lambda)| \quad \text{décroissantes} \end{array}\right.$$

Finalement, (38) et (39) résultent de (40) (41) ■

BIBLIOGRAPHIE

[1] J.F. CIAVALDINI, M. POGU, G. TOURNEMINE,
Comptes-rendus, 285 A, 1977, p. 297.

[2] L.BERS,
C.P.A.M. Vol. 7, 1954, p. 441-504.

[3] R.FINN et D. GILBARG,
C.P.A.M. Vol. 10, 1957, p. 23-63.

[4] M. SHIFFMAN,
J. Rat. Mech. Analysis, Vol. 1, 1952, p. 605-652.

[5] J.F. CIAVALDINI, M. POGU, G. TOURNEMINE,
J. de Mécanique, Vol. 16, 1977, p. 257-288.

[6] P. GRISVARD,
Séminaire d'analyse numérique de Lyon. Saint Etienne, Mai 1976.

[7] J. NECAS,
Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques,
Masson, Paris 1967.

[8] M. DJAOUA,
Thèse de troisième cycle, Paris VI, Juin 1977.

[9] J. GIROIRE,
Rapport interne à l'Ecole Polytechnique, Centre de Mathématiques
Appliquées, Mars 1976.

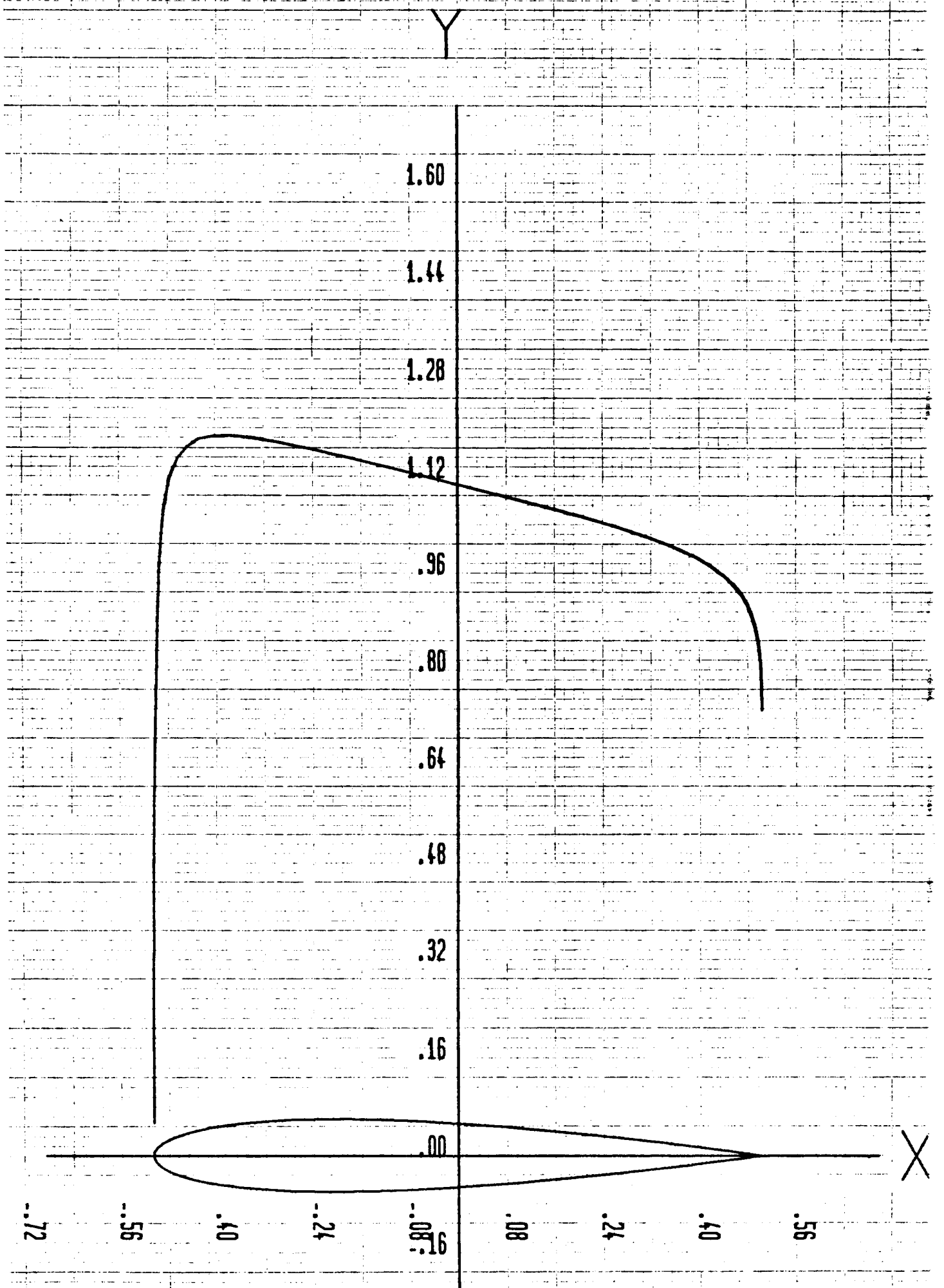
[10] J.L. LIONS,
Problèmes aux limites dans les équations aux dérivées partielles,
Les presses de l'université de Montréal, 1962.

[11] M. MERIGOT,
Thèse d'Etat, Nice, Septembre 1974.

[12] S. AGMON, A. DOUGLIS, L. NIRENBERG,
C.P.A.M., Vol. 12, 1959, p. 623-727.

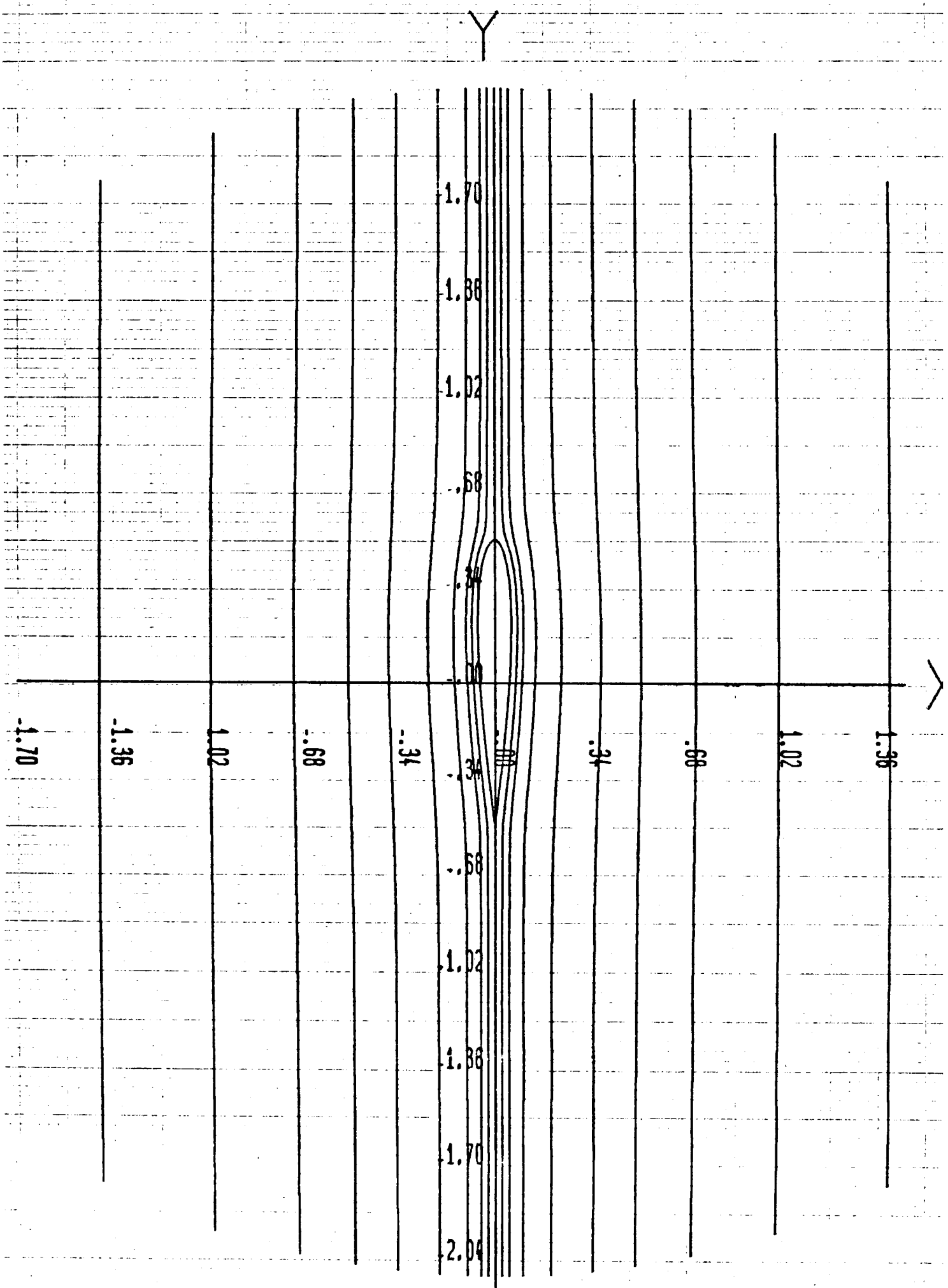
NACA 0012 A=0

FIGURE 1



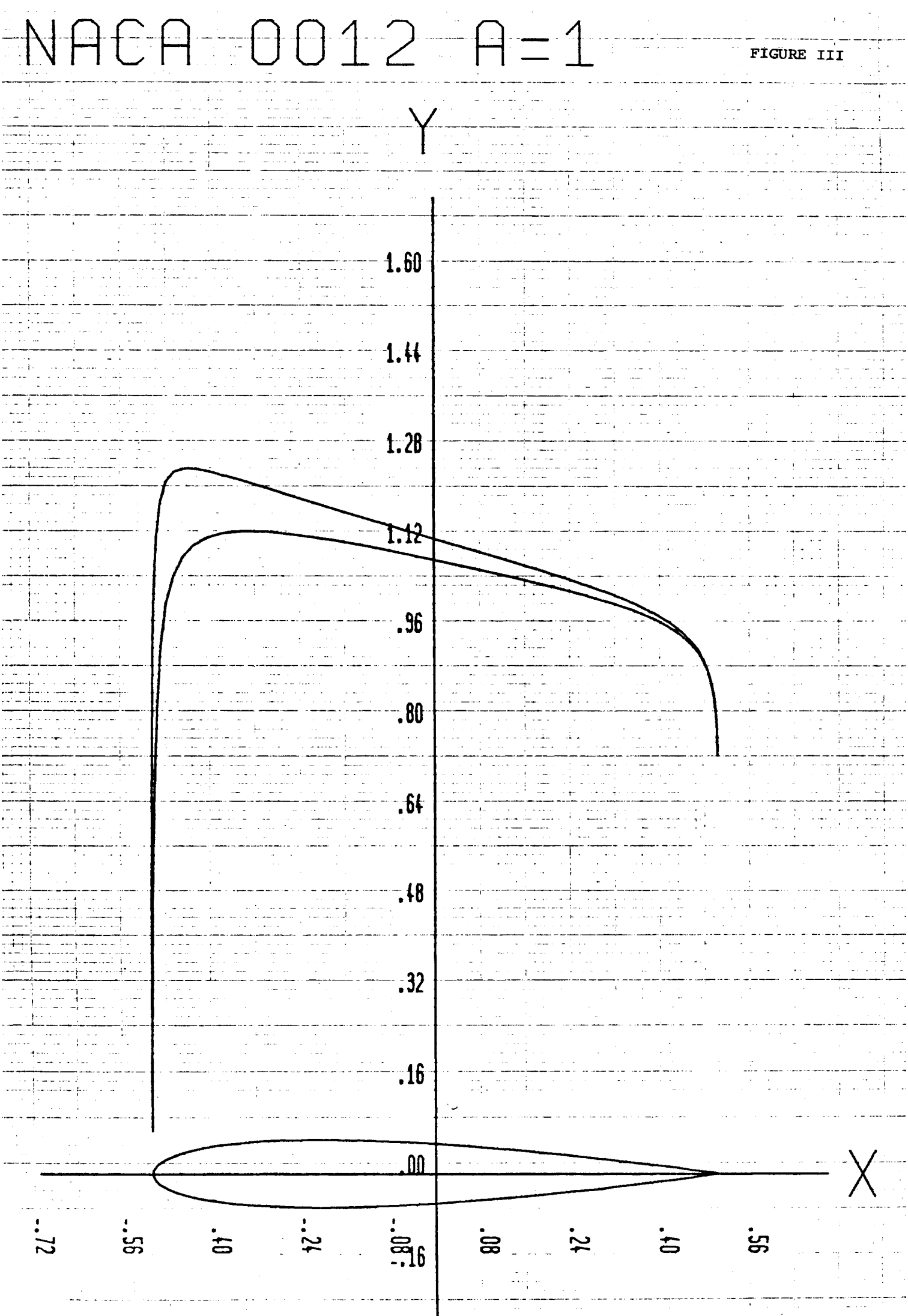
NACA 0012 A=0

FIGURE II



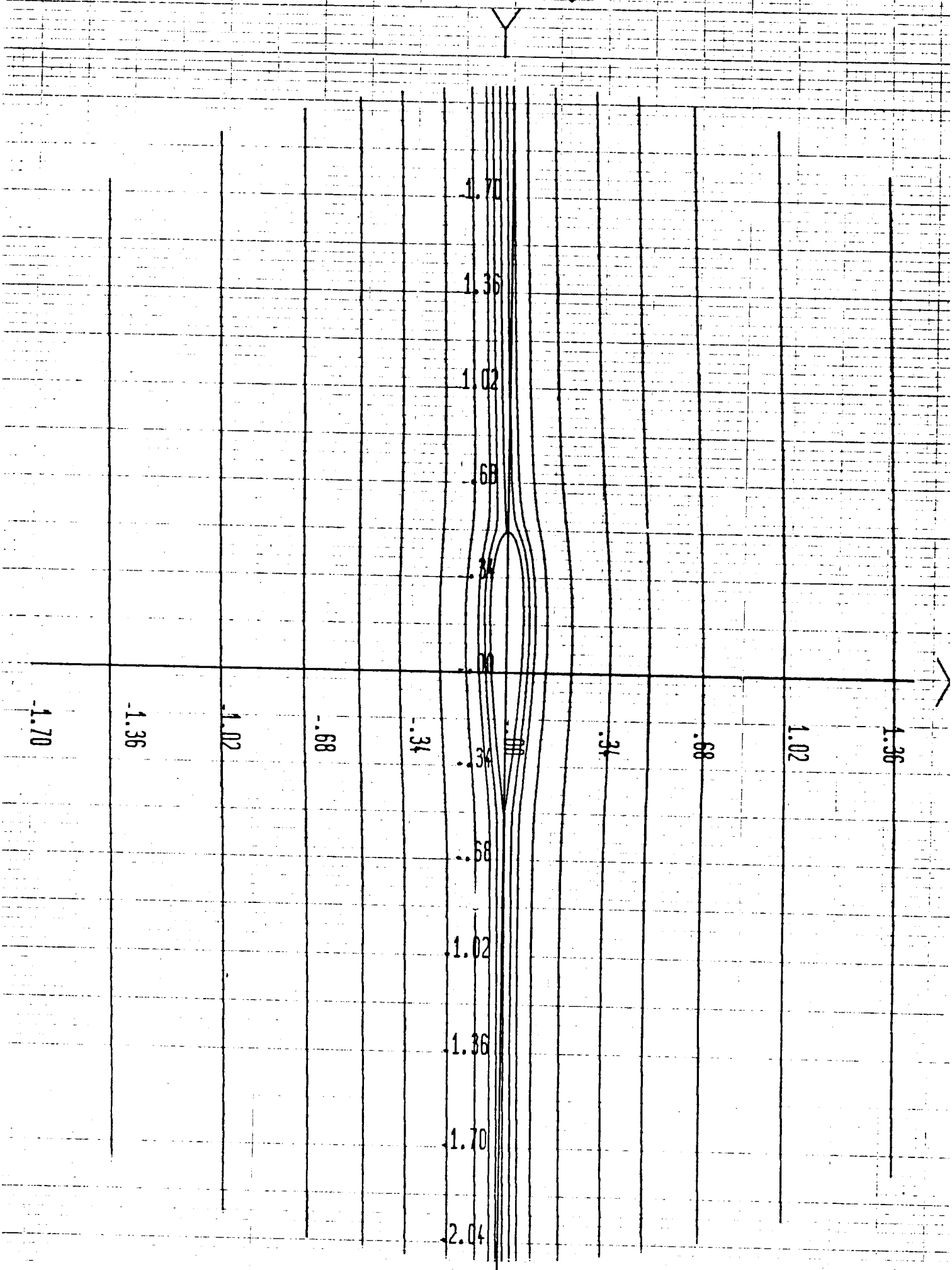
NACA 0012 A=1

FIGURE III



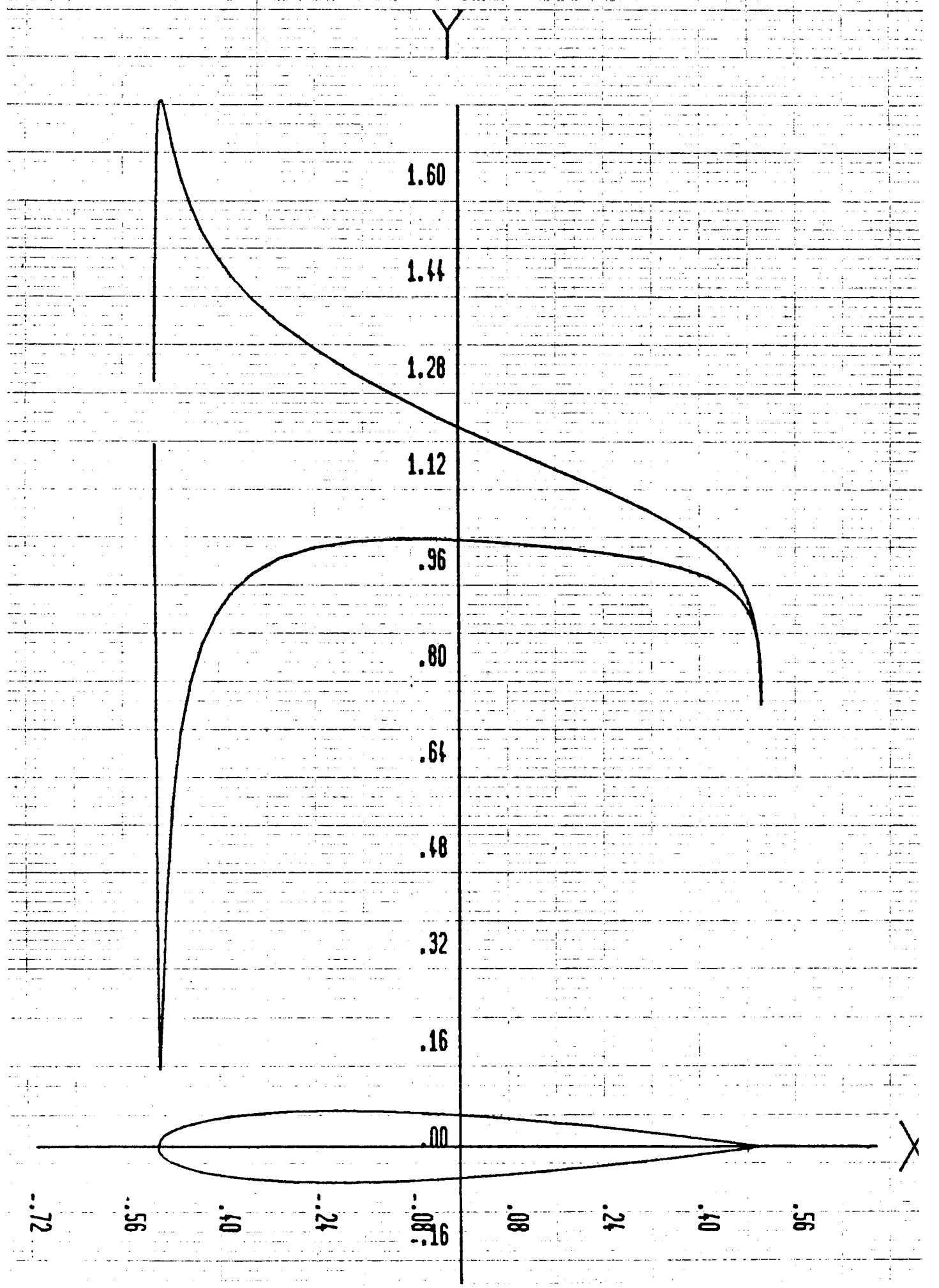
NACA 0012 A=1

FIGURE IV



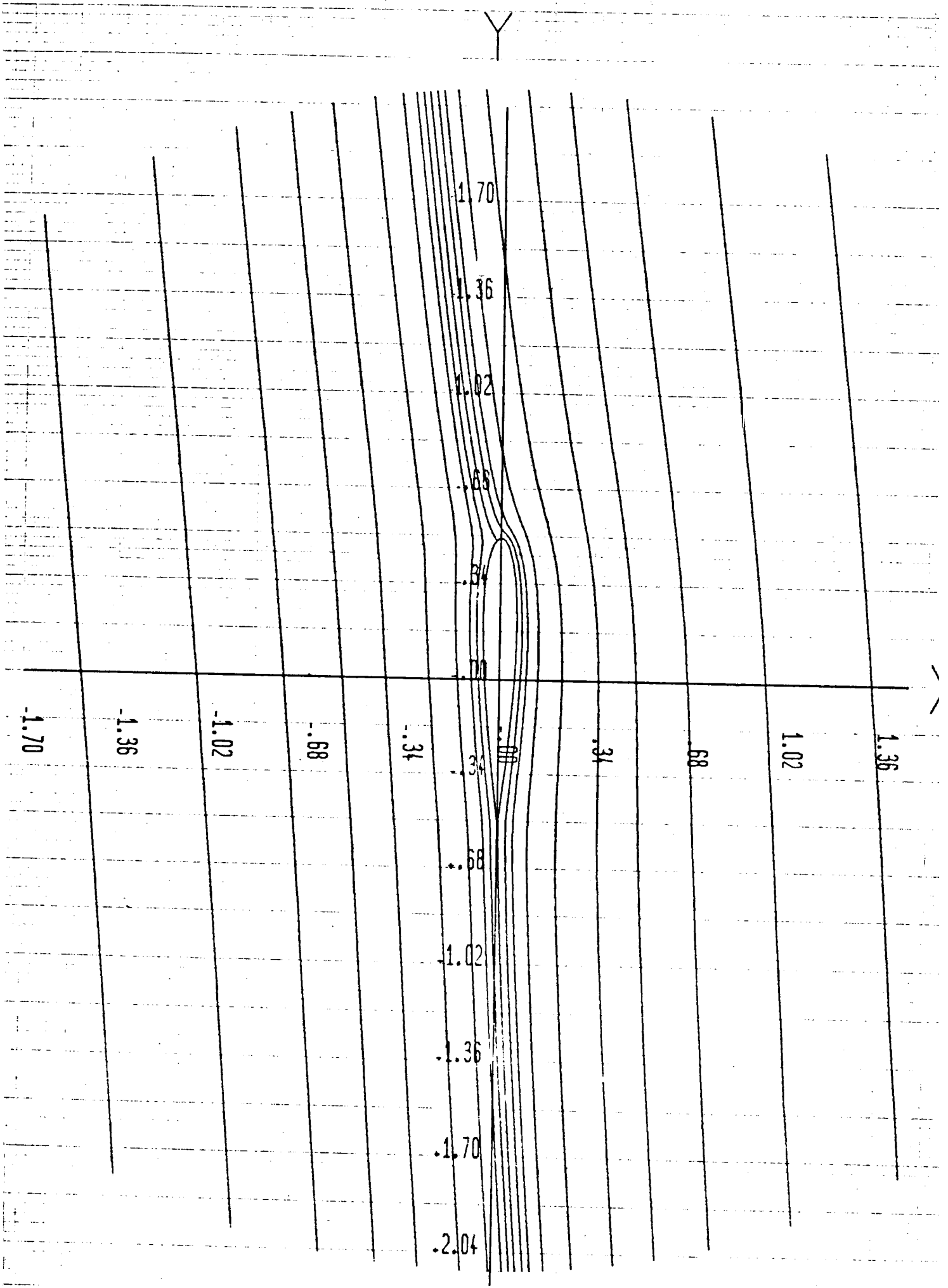
NACA 0012 A=5

FIGURE V



NACA 0012 A=5

FIGURE VI



NACA 0012

FIGURE VII

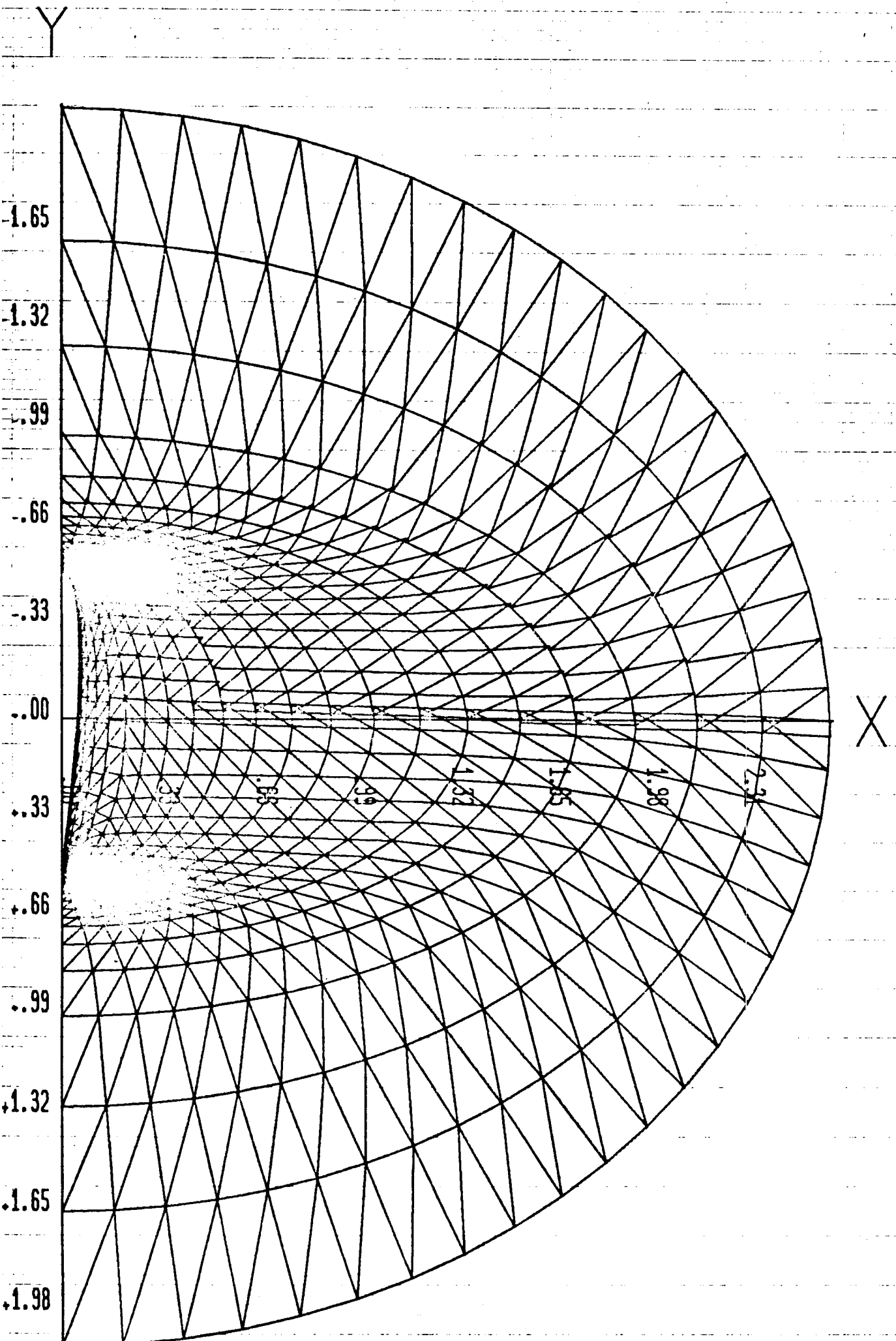


FIGURE VIII

NACA 0012 NEZ

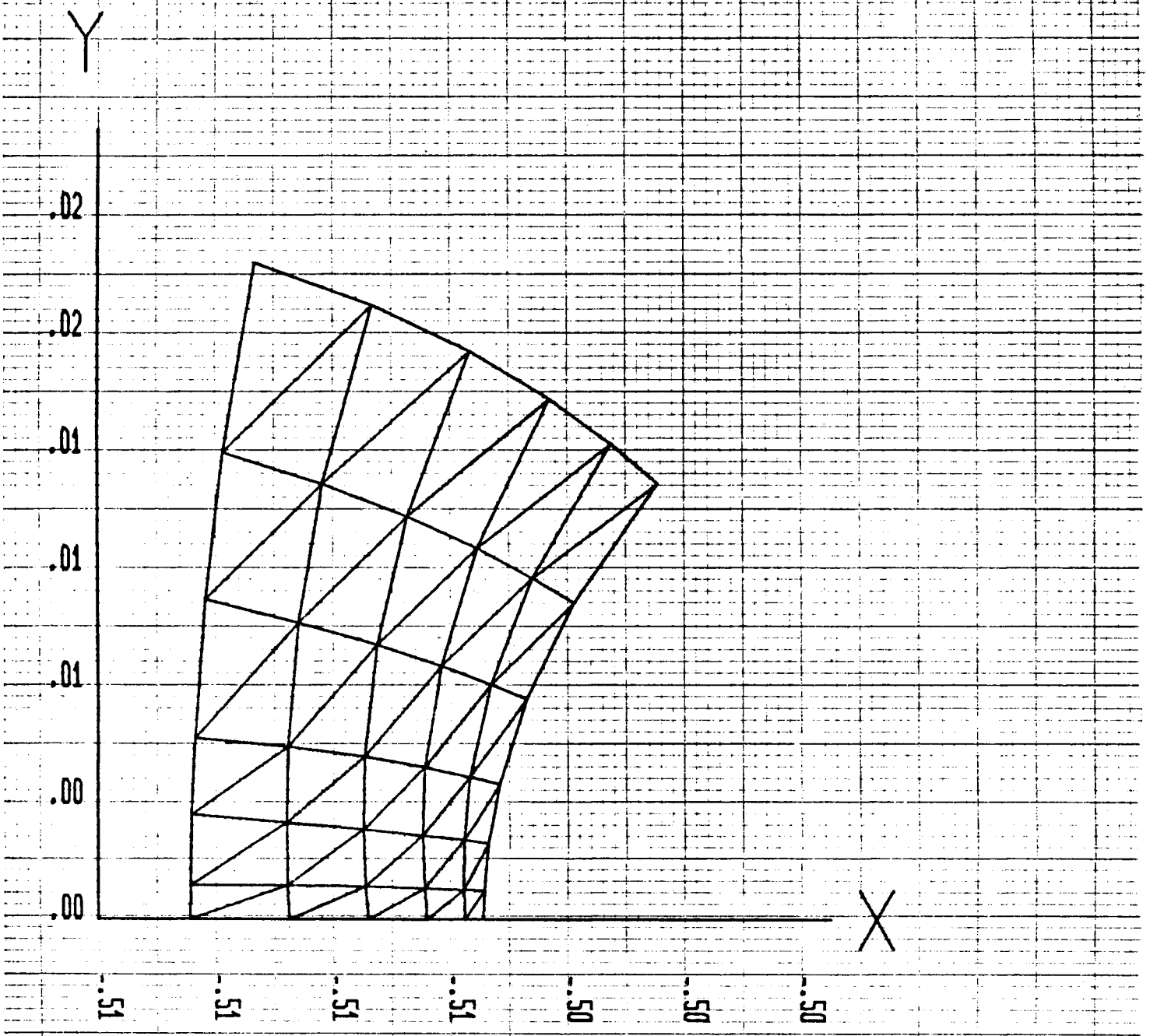
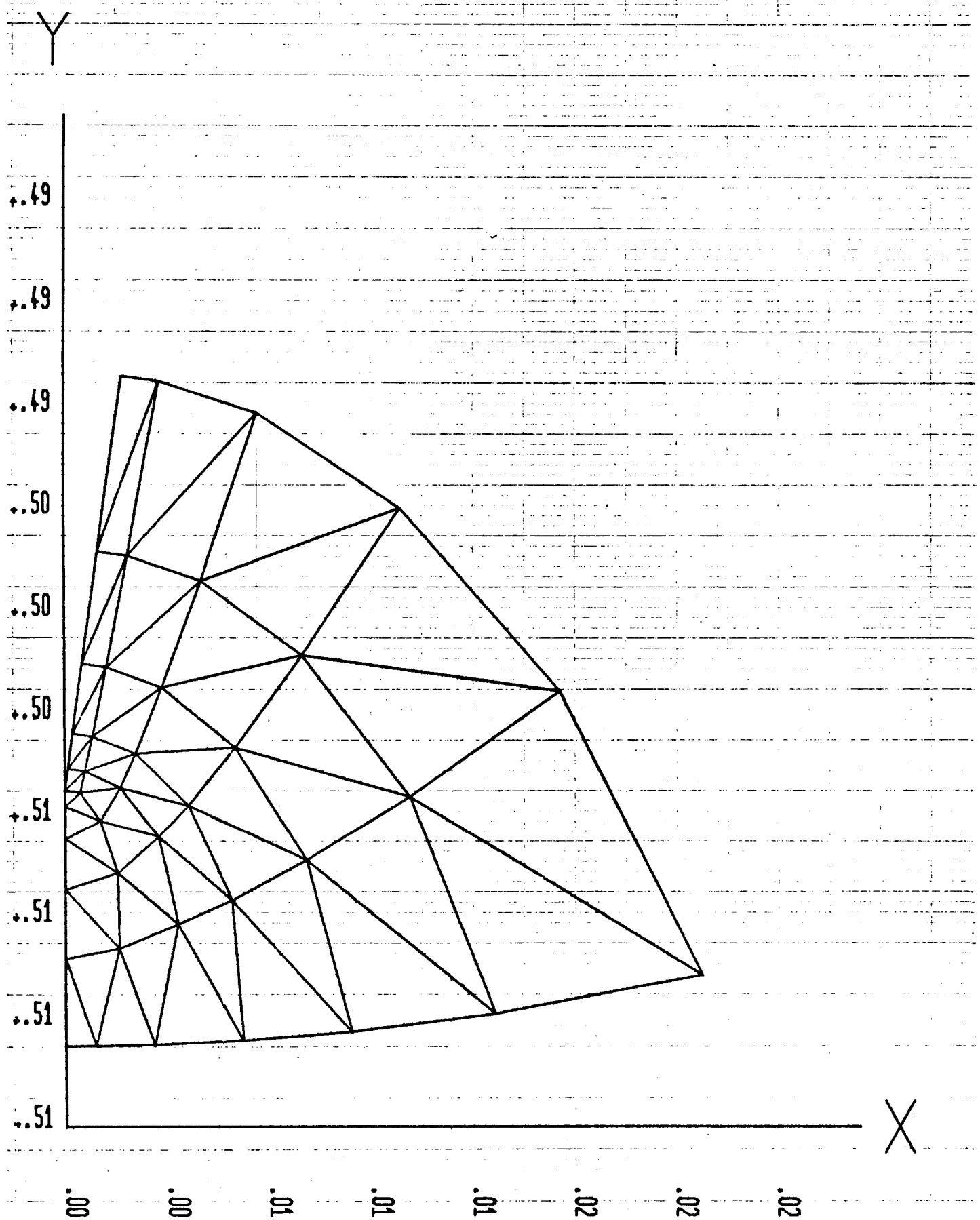


FIGURE IX

NACA 0012 QUEUE