M. Crouzeix

A. Y. Le Roux

Écoulement d'un fluide irrotationnel

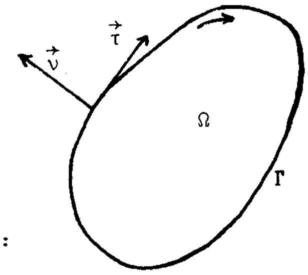
Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1976, fascicule S5
« Journées « éléments finis » », , p. 1-8
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1976___S5_A9_0>

ECOULEMENT D'UN FLUIDE IRROTATIONNEL

M. CROUZEIX ; A.Y. LE ROUX

LE PROBLEME THEORIQUE

Soit Ω un ouvert borné, convexe, de $\mathbb{R}^2$. Sa frontière Γ est supposée de classe C^∞. On note $\vec{\nu}$ la normale unitaire extérieure à Γ , et $\vec{\tau}$ sa tangente unitaire, de telle façon que le repère $(\vec{\tau},\vec{\nu})$ soit direct.



Etant donné $f \in L^2(\Omega)$, $g \in H^{1/2}(\Gamma)$, on cherche une solution $\vec{u} \in (H^1(\Omega))^2$ solution du problème :

(1) $\quad \operatorname{div} \vec{u} = f \;;\quad \operatorname{rot} \vec{u} = 0 \;;\quad \vec{u}.\vec{\nu} = g$ sur Γ .

Pour assurer l'existence d'une solution de (1), il est nécessaire d'imposer une condition de comptabilité entre f et g :

(2) $$\int_\Omega f\,dx = \int_\Gamma g\,ds$$

Théorème 1 : Soit $s \geq 0$; si $f \in H^s(\Omega)$ et $g \in H^{s+1/2}(\Gamma)$ vérifient (2), alors le problème (1) admet une solution qui appartient à $H^{s+1}(\Omega)$.

Démonstration:

Le problème de Neumann : $\Delta p = f$; $\dfrac{\partial p}{\partial \nu} = g$ sur Γ ; admet une solution unique $p \in H^{s+2}(\Omega)$; il suffit de poser $\vec{u} = \overrightarrow{\operatorname{grad}}\, p$. ∎

Pour mettre (1) sous forme variationnelle, on utilise la formule de Green :

(3) $$\int_\Omega (\overrightarrow{\operatorname{grad}}\,\vec{u},\overrightarrow{\operatorname{grad}}\,\vec{v})\,dx + \int_\Gamma \frac{\vec{u}.\vec{v}}{R}\,ds = \int_\Omega (\operatorname{div}\vec{u}.\operatorname{div}\vec{v} + \operatorname{rot}\vec{u}.\operatorname{rot}\vec{v})\,dx + \int_\Gamma \left(\frac{\partial \vec{u}.\vec{\nu}}{\partial s}\,.\vec{v}.\vec{\tau} - \frac{\partial \vec{u}.\vec{\tau}}{\partial s}\,.\vec{v}.\vec{\nu}\right) ds,$$

où R est le rayon de courbure, mesuré dans le sens contraire à la normale extérieure $\vec{\nu}$, donc positif, puisque Ω est supposé convexe, et où l'intégration sur Γ est faite dans le sens de la tangente. On introduit la forme bilinéaire :

(4) $$a(\vec{u},\vec{v}) = \int_\Omega (\overrightarrow{\operatorname{grad}}\,\vec{u},\ \overrightarrow{\operatorname{grad}}\,\vec{v})\,dx + \int_\Gamma \frac{\vec{u}.\vec{v}}{R}\,ds\ ,$$ qui est coercive* et continue sur :

(5) $$W_0 = \{ \vec{v} \in (H^1(\Omega))^2 \;;\; \vec{v}.\vec{\nu} = 0 \text{ sur } \Gamma \}$$

muni de la norme : $|\vec{v}|_{1,\Omega} = |\overrightarrow{\operatorname{grad}}\,\vec{v}|_{(L^2(\Omega))^4}$, et on considère le problème :

Chercher $\vec{u} \in (H^1(\Omega))^2$, tel que :

(6) $\quad \vec{u}.\vec{\nu} = g$ sur Γ

(7) $$\forall \vec{v} \in W_0 \qquad a(\vec{u},\vec{v}) = \int_\Omega f \operatorname{div}\vec{v}\,dx + \int_\Gamma \frac{dg}{ds}\,\vec{v}.\vec{\tau}\,ds$$

D'après le lemme de Lax-Milgram, ce problème admet une solution unique $\vec{u} \in (H^1(\Omega))^2$, et si $\vec{u}$ est solution de (1), $\vec{u}$ est aussi solution de (6), (7), d'où l'unicité pour (1) :

* *l'hypothèse de convexité n'est pas indispensable.*

Théorème 2 : Le problème (6), (7) admet une solution unique $u \in (H^1(\Omega))^2$, et les problèmes (1) et (6), (7) sont équivalents.

LE PROBLEME APPROCHE

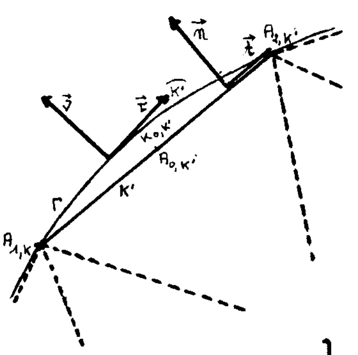
On définit un ouvert Ω_h inclus dans Ω, de frontière Γ_h polygonale telle que, une triangulation régulière $\mathcal{C}_h$ de Ω_h étant fixée, les sommets de triangle situés sur Γ_h soient aussi situés sur Γ. Le paramètre $h > 0$ désigne le plus grand diamètre de triangle de $\mathcal{C}_h$ et est destiné à tendre vers zéro. On définit les espaces de dimension finie :

(8) $$W_h = \{\vec{v}_h \in [L^2(\Omega_h)]^2 \ ; \ \forall K \in \mathcal{C}_h,\ \vec{v}_h \in P_1(K)^2 \ ; \ \vec{v}_h \text{ continue aux milieux des côtés }\},$$

(9) $$W_{h,0} = \{\vec{v}_h \in W_h \ ; \ \vec{v}_h.\vec{n} = 0 \quad \text{aux milieux des côtés situés sur } \Gamma_h\ \},$$

où $\vec{n}$ désigne la normale extérieure unitaire d'un triangle ; on notera $\vec{t}$ son vecteur tangent unitaire, tel que le repère $(\vec{t},\vec{n})$ soit direct.

Etant donné un côté de triangle K', situé sur la frontière Γ_h, on note $A_{0,K'}$ son milieu, $A_{1,K'}$ et $A_{2,K'}$ ses extrémités, dans le sens de $\vec{t}$, $K_{0,K'}$ l'ouvert limité par K' et Γ, et $\ell_{K'}$ sa longueur. On pose :



(10) $$g_h(A_{0,K'}) = \frac{1}{\ell_{K'}} \left\{ \int_{\widehat{K'}} g \, ds - \int_{K_{0,K'}} f \, dx \right\} ,$$

en notant par $\widehat{K'}$ la partie de Γ limitée par $A_{1,K'}$ et $A_{2,K'}$, et on définit la variété affine :

(11) $$V_h(f,g) = \left\{ \vec{u}_h \in W_h \ ; \ \forall K \in \mathcal{C}_h \ \operatorname{div} \vec{u}_h\Big|_K = m_K(f) ;\ \operatorname{rot} \vec{u}_h\Big|_K = 0 ;\ \forall K' \subset \Gamma_h \vec{u}_h(A_{0,K'}).\vec{n} = g_h(A_{0,K'}) \right\} ,$$

où $m_K(f)$ représente la moyenne de f sur le triangle K :

(12) $$m_K(f) = \int_K f \, dx \Big/ \int_K dx \ .$$

De la même façon, on note $m_{K'}$ l'opérateur "moyenne" sur un côté de triangle K'.

Sur $K' \subset \Gamma_h$, on approche le rayon de courbure R par une constante positive $R_{K'}$ définie par :

(13) $$\frac{1}{R_{K'}} = \frac{1}{\ell_{K'}^2} \cdot \left(\vec{\nu}(A_{2,K'})\right) \cdot (A_{1,K'}, A_{2,K'})$$

La forme bilinéaire $a(\vec{u},\vec{v})$ est approchée par :

(14) $$a_h(\vec{u},\vec{v}) = \sum_{K \in \mathcal{C}_h} \int_K (\overrightarrow{\operatorname{grad}}\, \vec{u},\ \overrightarrow{\operatorname{grad}}\, \vec{v})\, dx + \sum_{K' \subset \Gamma_h} \frac{1}{R_{K'}} \ m_{K'}(\vec{u}.\vec{t}) . m_{K'}(\vec{v}.\vec{t}) \ell_{K'} \ ,$$

définie, continue et coercive sur $W_{h,0}$ muni de la norme :

(15) $$||\vec{u}_h||_h = \left(\sum_{K \in \mathcal{C}_h} \int_K |\overrightarrow{\operatorname{grad}}\, \vec{u}_h|^2 \, dx \right)^{1/2} .$$

Sur $K' \subset \Gamma$, on approche $\frac{dg}{ds}$ par la constante :

(16) $$\nabla_{K'} g = \frac{1}{\ell_{K'}} \left(g(A_{2,K'}) - g(A_{1,K'}) \right) .$$

On considère le problème approché, où : $V_{h,O} = V_h(O,O)$:

(17) Chercher $\vec{u}_h \in V_h(f,g)$; $\forall \vec{v}_h \in V_{h,O}$ $\quad a_h(\vec{u}_h,\vec{v}_h) = \sum_{K' \subset \Gamma_h} \nabla_{K'} g \cdot m_{K'}(\vec{v}_h \cdot \vec{t}) \cdot \ell_{K'}$.

Si on connaît un élément $\vec{w}_h \in V_h(f,g)$, alors $\vec{u}_h' = \vec{u}_h - \vec{w}_h \in V_{h,O}$ et vérifie :

(18) $\forall v_h \in V_{h,O}$ $\quad a_h(\vec{u}_h' , \vec{v}_h) = \sum_{k' \subset \Gamma_h} \nabla_{k'} g \cdot m_{K'}(\vec{v}_h \cdot \vec{t}) \cdot \ell_{K'} - a_h(\vec{w}_h,\vec{v}_h)$,

problème qui admet une solution unique.

<u>MAJORATION DE L'ERREUR, EN NORME</u> $||\cdot||_h$

Si $f \in H^1(\Omega)$ et $g \in H^{3/2}(\Gamma)$, on sait que : $\vec{u} \in (H^2(\Omega))^2$. On fait cette hypothèse de régularité, et on construit un opérateur de projection r_h, défini sur $(H^2(\Omega))^2$ et à valeur dans W, et pour lequel $r_h\vec{u} \in V_h(f,g)$ dès que $\vec{u}$ est solution de (1), ou de (6), (7).

Soit $K \in \mathcal{C}_h$; pour chaque côté K' de K, on pose, étant donné $\vec{u} \in (H^2(\Omega))^2$,

(19) $$r_h\vec{u}\ (A_{O,K'}) = \frac{1}{\ell_{K'}} \int_{K'} \vec{u}\, ds \ \left(= m_{K'}(\vec{u})\right) ,$$

puis on interpole linéairement sur chaque triangle. On a alors :

<u>Théorème 3</u> : Si $\vec{u} \in (H^2(\Omega))^2$, alors :

(20) $$||\vec{u} - r_h\vec{u}||_h \leqslant \left(C\, h\, |\vec{u}|_{2,\Omega_h} \leqslant\right) C\, h\, |\vec{u}|_{2,\Omega} ,$$

et si $\vec{u}$ vérifie (1), ou (6), (7) : $\quad r_h\vec{u} \in V_h(f,g)$.

<u>Démonstration</u>

La majoration (20) s'obtient en utilisant le lemme de Bramble-Hilbert sur chaque triangle, comme dans [1] :

(21) $$||\vec{u}- r_h u||_h^2 = \sum_{k \in \mathcal{C}_h} |u - r_h u|_{1,K}^2 \leqslant \sum_{k \in \mathcal{C}_h} C^2h^2\, |u|_{2,K}^2 \leqslant \left(C\, h\, |u|_{2,\Omega_h}\right)^2 .$$

Soit $K \in \mathcal{C}_h$: div $(r_h\vec{u}|_K)$ est constant, et égal à $m_K(f)$, en appliquant une formule de Green ; de la même façon rot $(r_h\vec{u}|_K)$ est nul. Enfin, si $K' \subset \Gamma_h$, $r_h\vec{u}(A_{O,K'}).\vec{n}$ est égal à la moyenne $m_{K'}(\vec{u}.\vec{n})$, c'est-à-dire $g_h(A_{O,K'})$. ∎

Cet opérateur de projection permet d'établir une première estimation de l'erreur commise en approchant $\vec{u}$, solution de (1) ou de (6), (7), par $\vec{u}_h$, solution de (17) :

<u>Théorème 4</u> : On suppose que la solution $\vec{u}$ de (1) appartient à $(H^2(\Omega))^2$, alors

(22) $$a_h(\vec{u} - \vec{u}_h, \vec{u} - \vec{u}_h) \leqslant C\, h^2||\vec{u}||_{2,\Omega}^2 .$$

<u>Démonstration</u>

On a $\left[a_h(\vec{u}-\vec{u}_h,\vec{u}-\vec{u}_h)\right]^{1/2} \leqslant \left[a_h(\vec{u}-r_h\vec{u},\vec{u}-r_h\vec{u})\right]^{1/2} + \left[a_h(\vec{u}_h-r_h\vec{u},\vec{u}_h-r_h\vec{u})\right]^{1/2}$,

or $\left[a_h(\vec{u}-r_h\vec{u},\vec{u}-r_h\vec{u})\right]^{1/2} = ||\vec{u}-r_h\vec{u}||_h$; compte-tenu du théorème 3, il nous suffit de majorer

$a_h(\vec{u}_h-\vec{r}_h u,\vec{u}_h-\vec{r}_h u)$; posons $\vec{v}_h = \vec{u}_h-\vec{r}_h u$, on a $\vec{v}_h \in V_{h,0}$

$$a_h(\vec{u}_h-\vec{r}_h u,\vec{u}_h-\vec{r}_h u) = a_h(\vec{u}_h,\vec{v}_h) - a_h(\vec{u},\vec{v}_h) + a_h(\vec{u}-\vec{r}_h u,\vec{v}_h)$$

(23) $$a_h(\vec{v}_h,\vec{v}_h) = a_h(\vec{u}-\vec{r}_h u,\vec{v}_h) + \sum_{K'\subset\Gamma_h} \nabla_{K'} g\, m_{K'}(\vec{v}_h.\vec{t})\ell_{K'}$$
$$- \sum_{K\in\mathcal{C}_h}\int_K \vec{\text{grad}}\,\vec{u}\ \vec{\text{grad}}\,\vec{v}_h dx - \sum_{K'\subset\Gamma_h} \frac{1}{R_{K'}} m_{K'}(\vec{u}.\vec{t})m_{K'}(\vec{v}_h.\vec{t})\ell_{K'},$$

et on utilise sur chaque triangle la formule de Green :

(24) $$\int_K \vec{\text{grad}}\,\vec{u}\ \vec{\text{grad}}\,\vec{v}_h dx = \int_K (\text{div}\,\vec{u}\ \text{div}\,\vec{v}_h + \text{rot}\,\vec{u}\ \text{rot}\,\vec{v}_h)dx +$$
$$+ \int_{\partial K}\left\{\left(\frac{\partial\vec{u}}{\partial n}.\vec{n} - \text{div}\,\vec{u}\right)\vec{v}_h.\vec{n} + \left(\frac{\partial\vec{u}}{\partial n}.\vec{t} + \text{rot}\,\vec{u}\right)\vec{v}_h.\vec{t}\right\} ds$$

avec $\text{div}\,\vec{u} = f$, $\text{rot}\,\vec{u} = \text{rot}\,\vec{v}_h = \text{div}\,\vec{v}_h = 0$, il reste :

(25) $$a_h(\vec{v}_h,\vec{v}_h) = a_h(\vec{u}-\vec{r}_h u,\vec{v}_h) + \sum_{K'\subset\Gamma_h}\left(\nabla_{K'} g - \frac{1}{R_{K'}} m_{K'}(\vec{u}.\vec{t})\right) m_{K'}(\vec{v}_h.\vec{t})\ell_{K'} - \sum_{K\in\mathcal{C}_h}\int_{\partial K}\left(\frac{\partial\vec{u}}{\partial n} - f\vec{n}\right).\vec{v}_h ds,$$

On a :

(26) $$\sum_{K\in\mathcal{C}_h}\int_{\partial K}\left(\frac{\partial\vec{u}}{\partial n} - f\vec{n}\right)\vec{v}_h ds = \sum_K\sum_{K'\subset\partial K}\int_{K'}\left(\frac{\partial\vec{u}}{\partial n} - f\vec{n}\right)\left(\vec{v}_h - m_{K'}(\vec{v}_h)\right)ds + \sum_{K'\subset\Gamma_h}\int_{K'}\frac{\partial\vec{u}.\vec{t}}{\partial n} m_{K'}(\vec{v}_h.\vec{t})ds$$

par utilisation du lemme de Bramble-Hilbert, on obtient

(27) $$\left|\sum_K\sum_{K'\subset\partial K}\int_{K'}\left(\frac{\partial\vec{u}}{\partial n} - f\vec{n}\right)\left(\vec{v}_h - m_{K'}(\vec{v}_h)\right)\right| \leq C\,h\,||\vec{v}_h||_h\,|\vec{u}|_{2,\Omega} \leq C\,h\,a_h(v_h,v_h)^{1/2}\,|\vec{u}|_{2,\Omega},$$

par ailleurs :

$$a_h(\vec{u}-\vec{r}_h u,\vec{v}_h) \leq a_h(\vec{u}-\vec{r}_h u,\vec{u}-\vec{r}_h u)^{1/2}.\ a_h(\vec{v}_h,\vec{v}_h)^{1/2} = ||\vec{u}-\vec{r}_h u||\ a_h(\vec{v}_h,\vec{v}_h)^{1/2}.$$

Il reste donc à majorer dans (25) :

$$\Phi = \sum_{K'\subset\Gamma_h}\left(\nabla_{K'} g - \frac{1}{R_{K'}} m_{K'}(\vec{u}.\vec{t}) - \frac{1}{\ell(K')}\int_{K'}\frac{\partial\vec{u}.\vec{t}}{\partial n} ds\right) m_{K'}(\vec{v}_h.\vec{t})\ell_{K'}.$$

Comme $\text{rot}\,\vec{u} = 0$, on a : $\dfrac{\partial\vec{u}.t}{\partial n} = \dfrac{\partial\vec{u}.\vec{n}}{\partial t}$, d'où $\displaystyle\int_{K'}\frac{\partial\vec{u}.\vec{t}}{\partial n} ds = \left[\vec{u}(A_{2,K'}) - \vec{u}(A_{1,K'})\right].\vec{n}$,

d'où, compte-tenu de: $\nabla_{K'} g\ \ell_{K'} = g(A_{2,K'}) - g(A_{1,K'}) = \vec{u}(A_{2,K'}).\ \vec{\nu}(A_{2,K'}) - \vec{u}(A_{1,K'})\ \vec{\nu}(A_{1,K'})$

(28) $$\Phi = \sum_{K'\subset\Gamma_h}\left(\vec{u}(A_{2,K'})\left(\vec{n}-\vec{\nu}(A_{2,K'})\right) - \vec{u}(A_{1,K'})\left(\vec{n}-\vec{\nu}(A_{1,K'})\right) - \frac{\ell_{K'}}{R_{K'}} m_{K'}(\vec{u}.\vec{t})\right) m_{K'}(\vec{v}_h.\vec{t}).$$

Compte-tenu de la définition de $R_{K'}$, on obtient :

(29)
$$\Phi = \sum_{K'\subset\Gamma_h}\left\{\left(\vec{u}(A_{2,K'}) - m_{K'}(\vec{u})\right)\left(\vec{n}-\vec{\nu}(A_{2,K'})\right) - \left(\vec{u}(A_{1,K'}) - m_{K'}(\vec{u})\right)\left(\vec{n}-\vec{\nu}(A_{1,K'})\right) - m_{K'}(\vec{u}.\vec{n})\left(\vec{\nu}(A_{2,K'}) - \vec{\nu}(A_{1,K'})\right).\vec{n}\right\} m_{K'}(\vec{v}_h.\vec{t})$$

En utilisant les majorations :

$$|\vec{u}(A_{i,K'}) - m_{K'}(\vec{u})|^2 \leq \ell_{K'}\int_{K'}\left|\frac{\partial\vec{u}}{\partial s}\right|^2 ds \quad , \quad |\vec{n} - \vec{\nu}(A_{i,K'})| \leq \frac{C}{R_{K'}}\ \ell_{K'},$$

$$|m_{K'}(\vec{u}.\vec{n})|^2 \leq \frac{1}{\ell_{K'}}\int_{K'}|\vec{u}|^2 ds \quad , \quad \left|\left(\vec{\nu}(A_{2,K'}) - \vec{\nu}(A_{1,K'})\right).\vec{n}\right| \leq \frac{C}{R_{K'}}\ \ell_{K'},$$

on en déduit :

$$(30)\quad |\Phi| \leq Ch \sum_{K'\subset\Gamma_h} \sqrt{\frac{\ell_{K'}}{R_{K'}}}\, ||\vec{u}||_{1,K'} \quad m_{K'}(\vec{v}_h.\vec{t}) \leq Ch||\vec{u}||_{1,\Gamma_h} \left[\sum_{K'\subset\Gamma_h} \frac{\ell_{K'}}{R_{K'}}\; m_{K'}(\vec{v}_h.\vec{t})\right]^2$$

d'où finalement :

$$|\Phi| \leq Ch||\vec{u}||_{2,\Omega}\, a_h(\vec{v}_h,\vec{v}_h)^{1/2} \;. \quad \blacksquare$$

<u>MAJORATION DE L'ERREUR DANS $L^2(\Omega_h)$</u>

On utilise la méthode de dualité de Aubin Nitsche ; on a :

$$(31)\qquad |\vec{u} - \vec{u}_h|_{L^2(\Omega_h)} = \sup_{\substack{\vec{p}\in(L^2(\Omega_h))^2\\ \vec{p}\neq 0}} \frac{(\vec{u}-\vec{u}_h,\vec{p})_{L^2(\Omega_h)}}{|\vec{p}|_{L^2(\Omega_h)}} \;.$$

Etant donné $\vec{p}\in(L^2(\Omega_h))^2$, $\vec{p}\neq\vec{0}$, on le prolonge par zéro à Ω , et on choisit $\vec{\phi}\in(H^1(\Omega))^2$ solution du problème :

$$(32)\quad \forall\vec{\psi}\in W_o \qquad (\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\vec{\phi},\ \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\vec{\psi})_{(L^2(\Omega))^4} + \int_\Gamma \frac{\vec{\phi}\cdot\vec{\psi}}{R}\,ds = (\vec{p},\vec{\psi})_{(L^2(\Omega))^2}$$

qui est coercif dans W_o, d'où l'existence et l'unicité de $\vec{\phi}\in W_o$. De plus, le problème (32) admet l'interprétation suivante :

$$(33)\qquad -\Delta\vec{\phi} = \vec{p} \text{ dans } \Omega \;;\; \vec{\phi}.\vec{\nu} = 0 \quad\text{et}\quad \frac{\partial\vec{\phi}}{\partial\nu}.\vec{\tau} + \vec{\phi}\,\frac{\vec{\tau}}{R} = 0 \text{ sur } \Gamma \;.$$

La frontière Γ est régulière, donc puisque $(\vec{p}\in L^2(\Omega))^2$ et $\frac{1}{R}\in C^\infty(\Gamma)\cap L^\infty(\Gamma)$, on a :

$$(34)\quad \vec{\phi}\in[H^2(\Omega)]^2 \quad\text{et :}\quad |\vec{\phi}|_{2,\Omega} \leq C\;|\vec{p}|_{0,\Omega} \quad (= C\;|\vec{p}|_{0,\Omega_h})\;.$$

On se sert de ce résultat pour montrer :

<u>Théorème 5</u> : Si $\vec{u}\in(H^2(\Omega))^2$ est solution de (1), alors :

$$(35)\qquad |\vec{u} - \vec{u}_h|_{(L^2(\Omega_h))^2} \leq C\,h^2\,|\vec{u}|_{2,\Omega}\;.$$

<u>Démonstration</u>

Soit $\vec{p}\in L^2(\Omega_h)$, différent de zéro, et prolongé par zéro à Ω. Il suffit de majorer $(\vec{u}-\vec{u}_h,\vec{p})_{[L^2(\Omega_h)]^2}$, en utilisant $\vec{\phi}\in(H^2(\Omega))^2$, solution de (32) :

$$(36)\quad \begin{aligned}(\vec{u}-\vec{u}_h,\vec{p})_{[L^2(\Omega_h)]^2} &= \sum_{K\in\mathcal{C}_h}\left\{\int_K \left(\overrightarrow{\mathrm{grad}}(\vec{u}-\vec{u}_h),\ \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\vec{\phi}\right)dx - \int_{\partial K}\frac{\partial\vec{\phi}}{\partial n}\,.\,(\vec{u}-\vec{u}_h)\,ds\right\}\\ (\vec{u}-\vec{u}_h,\vec{p})_{[L^2(\Omega_h)]^2} &= \sum_{K\in\mathcal{C}_h}\int_K\left(\mathrm{div}(\vec{u}-\vec{u}_h)\,\mathrm{div}\,\vec{\phi} + \mathrm{rot}(\vec{u}-\vec{u}_h)\,\mathrm{rot}\,\vec{\phi}\right)dx\\ &\quad + \int_{\partial K}\left(\cancel{\frac{\partial\vec{\phi}}{\partial n}} - \vec{n}\,\mathrm{div}\,\vec{\phi} + \vec{t}\,\mathrm{rot}\,\vec{\phi} - \cancel{\frac{\partial\vec{\phi}}{\partial n}}\right).(\vec{u}-\vec{u}_h)\,ds\;.\end{aligned}$$

Or, sur chaque triangle : $m_K\left(\mathrm{div}(\vec{u}-\vec{u}_h)\right) = \frac{1}{\mathrm{mes}(K)}\int_K \left(f-m_K(f)\right)dx = 0, \mathrm{rot}(\vec{u}-\vec{u}_h) = 0$, donc :

$$(37)\quad \begin{aligned}\left|\sum_{K\in\mathcal{C}_h}\int_K \mathrm{div}(\vec{u}-\vec{u}_h)\,\mathrm{div}\,\vec{\phi} + \mathrm{rot}(\vec{u}-\vec{u}_h)\,\mathrm{rot}\,\vec{\phi}\,dx\right| &\leq C\,h|\vec{\phi}|_{2,\Omega_h}||\vec{u}-\vec{u}_h||_h\,,\\ &\leq C\,h|\vec{\phi}|_{2,\Omega}\;a(\vec{u}-\vec{u}_h,\ \vec{u}-\vec{u}_h)^{1/2}\;.\end{aligned}$$

Il reste à majorer :

$$(38)\qquad \sum_{K\in\mathcal{C}_h}\int_{\partial K}(\vec{t}\ \mathrm{rot}\ \vec{\phi}-\vec{n}\ \mathrm{div}\ \vec{\phi}).(\vec{u}-\vec{u}_h)\ ds$$

$$=\sum_{K\in\mathcal{C}_h}\int_{\partial K}\left\{(I-m_{K'})(\vec{t}\ \mathrm{rot}\ \vec{\phi}-\vec{n}\ \mathrm{div}\ \vec{\phi})(\vec{u}-\vec{u}_h)+m_{K'}(\vec{t}\ \mathrm{rot}\ \vec{\phi}-\vec{n}\ \mathrm{div}\ \vec{\phi})(\vec{u}-\vec{u}_h)\right\}ds$$

On a pour le premier terme :

$$(39)\qquad \left|\sum_{K\in\mathcal{C}_h}\int_{\partial K}\left\{(I-m_{K'})(\vec{t}\ \mathrm{rot}\ \vec{\phi}-\vec{n}\ \mathrm{div}\ \vec{\phi})(\vec{u}-\vec{u}_h)\right\}ds\right|\leqslant C\ h|\vec{\phi}|_{2,\Omega_h}||u-u_h||_h\ ,$$

et dans le second terme, les contributions des côtés intérieurs s'éliminent ; il reste :

(40)

$$\sum_{K'\subset\Gamma_h}\int_{K'}m_{K'}(\vec{t}\ \mathrm{rot}\ \vec{\phi}-\vec{u}\ \mathrm{div}\ \vec{\phi})(\vec{u}-\vec{u}_h)ds=\sum_{K'\subset\Gamma_h}\int_{K'}(m_{K'}(\mathrm{rot}\ \vec{\phi}).(\vec{u}-\vec{u}_h).\vec{t}-m_{K'}(\mathrm{div}\ \vec{\phi}).(\vec{u}-\vec{u}_h).\vec{n})ds.$$

On a : $\int_{K'}\vec{u}.\vec{n}=\ell_{K'}g_h(A_{O,K'})=\int_{K'}\vec{u}_h.\vec{n}\ ds$, et le dernier terme disparaît.

Enfin :

$$(41)\qquad \sum_{K'\subset\Gamma_h}\int_{K'}m_{K'}(\mathrm{rot}\ \vec{\phi}).(\vec{u}-\vec{u}_h).\vec{t}\ ds=\sum_{K'\subset\Gamma_h}m_{K'}(\mathrm{rot}\ \vec{\phi})\ m_{K'}((\vec{u}-\vec{u}_h).\vec{t})\ \ell_{K'}$$

où $\quad \ell_{K'}\ m_{K'}(\mathrm{rot}\ \vec{\phi})=\int_{K'}\left(\frac{\partial\vec{\phi}.\vec{n}}{\partial t}-\frac{\partial\vec{\phi}.\vec{t}}{\partial n}\right)ds$

$$(42)\qquad \ell_{K'}\ m_{K'}(\mathrm{rot}\ \vec{\phi})=-\int_{K'}\frac{\partial\vec{\phi}}{\partial n}\vec{t}\ ds+\vec{\phi}(A_{2,K'})(\vec{n}-\vec{\nu}(A_{2,K'}))-\vec{\phi}(A_{1,K'})(\vec{n}-\vec{\nu}(A_{1,K'}))+\vec{\phi}(A_{2,K'}).\vec{\nu}(A_{2,K'})-\vec{\phi}(A_{1,K'}).\vec{\nu}(A_{1,K'}).$$

De plus, puisque $\Delta\phi=0$: $\quad \int_{K'}\frac{\partial\vec{\phi}}{\partial n}.\vec{t}\ ds=\int_{\widehat{K'}}\frac{\partial\vec{\phi}}{\partial\nu}\vec{t}\ ds,$

donc, compte-tenu de la condition $\frac{\partial(\vec{\phi}.\vec{\tau})}{\partial\nu}+\frac{1}{R}\ \vec{\phi}.\vec{\tau}=0$:

$$\int_{K'}\frac{\partial\vec{\phi}}{\partial n}.t\ ds=\int_{\widehat{K'}}\frac{\partial\vec{\phi}}{\partial\nu}(\vec{t}-\vec{\tau})ds+\int_{K'}\frac{1}{R}\vec{\phi}.\vec{t}\ ds$$

$$=\int_{\widehat{K'}}\frac{\partial\vec{\phi}}{\partial\nu}(\vec{\tau}.\vec{\tau})ds-\int_{K'}\frac{\partial\vec{\phi}}{\partial s}(\vec{n}-\vec{\nu})ds+\int_{K'}\frac{\partial}{\partial s}(\vec{\phi}.(\vec{n}-\vec{\nu}))\ ds\ ,$$

ce qui nous donne en reportant dans (42):

$$(43)\qquad \ell_{K'}\ m_{K'}(\mathrm{rot}\ \vec{\phi})=\int_{\widehat{K'}}\frac{\partial\vec{\phi}}{\partial\nu}(\vec{\tau}-\vec{\tau})ds-\int_{K'}\frac{\partial\vec{\phi}}{\partial s}(\vec{n}-\vec{\nu})ds\ ;$$

d'où :

$$\left|\sum_{K'\subset\Gamma_h}\int_{K'}m_{K'}(\mathrm{rot}\ \vec{\phi})(\vec{u}-\vec{u}_h).\vec{t}\ ds\right|\leqslant C\ h||\vec{\phi}||_{1,\Gamma}\left\{\sum_{K'\subset\Gamma_h}(m_{K'}(\vec{u}-\vec{u}_h).\vec{t})^2\ \ell_{K'}\right\}^{1/2}$$

$$\leqslant C\ h||\vec{\phi}||_{1,\Gamma}\ a_h(\vec{u}-\vec{u}_h,\ \vec{u}-\vec{u}_h)^{1/2}.$$

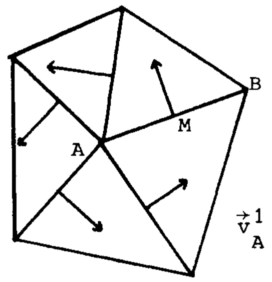
d'où le théorème en utilisant (22).

LA RESOLUTION NUMERIQUE

L'espace $V_{h,O}$ peut être interprété comme la somme directe de deux sous-espaces V_1 et V_2. Le sous-espace V_1 (respectivement V_2) contient les fonctions de $V_{h,O}$ dont la composante tangentielle (respectivement normale) au milieu de chaque côté de triangle est nulle. Ces deux sous-espaces sont orthogonaux pour le produit scalaire dans $(L^2(\Omega_h))^2$; étant donné une fonction $\vec{v}_h\in V_{h,O}$, on note $\vec{v}_h^1$ (respectivement $\vec{v}_h^2$) la fonction qui admet au milieu de chaque côté de triangle la même composante normale (respectivement tangentielle) que $\vec{v}_h$, et dont la composante tangentielle (respectivement normale) est nulle.

Il est immédiat que :

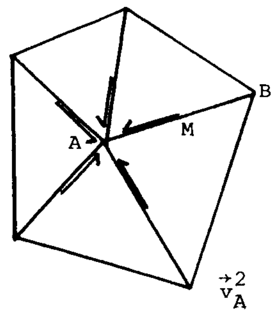
(44) $\qquad \vec{v}_h^{\,1} \in V_1 \quad ; \quad \vec{v}_h^{\,2} \in V_2 \quad ; \quad \vec{v}_h = \vec{v}_h^{\,1} + \vec{v}_h^{\,2}$.



On note n_s le nombre de sommets de triangles, n_i le nombre de sommets inclus dans Ω_h, et n_t le nombre de triangles ; on vérifie alors que

(45) $\quad \dim(V_{h,o}) = 2(n_t - n_i + 1)$; $\dim V_1 = n_i$; $\dim V_2 = n_s - 1$

Cette remarque incite à associer à chaque sommet intérieur à Ω_h une fonction de base de V_1 et une fonction de base de V_2, et à chaque sommet situé sur Γ_h, sauf l'un d'entre eux, une fonction de base de V_2 ; toutes ces fonctions de base ayant un support réduit à la réunion des triangles adjacents au sommet correspondant.



Conformément aux figures ci-contre, on peut associer à chaque sommet A une fonction $\vec{v}_A^{\,1} \in V_1$ et une fonction $\vec{v}_A^{\,2} \in V_2$ telles que si K' est un côté de triangle admettant A comme extrémité : (on note B l'autre extrémité et M le milieu)

(46) $\quad \vec{v}_A^{\,2}(M) = \dfrac{\overrightarrow{BA}}{|BA|^2} \quad ; \quad \vec{v}_A^{\,1}(M) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \vec{v}_A^{\,2}(M)$

Il semble naturel de prendre sur la frontière le sommet auquel n'est associée aucune fonction de base *; on note A_o ce sommet.

Pour résoudre (17), il faut connaître un élément $\vec{w}_h \in V_h(f,g)$, de façon à connaître le second membre de (18). Pour construire $\vec{w}_h$, on numérote tous les triangles de 1 à n_t, en partant d'un triangle dont un côté est inclus dans Γ_h, et aboutissant à un triangle admettant A_o pour sommet, et voisin du triangle N° 1, et enfin de telle façon que :

(47) $\quad \forall n \leq n_t, \complement \bigcup_{0 \leq j \leq n} K_j$ est de frontière connexe, sans point double, (en notant $K_o = \complement \Omega_h$).

On peut alors construire $\vec{w}_h$: en ne passant qu'une seule fois dans chaque triangle dans l'ordre prescrit ci-dessus, on obtient explicitement sa composante dans V_1, et on prend égale à zéro sa composante dans V_2.

Pour résoudre (18), il reste à construire la matrice associée à la forme bilinéaire $a_h(.,.)$ et le second membre, $\vec{w}_h$ n'étant connu que par ses valeurs aux milieux des côtés. On note $\vec{v}_i^{\,1}$ $(1 \leq i \leq n_i)$ la base de V_1 et $\vec{v}_i^{\,2}$ $(1 \leq i \leq n_s - 1)$ la base de V_2. On peut évaleur $a_h(\vec{w}_h, \vec{v}_i^{\,1})$ et $a_h(\vec{w}_h, \vec{v}_i^{\,2})$ par une formule qui n'utilise que les valeurs aux milieux des côtés, ce qui évite de projeter $\vec{w}_h$ sur la base $\{\vec{v}_i^{\,1}\}$.

La matrice $a_h(\vec{v}_i^{\,\ell}, \vec{v}_j^{\,k})$ est la somme de deux termes ; le premier est le produit des gradients, et l'autre est une combinaison des moyennes des composantes tangentielles sur Γ_h. Ce dernier terme est la plupart du temps nul, et peut être calculé en même temps que le premier

* *Ce sommet exclu correspond numériquement à la relation de comptabilité :*

$$\int_\Gamma \operatorname{rot} \vec{u}\, dx = 0 \Rightarrow \int_\Gamma \vec{u}.\vec{t}\, ds = 0.$$

terme du second membre de (18). Le produit des gradients est nul, sauf lorsque les fonctions de base sont associées à deux sommets d'un même triangle, ou au même sommet ; le produit est alors donné par l'une des formules suivantes, qui utilisent les notations de la figure ci-dessous : ($k \in \{1,2\}$)

(48) $$\sum_{K\in\mathcal{C}_h} \int_K (\text{grad } v_i^k, \text{ grad } v_i^k)\,dx = \sum_{K_\ell \text{ de sommet } A_i} \frac{2}{\text{mes}(K_\ell)} \sin^2(\alpha_{i,K_\ell}) \;;$$

(49) $$\sum_{K\in\mathcal{C}_h} \int_K (\overrightarrow{\text{grad}}\ \vec{v}_i^k, \ \overrightarrow{\text{grad}}\ \vec{v}_j^k)\,dx = -\frac{2}{|A_i\, A_j|} \left[\sin(2\gamma_{ij,K_2}) + \sin(2\gamma_{ij,K_2})\right],$$

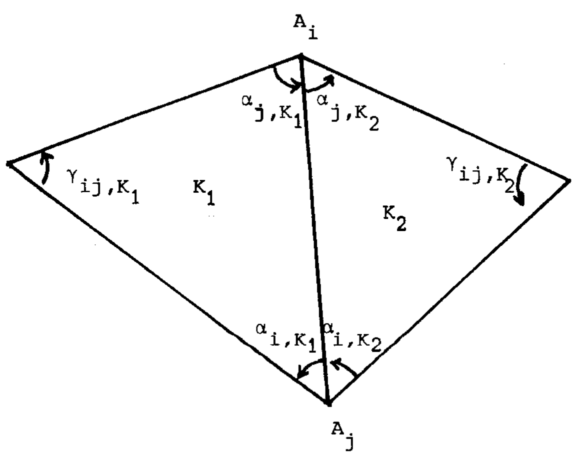
avec $A_i \neq A_j$, $A_i\, A_j = \partial K_1 \cap \partial K_2$;

(50) $$\sum_{K\in\mathcal{C}_h} \int_K (\overrightarrow{\text{grad}}\ \vec{v}_i^1, \ \overrightarrow{\text{grad}}\ \vec{v}_j^2)\,dx = \frac{4}{|A_i\, A_j|} \left[\sin^2(\gamma_{ij,K_1}) - \sin^2(\gamma_{ij,K_2})\right]$$ (pour les mêmes A_i et A_j)

terme nul dès que : $\gamma_{ij,K_1} = \gamma_{ij,K_2}$;

Enfin :

(51) $$\sum_{K\in\mathcal{C}_h} \int_K (\overrightarrow{\text{grad}}\ \vec{v}_i^1, \ \overrightarrow{\text{grad}}\ \vec{v}_i^2)\,dx = 0 ,$$ ainsi que tous les termes non mentionnés.



BIBLIOGRAPHIE

(1) CROUZEIX - RAVIART *"Conforming and non conforming finite element methods for solving the stationnary Stokes equations"*

RAIRO R3 (Dec. 1973) p.33-76