PUBLICATIONS MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUES DE RENNES

M. CROUZEIX
A. Y. LE ROUX

Écoulement d'un fluide irrotationnel

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1976, fascicule S5
« Journées « éléments finis » », , p. 1-8

<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1976___S5_A9_0>

© Département de mathématiques et informatique, université de Rennes, 1976, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications mathématiques et informatiques de Rennes » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

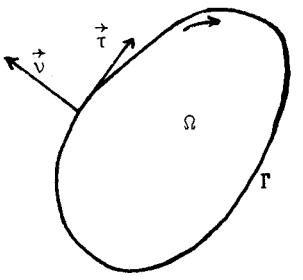
NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

ECOULEMENT D'UN FLUIDE IRROTATIONNEL

M. CROUZEIX ; A.Y. LE ROUX

LE PROBLEME THEORIQUE

Soit Ω un ouvert borné, convexe, de $\mathbb{R}^2$. Sa frontière Γ est supposée de classe C^∞. On note $\vec{\nu}$ la normale unitaire extérieure à Γ , et $\vec{\tau}$ sa tangente unitaire, de telle façon que le repère $(\vec{\tau},\vec{\nu})$ soit direct.



Etant donné $f \in L^2(\Omega)$, $g \in H^{1/2}(\Gamma)$, on cherche une solution $\vec{u} \in (H^1(\Omega))^2$ solution du problème :

(1) $\quad \operatorname{div} \vec{u} = f \quad ; \quad \operatorname{rot} \vec{u} = 0 \quad ; \quad \vec{u}.\vec{\nu} = g \text{ sur } \Gamma$.

Pour assurer l'existence d'une solution de (1), il est nécessaire d'imposer une condition de comptabilité entre f et g :

(2) $\quad \int_\Omega f \, dx = \int_\Gamma g \, ds$

Théorème 1 : Soit $s \geq 0$; si $f \in H^s(\Omega)$ et $g \in H^{s+1/2}(\Gamma)$ vérifient (2), alors le problème (1) admet une solution qui appartient à $H^{s+1}(\Omega)$.

Démonstration:

Le problème de Neumann : $\Delta p = f$; $\frac{\partial p}{\partial \nu} = g$ sur Γ ; admet une solution unique $p \in H^{s+2}(\Omega)$; il suffit de poser $\vec{u} = \operatorname{grad} p$. ∎

Pour mettre (1) sous forme variationnelle, on utilise la formule de Green :

(3) $$\int_\Omega (\operatorname{grad} \vec{u}, \operatorname{grad} \vec{v})\, dx + \int_\Gamma \frac{\vec{u}.\vec{v}}{R}\, ds = \int_\Omega (\operatorname{div} \vec{u} \operatorname{div} \vec{v} + \operatorname{rot} \vec{u} \operatorname{rot} \vec{v})\, dx + \int_\Gamma \left(\frac{\partial \vec{u}.\vec{\nu}}{\partial s}\, .\vec{v}.\vec{\tau} - \frac{\partial \vec{u}.\vec{\tau}}{\partial s}\, .\vec{v}.\vec{\nu}\right) ds,$$

où R est le rayon de courbure, mesuré dans le sens contraire à la normale extérieure $\vec{\nu}$, donc positif, puisque Ω est supposé convexe, et où l'intégration sur Γ est faite dans le sens de la tangente. On introduit la forme bilinéaire :

(4) $\quad a(\vec{u},\vec{v}) = \int_\Omega (\operatorname{grad} \vec{u}, \operatorname{grad} \vec{v})\, dx + \int_\Gamma \frac{\vec{u}.\vec{v}}{R}\, ds$, qui est coercive* et continue sur :

(5) $\quad W_o = \{ \vec{v} \in (H^1(\Omega))^2 \; ; \; \vec{v}.\vec{\nu} = 0 \text{ sur } \Gamma \}$

muni de la norme : $|\vec{v}|_{1,\Omega} = |\operatorname{grad} \vec{v}|_{(L^2(\Omega))^4}$, et on considère le problème :

Chercher $\vec{u} \in (H^1(\Omega))^2$, tel que :

(6) $\quad \vec{u}.\vec{\nu} = g \text{ sur } \Gamma$

(7) $\quad \forall \vec{v} \in W_o \qquad a(\vec{u},\vec{v}) = \int_\Omega f \operatorname{div} \vec{v}\, dx + \int_\Gamma \frac{dg}{ds}\, \vec{v}.\vec{\tau}\, ds$

D'après le lemme de Lax-Milgram, ce problème admet une solution unique $\vec{u} \in (H^1(\Omega))^2$, et si $\vec{u}$ est solution de (1), $\vec{u}$ est aussi solution de (6), (7), d'où l'unicité pour (1) :

* *l'hypothèse de convexité n'est pas indispensable.*

Théorème 2 : Le problème (6), (7) admet une solution unique $u \in (H^1(\Omega))^2$, et les problèmes (1) et (6), (7) sont équivalents.

LE PROBLEME APPROCHE

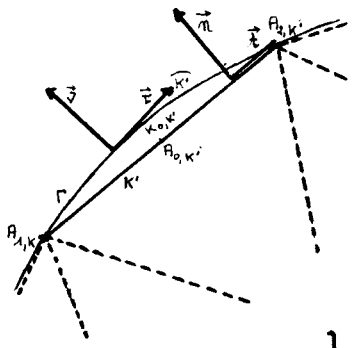
On définit un ouvert Ω_h inclus dans Ω , de frontière Γ_h polygonale telle que, une triangulation régulière $\mathcal{C}_h$ de Ω_h étant fixée, les sommets de triangle situés sur Γ_h soient aussi situés sur Γ. Le paramètre $h > 0$ désigne le plus grand diamètre de triangle de $\mathcal{C}_h$ et est destiné à tendre vers zéro. On définit les espaces de dimension finie :

$$(8) \qquad W_h = \{ \vec{v}_h \in [L^2(\Omega_h)]^2 \ ; \ \forall K \in \mathcal{C}_h, \ \vec{v}_h \in P_1(K)^2 \ ; \ \vec{v}_h \text{ continue aux milieux des côtés } \},$$

$$(9) \qquad W_{h,0} = \{ \vec{v}_h \in W_h \ ; \ \vec{v}_h . \vec{n} = 0 \quad \text{aux milieux des côtés situés sur } \Gamma_h \ \},$$

où $\vec{n}$ désigne la normale extérieure unitaire d'un triangle ; on notera $\vec{t}$ son vecteur tangent unitaire, tel que le repère $(\vec{t},\vec{n})$ soit direct.

Etant donné un côté de triangle K', situé sur la frontière Γ_h, on note $A_{0,K'}$ son milieu, $A_{1,K'}$ et $A_{2,K'}$ ses extrémités, dans le sens de $\vec{t}$, $K_{0,K'}$ l'ouvert limité par K' et Γ, et $\ell_{K'}$ sa longueur. On pose :



$$(10) \qquad g_h(A_{0,K'}) = \frac{1}{\ell_{K'}} \left\{ \int_{\mathcal{K}'} g \, ds - \int_{K_{0,K'}} f \, dx \right\} ,$$

en notant par $\mathcal{K}'$ la partie de Γ limitée par $A_{1,K'}$ et $A_{2,K'}$, et on définit la variété affine :

$$(11) \qquad V_h(f,g) = \left\{ \vec{u}_h \in W_h \ ; \ \forall K \in \mathcal{C}_h \ \operatorname{div} \vec{u}_h \Big|_K = m_K(f) ; \operatorname{rot} \vec{u}_h \Big|_K = 0 ; \ \forall K' \subset \Gamma_h \ \vec{u}_h(A_{0,K'}).\vec{n} = g_h(A_{0,K'}) \right\} ,$$

où $m_K(f)$ représente la moyenne de f sur le triangle K :

$$(12) \qquad m_K(f) = \int_K f \, dx \Big/ \int_K dx \ .$$

De la même façon, on note $m_{K'}$ l'opérateur "moyenne" sur un côté de triangle K'.

Sur $K' \subset \Gamma_h$, on approche le rayon de courbure R par une constante positive $R_{K'}$, définie par :

$$(13) \qquad \frac{1}{R_{K'}} = \frac{1}{\ell_{K'}^2} \cdot \left(\vec{\nu}(A_{2,K'}) \right) \cdot (A_{1,K'}, A_{2,K'})$$

La forme bilinéaire $a(\vec{u},\vec{v})$ est approchée par :

$$(14) \qquad a_h(\vec{u},\vec{v}) = \sum_{K \in \mathcal{C}_h} \int_K (\operatorname{grad} \vec{u}, \operatorname{grad} \vec{v}) dx + \sum_{K' \subset \Gamma_h} \frac{1}{R_{K'}} \, m_{K'}(\vec{u}.\vec{t}) m_{K'}(\vec{v}.\vec{t}) \ell_{K'} \ ,$$

définie, continue et coercive sur $W_{h,0}$ muni de la norme :

$$(15) \qquad \| \vec{u}_h \|_h = \left(\sum_{K \in \mathcal{C}_h} \int_K |\operatorname{grad} \vec{u}_h|^2 \, dx \right)^{1/2} .$$

Sur $K' \subset \Gamma$, on approche $\frac{dg}{ds}$ par la constante :

$$(16) \qquad \nabla_{K'} g = \frac{1}{\ell_{K'}} \left(g(A_{2,K'}) - g(A_{1,K'}) \right) .$$

On considère le problème approché, où : $V_{h,0} = V_h(0,0)$:

(17) Chercher $\vec{u}_h \in V_h(f,g)$; $\forall \vec{v}_h \in V_{h,0}$ $\quad a_h(\vec{u}_h,\vec{v}_h) = \sum_{K' \subset \Gamma_h} \nabla_{K',g} \cdot m_{K'}(\vec{v}_h.\vec{t}) \cdot \ell_{K'}$.

Si on connaît un élément $\vec{w}_h \in V_h(f,g)$, alors $\vec{u}'_h = \vec{u}_h - \vec{w}_h \in V_{h,0}$ et vérifie :

(18) $\forall v_h \in V_{h,0}$ $\quad a_h(\vec{u}'_h , \vec{v}_h) = \sum_{k' \subset \Gamma_h} \nabla_{K',g} \cdot m_{K'}(\vec{v}_h.\vec{t}) \cdot \ell_{K'} - a_h(\vec{w}_h,\vec{v}_h)$,

problème qui admet une solution unique.

MAJORATION DE L'ERREUR, EN NORME $||.||_h$

Si $f \in H^1(\Omega)$ et $g \in H^{3/2}(\Gamma)$, on sait que : $\vec{u} \in (H^2(\Omega))^2$. On fait cette hypothèse de régularité, et on construit un opérateur de projection r_h, défini sur $(H^2(\Omega))^2$ et à valeur dans W, et pour lequel $r_h\vec{u} \in V_h(f,g)$ dès que $\vec{u}$ est solution de (1), ou de (6), (7).

Soit $K \in \mathcal{C}_h$; pour chaque côté K' de K, on pose, étant donné $\vec{u} \in (H^2(\Omega))^2$,

(19) $\quad r_h\vec{u}\,(A_{O,K'}) = \frac{1}{\ell_{K'}} \int_{K'} \vec{u}\, ds \quad (= m_{K'}(\vec{u}))$,

puis on interpole linéairement sur chaque triangle. On a alors :

Théorème 3 : Si $\vec{u} \in (H^2(\Omega))^2$, alors :

(20) $\quad ||\vec{u} - r_h\vec{u}||_h \leq (C\,h\,|\vec{u}|_{2,\Omega_h} \leq)\ C\,h\,|\vec{u}|_{2,\Omega}$,

et si $\vec{u}$ vérifie (1), ou (6), (7) : $\quad r_h\vec{u} \in V_h(f,g)$.

Démonstration

La majoration (20) s'obtient en utilisant le lemme de Bramble-Hilbert sur chaque triangle, comme dans [1] :

(21) $\quad ||\vec{u} - r_h u||_h^2 = \sum_{k \in \mathcal{C}_h} |u - r_h u|^2_{1,K} \leq \sum_{k \in \mathcal{C}_h} C^2h^2\,|u|^2_{2,K} \leq (C\,h\,|u|_{2,\Omega_h})^2$.

Soit $K \in \mathcal{C}_h$: div $(r_h\vec{u}|_K)$ est constant, et égal à $m_K(f)$, en appliquant une formule de Green ; de la même façon rot $(r_h\vec{u}|_K)$ est nul. Enfin, si $K' \subset \Gamma_h$, $r_h\vec{u}(A_{O,K'}).\vec{n}$ est égal à la moyenne $m_{K'}(\vec{u}.\vec{n})$, c'est-à-dire $g_h(A_{O,K'})$. ■

Cet opérateur de projection permet d'établir une première estimation de l'erreur commise en approchant $\vec{u}$, solution de (1) ou de (6), (7), par $\vec{u}_h$, solution de (17) :

Théorème 4 : On suppose que la solution $\vec{u}$ de (1) appartient à $(H^2(\Omega))^2$, alors

(22) $\quad a_h(\vec{u} - \vec{u}_h, \vec{u} - \vec{u}_h) \leq C\,h^2 ||\vec{u}||^2_{2,\Omega}$.

Démonstration

On a $\left[a_h(\vec{u}-\vec{u}_h,\vec{u}-\vec{u}_h) \right]^{1/2} \leq \left[a_h(\vec{u}-r_h\vec{u},\vec{u}-r_h\vec{u})\right]^{1/2} + \left[a_h(\vec{u}_h-r_h\vec{u},\vec{u}_h-r_h\vec{u})\right]^{1/2}$,

or $\left[a_h(\vec{u}-r_h\vec{u},\vec{u}-r_h\vec{u})\right]^{1/2} = ||\vec{u}-r_h\vec{u}||_h$; compte-tenu du théorème 3, il nous suffit de majorer

$a_h(\vec{u}_h - r_h\vec{u}, \vec{u}_h - r_h\vec{u})$; posons $\vec{v}_h = \vec{u}_h - r_h\vec{u}$, on a $\vec{v}_h \in V_{h,0}$

$$a_h(\vec{u}_h - r_h\vec{u}, \vec{u}_h - r_h\vec{u}) = a_h(\vec{u}_h, \vec{v}_h) - a_h(\vec{u}, \vec{v}_h) + a_h(\vec{u} - r_h\vec{u}, \vec{v}_h)$$

$$(23)\quad a_h(\vec{v}_h, \vec{v}_h) = a_h(\vec{u} - r_h\vec{u}, \vec{v}_h) + \sum_{K' \subset \Gamma_h} \nabla_{K'} g \; m_{K'}(\vec{v}_h \cdot \vec{t})\, \ell_{K'}$$

$$- \sum_{K' \in \mathcal{C}_h} \int_K \operatorname{grad} \vec{u} \operatorname{grad} \vec{v}_h dx - \sum_{K' \subset \Gamma_h} \frac{1}{R_{K'}} m_{K'}(\vec{u}.\vec{t}) m_{K'}(\vec{v}_h.\vec{t})\, \ell_{K'} ,$$

et on utilise sur chaque triangle la formule de Green :

$$(24)\quad \int_K \operatorname{grad} \vec{u} \operatorname{grad} \vec{v}_h dx = \int_K (\operatorname{div} \vec{u} \operatorname{div} \vec{v}_h + \operatorname{rot} \vec{u} \operatorname{rot} \vec{v}_h) dx +$$

$$+ \int_{\partial K} \left\{ \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial n} . \vec{n} - \operatorname{div} \vec{u} \right) \vec{v}_h . \vec{n} + \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial n} . \vec{t} + \operatorname{rot} \vec{u} \right) \vec{v}_h . \vec{t} \right\} ds$$

avec $\operatorname{div} \vec{u} = f$, $\operatorname{rot} \vec{u} = \operatorname{rot} \vec{v}_h = \operatorname{div} \vec{v}_h = 0$, il reste :

$$(25)\quad a_h(\vec{v}_h, \vec{v}_h) = a_h(\vec{u} - r_h\vec{u}, \vec{v}_h) + \sum_{K' \subset \Gamma_h} \left(\nabla_{K'} g - \frac{1}{R_{K'}} m_{K'}(\vec{u}.\vec{t}) \right) m_{K'}(\vec{v}_h.\vec{t})\, \ell_{K'} - \sum_{K \in \mathcal{C}_h} \int_{\partial K} \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial n} - \vec{fn} \right) . \vec{v}_h ds ,$$

On a :

$$(26)\quad \sum_{K \in \mathcal{C}_h} \int_{\partial K} \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial n} - \vec{fn} \right) \vec{v}_h ds = \sum_K \sum_{K' \subset \partial K} \int_{K'} \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial n} - \vec{fn} \right) (\vec{v}_h - m_K(\vec{v}_h)) ds + \sum_{K' \subset \Gamma_h} \int_{K'} \frac{\partial \vec{u}.\vec{t}}{\partial n} m_{K'}(\vec{v}_h.\vec{t}) ds$$

par utilisation du lemme de Bramble-Hilbert, on obtient

$$(27)\quad \left| \sum_K \sum_{K' \subset \partial K} \int_{K'} \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial n} - \vec{fn} \right) (\vec{v}_h - m_{K'}(\vec{v}_h)) \right| \leq C\, h \, ||\vec{v}_h||_h \, |\vec{u}|_{2,\Omega} \leq C\, h\, a_h(v_h, v_h)^{1/2} \, |\vec{u}|_{2,\Omega} ,$$

par ailleurs :

$$a_h(\vec{u} - r_h\vec{u}, \vec{v}_h) \leq a_h(\vec{u} - r_h\vec{u}, \vec{u} - r_h\vec{u})^{1/2} \cdot a_h(\vec{v}_h, \vec{v}_h)^{1/2} = ||\vec{u} - r_h\vec{u}||\, a_h(\vec{v}_h, \vec{v}_h)^{1/2} .$$

Il reste donc à majorer dans (25) :

$$\Phi = \sum_{K' \subset \Gamma_h} \left(\nabla_{K'} g - \frac{1}{R_{K'}} m_{K'}(\vec{u}.\vec{t}) - \frac{1}{\ell(K')} \int_{K'} \frac{\partial \vec{u}.\vec{t}}{\partial n} ds \right) m_{K'}(\vec{v}_h.\vec{t})\, \ell_{K'} .$$

Comme $\operatorname{rot} \vec{u} = 0$, on a : $\frac{\partial \vec{u}.t}{\partial n} = \frac{\partial \vec{u}.\vec{n}}{\partial t}$, d'où $\int_{K'} \frac{\partial \vec{u}.\vec{t}}{\partial n} ds = [\vec{u}(A_{2,K'}) - \vec{u}(A_{1,K'})].\vec{n}$,

d'où, compte-tenu de: $\nabla_{K'} g\, \ell_{K'} = g(A_{2,K'}) - g(A_{1,K'}) = \vec{u}(A_{2,K'}) \cdot \vec{\nu}(A_{2,K'}) - \vec{u}(A_{1,K'})\, \vec{\nu}(A_{1,K'})$

$$(28)\quad \Phi = \sum_{K' \subset \Gamma_h} \left(\vec{u}(A_{2,K'}) (\vec{n} - \vec{\nu}(A_{2,K'})) - \vec{u}(A_{1,K'}) (\vec{n} - \vec{\nu}(A_{1,K'}) - \frac{\ell_{K'}}{R_{K'}} m_{K'}(\vec{u}.\vec{t}) \right) m_{K'}(\vec{v}_h.\vec{t}) .$$

Compte-tenu de la définition de $R_{K'}$, on obtient :

(29)

$$\Phi = \sum_{K' \subset \Gamma_h} \left\{ (\vec{u}(A_{2,K'}) - m_{K'}(\vec{u})) (\vec{n} - \vec{\nu}(A_{2,K'})) - (\vec{u}(A_{1,K'}) - m_{K'}(\vec{u})) (\vec{n} - \vec{\nu}(A_{1,K'})) - m_{K'}(\vec{u}.\vec{n}) (\vec{\nu}(A_{2,K'}) - \vec{\nu}(A_{1,K'})) . \vec{n} \right\} m_{K'}(\vec{v}_h.\vec{t})$$

En utilisant les majorations :

$$|\vec{u}(A_{i,K'}) - m_{K'}(\vec{u})|^2 \leq \ell_{K'} \int_{K'} \left| \frac{\partial \vec{u}}{\partial s} \right|^2 ds \quad , \quad |\vec{n} - \vec{\nu}(A_{i,K'})| \leq \frac{C}{R_{K'}} \ell_{K'} ,$$

$$|m_{K'}(\vec{u}.\vec{n})|^2 \leq \frac{1}{\ell_{K'}} \int_{K'} |\vec{u}|^2 ds \quad , \quad |(\vec{\nu}(A_{2,K'}) - \vec{\nu}(A_{1,K'})).\vec{n}| \leq \frac{C}{R_{K'}} \ell_{K'} ,$$

on en déduit :

$$(30)\quad |\Phi| \leq Ch \sum_{K' \in \Gamma_h} \sqrt{\frac{\ell_{K'}}{R_{K'}}}\, ||\vec{u}||_{1,K'} \quad m_{K'}(\vec{v}_h.\vec{t}) \leq Ch\,||\vec{u}||_{1,\Gamma_h} \left[\sum_{K' \in \Gamma_h} \frac{\ell_{K'}}{R_{K'}}\, m_{K'}(\vec{v}_h.\vec{t})\right]^2$$

d'où finalement :

$$|\Phi| \leq Ch\,||\vec{u}||_{2,\Omega}\, a_h(\vec{v}_h,\vec{v}_h)^{1/2} . \quad \blacksquare$$

MAJORATION DE L'ERREUR DANS $L^2(\Omega_h)$

On utilise la méthode de dualité de Aubin Nitsche ; on a :

$$(31)\qquad |\vec{u} - \vec{u}_h|_{L^2(\Omega_h)} = \sup_{\substack{\vec{p} \in (L^2(\Omega_h))^2 \\ \vec{p} \neq 0}} \frac{(\vec{u}-\vec{u}_h, \vec{p})_{L^2(\Omega_h)}}{|\vec{p}|_{L^2(\Omega_h)}} .$$

Etant donné $\vec{p} \in (L^2(\Omega_h))^2$, $\vec{p} \neq \vec{0}$, on le prolonge par zéro à Ω, et on choisit $\vec{\phi} \in (H^1(\Omega))^2$ solution du problème :

$$(32)\quad \forall\, \vec{\psi} \in W_o \qquad (\vec{\text{grad}}\,\vec{\phi}, \vec{\text{grad}}\,\vec{\psi})_{(L^2(\Omega))^4} + \int_\Gamma \frac{\vec{\phi}\cdot\vec{\psi}}{R}\, ds = (\vec{p},\vec{\psi})_{(L^2(\Omega))^2}$$

qui est coercif dans W_o, d'où l'existence et l'unicité de $\vec{\phi} \in W_o$. De plus, le problème (32) admet l'interprétation suivante :

$$(33)\qquad -\Delta\vec{\phi} = \vec{p} \text{ dans } \Omega \;;\; \vec{\phi}.\vec{\nu} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial\vec{\phi}}{\partial\nu}.\vec{\tau} + \vec{\phi}\,\frac{\vec{\tau}}{R} = 0 \quad \text{sur } \Gamma .$$

La frontière Γ est régulière, donc puisque $\vec{p} \in L^2(\Omega)^2$ et $\frac{1}{R} \in C^\infty(\Gamma) \cap L^\infty(\Gamma)$, on a :

$$(34)\quad \vec{\phi} \in [H^2(\Omega)]^2 \text{ et : } |\vec{\phi}|_{2,\Omega} \leq C\ |\vec{p}|_{0,\Omega} \quad (= C\ |\vec{p}|_{0,\Omega_h}) .$$

On se sert de ce résultat pour montrer :

Théorème 5 : Si $\vec{u} \in (H^2(\Omega))^2$ est solution de (1), alors :

$$(35)\qquad |\vec{u} - \vec{u}_h|_{(L^2(\Omega_h))^2} \leq C\,h^2\,|\vec{u}|_{2,\Omega} .$$

Démonstration

Soit $\vec{p} \in L^2(\Omega_h)$, différent de zéro, et prolongé par zéro à Ω. Il suffit de majorer $(\vec{u} - \vec{u}_h, \vec{p})_{[L^2(\Omega_h)]^2}$, en utilisant $\vec{\phi} \in (H^2(\Omega))^2$, solution de (32) :

$$(36)\qquad (\vec{u}-\vec{u}_h,\vec{p})_{[L^2(\Omega_h)]^2} = \sum_{K \in \mathcal{C}_h} \left\{ \int_K (\vec{\text{grad}}(\vec{u}-\vec{u}_h), \vec{\text{grad}}\,\vec{\phi})\,dx - \int_{\partial K} \frac{\partial\vec{\phi}}{\partial n}.(\vec{u}-\vec{u}_h)\,ds \right\}$$

$$(36)\qquad (\vec{u}-\vec{u}_h,\vec{p})_{[L^2(\Omega_h)]^2} = \sum_{K \in \mathcal{C}_h} \int_K (\text{div}(\vec{u}-\vec{u}_h)\,\text{div}\,\vec{\phi} + \text{rot}(\vec{u}-\vec{u}_h)\,\text{rot}\,\vec{\phi})\,dx$$

$$+ \int_{\partial K} \left(\frac{\partial\vec{\phi}}{\partial n} - \vec{n}\,\text{div}\,\vec{\phi} + \vec{t}\,\text{rot}\,\vec{\phi} - \frac{\partial\vec{\phi}}{\partial n}\right).(\vec{u}-\vec{u}_h)\,ds .$$

Or, sur chaque triangle : $m_K(\text{div}(\vec{u}-\vec{u}_h)) = \frac{1}{\text{mes}(K)} \int_K (f - m_K(f))\,dx = 0$, $\text{rot}(\vec{u}-\vec{u}_h) = 0$, donc :

$$(37)\qquad \left| \sum_{K \in \mathcal{C}_h} \int_K \text{div}(\vec{u}-\vec{u}_h)\,\text{div}\,\vec{\phi} + \text{rot}(\vec{u}-\vec{u}_h)\,\text{rot}\,\vec{\phi}\,dx \right| \leq C\,h\,|\vec{\phi}|_{2,\Omega_h}\,||\vec{u}-\vec{u}_h||_h ,$$

$$\leq C\,h\,|\vec{\phi}|_{2,\Omega}\ a(\vec{u}-\vec{u}_h, \vec{u}-\vec{u}_h)^{1/2} .$$

Il reste à majorer :

$$(38)\qquad \sum_{K\in\mathcal{C}_h}\int_{\partial K}\left(\vec{t}\ \mathrm{rot}\ \vec{\phi}-\vec{n}\ \mathrm{div}\ \vec{\phi}\right).(\vec{u}-\vec{u}_h)\ ds$$
$$=\sum_{K\in\mathcal{C}_h}\int_{\partial K}\left\{(I-m_{K'})(\vec{t}\ \mathrm{rot}\ \vec{\phi}-\vec{n}\ \mathrm{div}\ \vec{\phi})(\vec{u}-\vec{u}_h)+m_{K'}(\vec{t}\ \mathrm{rot}\ \vec{\phi}-\vec{n}\ \mathrm{div}\ \vec{\phi})(\vec{u}-\vec{u}_h)\right\}ds$$

On a pour le premier terme :

$$(39)\qquad \left|\sum_{K\in\mathcal{C}_h}\int_{\partial K}\left\{(I-m_{K'})(\vec{t}\ \mathrm{rot}\ \vec{\phi}-\vec{n}\ \mathrm{div}\ \vec{\phi})(\vec{u}-\vec{u}_h)\right\}ds\right| \leq C\,h|\vec{\phi}|_{2,\Omega_h}||u-u_h||_h\ ,$$

et dans le second terme, les contributions des côtés intérieurs s'éliminent ; il reste :

$$(40)\qquad \sum_{K'\subset\Gamma_h}\int_{K'} m_{K'}(\vec{t}\ \mathrm{rot}\ \vec{\phi}-\vec{u}\ \mathrm{div}\ \vec{\phi})(\vec{u}-\vec{u}_h)ds = \sum_{K'\subset\Gamma_h}\int_{K'}(m_{K'}(\mathrm{rot}\ \vec{\phi}).(\vec{u}-\vec{u}_h).\vec{t}-m_{K'}(\mathrm{div}\ \vec{\phi}).(\vec{u}-\vec{u}_h).\vec{n})ds.$$

On a : $\int_{K'}\vec{u}.\vec{n} = \ell_{K'}g_h(A_{O,K'}) = \int_{K'}\vec{u}_h.\vec{n}\ ds$, et le dernier terme disparaît.

Enfin :

$$(41)\qquad \sum_{K'\subset\Gamma_h}\int_{K'} m_{K'}(\mathrm{rot}\ \vec{\phi}).(\vec{u}-\vec{u}_h).\vec{t}\ ds = \sum_{K'\subset\Gamma_h} m_{K'}(\mathrm{rot}\ \vec{\phi})\ m_{K'}\left((\vec{u}-\vec{u}_h).\vec{t}\right)\ell_{K'}$$

où $$\ell_{K'}\ m_{K'}(\mathrm{rot}\ \vec{\phi}) = \int_{K'}\left(\frac{\partial\vec{\phi}.\vec{n}}{\partial t}-\frac{\partial\vec{\phi}.\vec{t}}{\partial n}\right)ds$$

$$(42)\qquad \ell_{K'}\ m_{K'}(\mathrm{rot}\ \vec{\phi}) = -\int_{K'}\frac{\partial\vec{\phi}}{\partial n}\vec{t}\ ds + \vec{\phi}(A_{2,K'})\left(\vec{n}-\vec{\nu}(A_{2,K'})\right)-\vec{\phi}(A_{1,K'})\left(\vec{n}-\vec{\nu}(A_{1,K'})\right)+\vec{\phi}(A_{2,K'}).\vec{\nu}(A_{2,K'})-\vec{\phi}(A_{1,K'}).\vec{\nu}(A_{1,K'}).$$

De plus, puisque $\Delta\phi = 0$: $\int_{K'}\frac{\partial\vec{\phi}}{\partial n}.\vec{t}\ ds = \int_{\hat{K}'}\frac{\partial\vec{\phi}}{\partial\nu}\vec{t}\ ds,$

donc, compte-tenu de la condition $\frac{\partial(\vec{\phi}.\vec{\tau})}{\partial\nu}+\frac{1}{R}\vec{\phi}.\vec{\tau} = 0$:

$$\int_{K'}\frac{\partial\vec{\phi}}{\partial n}.t\ ds = \int_{\hat{K}'}\frac{\partial\vec{\phi}}{\partial\nu}(\vec{t}.\vec{\tau})ds + \int_{K'}\frac{1}{R}\vec{\phi}.\vec{t}\ ds$$
$$= \int_{\hat{K}'}\frac{\partial\vec{\phi}}{\partial\nu}(\vec{\tau}.\vec{\tau})ds - \int_{K'}\frac{\partial\vec{\phi}}{\partial s}(\vec{n}-\vec{\nu})ds + \int_{K'}\frac{\partial}{\partial s}\left(\vec{\phi}.(\vec{n}-\vec{\nu})\right)ds\ ,$$

ce qui nous donne en reportant dans (42) :

$$(43)\qquad \ell_{K'}\ m_{K'}(\mathrm{rot}\ \vec{\phi}) = \int_{\hat{K}'}\frac{\partial\vec{\phi}}{\partial\nu}(\vec{\tau}-\vec{\tau})ds - \int_{K'}\frac{\partial\vec{\phi}}{\partial s}(\vec{n}-\vec{\nu})ds\ ;$$

d'où :

$$\left|\sum_{K'\subset\Gamma_h}\int_{K'} m_{K'}(\mathrm{rot}\ \vec{\phi})(\vec{u}-\vec{u}_h).\vec{t}\ ds\right| \leq C\,h||\vec{\phi}||_{1,\Gamma}\left\{\sum_{K'\subset\Gamma_h}\left(m_{K'}(\vec{u}-\vec{u}_h).\vec{t}\right)^2\ell_{K'}\right\}^{1/2}$$
$$\leq C\,h||\vec{\phi}||_{1,\Gamma}\,a_h(\vec{u}-\vec{u}_h,\vec{u}-\vec{u}_h)^{1/2}.$$

d'où le théorème en utilisant (22).

LA RESOLUTION NUMERIQUE

L'espace $V_{h,O}$ peut être interprété comme la somme directe de deux sous-espaces V_1 et V_2. Le sous-espace V_1 (respectivement V_2) contient les fonctions de $V_{h,O}$ dont la composante tangentielle (respectivement normale) au milieu de chaque côté de triangle est nulle. Ces deux sous-espaces sont orthogonaux pour le produit scalaire dans $(L^2(\Omega_h))^2$; étant donné une fonction $\vec{v}_h\in V_{h,O}$, on note $\vec{v}_h^1$ (respectivement $\vec{v}_h^2$) la fonction qui admet au milieu de

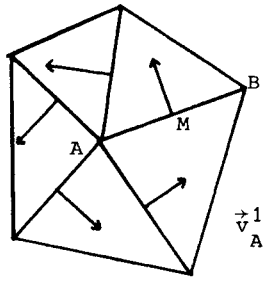
chaque côté de triangle la même composante normale (respectivement tangentielle) que $\vec{v}_h$, et dont la composante tangentielle (respectivement normale) est nulle.

Il est immédiat que :

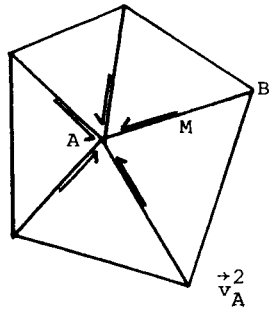
$$(44) \qquad \vec{v}_h^1 \in V_1 \quad ; \quad \vec{v}_h^2 \in V_2 \quad ; \quad \vec{v}_h = \vec{v}_h^1 + \vec{v}_h^2 .$$

On note n_s le nombre de sommets de triangles, n_i le nombre de sommets inclus dans Ω_h, et n_t le nombre de triangles ; on vérifie alors que

$$(45) \qquad \dim(V_{h,0}) = 2(n_t - n_i + 1) \; ; \; \dim V_1 = n_i \; ; \; \dim V_2 = n_s - 1$$



Cette remarque incite à associer à chaque sommet intérieur à Ω_h une fonction de base de V_1 et une fonction de base de V_2, et à chaque sommet situé sur Γ_h, sauf l'un d'entre eux, une fonction de base de V_2 ; toutes ces fonctions de base ayant un support réduit à la réunion des triangles adjacents au sommet correspondant.



Conformément aux figures ci-contre, on peut associer à chaque sommet A une fonction $\vec{v}_A^1 \in V_1$ et une fonction $\vec{v}_A^2 \in V_2$ telles que si K' est un côté de triangle admettant A comme extrémité : (on note B l'autre extrémité et M le milieu)

$$(46) \qquad \vec{v}_A^2(M) = \frac{\overrightarrow{BA}}{|BA|^2} \quad ; \quad \vec{v}_A^1(M) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \vec{v}_A^2(M)$$

Il semble naturel de prendre sur la frontière le sommet auquel n'est associée aucune fonction de base *; on note A_o ce sommet.

Pour résoudre (17), il faut connaître un élément $\vec{w}_h \in V_h(f,g)$, de façon à connaître le second membre de (18). Pour construire $\vec{w}_h$, on numérote tous les triangles de 1 à n_t, en partant d'un triangle dont un côté est inclus dans Γ_h, et aboutissant à un triangle admettant A_o pour sommet, et voisin du triangle N° 1, et enfin de telle façon que :

$$(47) \qquad \forall n \leq n_t, \Big[\bigcup_{0 \leq j \leq n} K_j \quad \text{est de frontière connexe, sans point double,} \Big(\text{en notant } K_o = \Big[\Omega_h \Big) .$$

On peut alors construire $\vec{w}_h$: en ne passant qu'une seule fois dans chaque triangle dans l'ordre prescrit ci-dessus, on obtient explicitement sa composante dans V_1, et on prend égale à zéro sa composante dans V_2.

Pour résoudre (18), il reste à construire la matrice associée à la forme bilinéaire $a_h(.,.)$ et le second membre, $\vec{w}_h$ n'étant connu que par ses valeurs aux milieux des côtés. On note $\vec{v}_i^1$ $(1 \leq i \leq n_i)$ la base de V_1 et $\vec{v}_i^2$ $(1 \leq i \leq n_s - 1)$ la base de V_2. On peut évaleur $a_h(\vec{w}_h, \vec{v}_i^1)$ et $a_h(\vec{w}_h, \vec{v}_i^2)$ par une formule qui n'utilise que les valeurs aux milieux des côtés, ce qui évite de projeter $\vec{w}_h$ sur la base $\{\vec{v}_i^1\}$.

La matrice $a_h(\vec{v}_i^{\,\ell}, \vec{v}_j^{\,k})$ est la somme de deux termes ; le premier est le produit des gradients, et l'autre est une combinaison des moyennes des composantes tangentielles sur Γ_h. Ce dernier terme est la plupart du temps nul, et peut être calculé en même temps que le premier

* *Ce sommet exclu correspond numériquement à la relation de comptabilité :*

$$\int_\Gamma \operatorname{rot} \vec{u} \, dx = 0 \Rightarrow \int_\Gamma \vec{u}.\vec{t} \, ds = 0.$$

terme du second membre de (18). Le produit des gradients est nul, sauf lorsque les fonctions de base sont associées à deux sommets d'un même triangle, ou au même sommet ; le produit est alors donné par l'une des formules suivantes, qui utilisent les notations de la figure ci-dessous : ($k \in \{1,2\}$)

$$(48) \qquad \sum_{K \in \mathcal{C}_h} \int_K (\text{grad } v_i^k, \text{ grad } v_i^k)\,dx = \sum_{K_\ell \text{ de sommet } A_i} \frac{2}{\text{mes}(K_\ell)} \sin^2(\alpha_{i,K_\ell}) \ ;$$

$$(49) \qquad \sum_{K \in \mathcal{C}_h} \int_K (\vec{\text{grad}}\ \vec{v}_i^k, \vec{\text{grad}}\ \vec{v}_j^k)\,dx = -\frac{2}{|A_i\,A_j|} \left[\sin(2\gamma_{ij,K_2}) + \sin(2\gamma_{ij,K_2})\right] ,$$

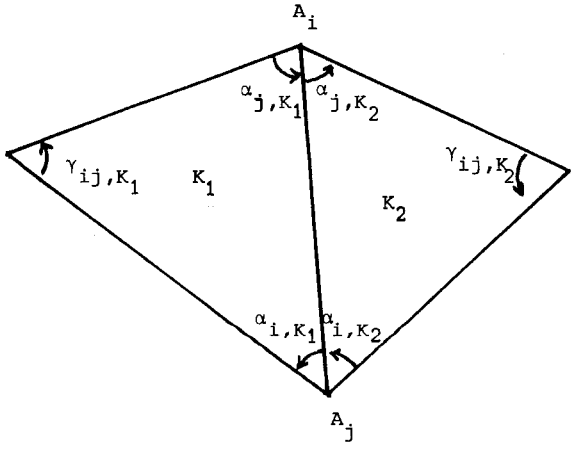
avec $A_i \neq A_j$, $A_i\,A_j = \partial K_1 \cap \partial K_2$;

$$(50) \qquad \sum_{K \in \mathcal{C}_h} \int_K (\vec{\text{grad}}\ \vec{v}_i^1, \vec{\text{grad}}\ \vec{v}_j^2)\,dx = \frac{4}{|A_i\,A_j|} \left[\sin^2(\gamma_{ij,K_1}) - \sin^2(\gamma_{ij,K_2})\right] \text{ (pour les mêmes } A_i \text{ et } A_j)$$

terme nul dès que : $\gamma_{ij,K_1} = \gamma_{ij,K_2}$;

Enfin :

$$(51) \qquad \sum_{K \in \mathcal{C}_h} \int_K (\vec{\text{grad}}\ \vec{v}_i^1, \vec{\text{grad}}\ \vec{v}_i^2)\,dx = 0 \ , \quad \text{ainsi que tous les termes non mentionnés.}$$



BIBLIOGRAPHIE

(1) CROUZEIX - RAVIART *"Conforming and non conforming finite element methods for solving the stationnary Stokes equations"*

RAIRO R3 (Dec. 1973) p.33-76