PUBLICATIONS MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUES DE RENNES

JEAN CEA

# Approximation variationnelle Convergence des éléments finis Un test

*Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes*, 1976, fascicule S5
« Journées « éléments finis » », , p. 1-29

<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1976___S5_A4_0>

© Département de mathématiques et informatique, université de Rennes, 1976, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications mathématiques et informatiques de Rennes » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme*
*Numérisation de documents anciens mathématiques*
http://www.numdam.org/

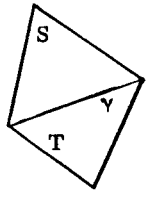
# APPROXIMATION VARIATIONNELLE
# CONVERGENCE DES ELEMENTS FINIS
# UN TEST

Jean CEA
I.M.S.P.
Mathématiques
06034 NICE CEDEX
France

Février 1976

## INTRODUCTION

On s'intéresse à la construction systématique d'éléments finis tels que la solution $u_h$ d'un problème approché converge vers la solution $u$ du problème exact. La construction de ces éléments ne dépend pas des formes bilinéaires, elle ne dépend que de l'espace à approcher. Le résultat essentiel est la condition suffisante suivante : le problème approché sera "convergent" si tout élément $u_h$ de l'espace approché à la propriété suivante : si $\gamma$ est une interface entre 2 éléments on a :




$$(\star)\quad \frac{1}{|\gamma|}\int_\gamma u_h^S \, d\sigma = \frac{1}{|\gamma|}\int_\gamma u_h^T \, d\sigma \,, \quad |\gamma| = \int_\gamma d\sigma$$

où $u_h^S$ et $u_h^T$ désignent les traces de $u_h$ sur S et sur T .

Dans le cas d'éléments qui approchent des éléments de $H^2(\Omega)$ on écrira la relation $(\star)$ pour $u_h$ , $D_1 u_h$ , $D_2 u_h$ ; cependant la relation $(\star)$ pour $u_h$ peut être remplacé par une relation très simple :

$$(\star\star)\quad \begin{cases} \forall\, \gamma \qquad \exists\, A, B \in \gamma \quad \text{tel que} \\ u_h^S(A) = u_h^T(B) \end{cases}$$

On limitera notre étude au cas où les points $A, B$ sont des sommets ou des milieux de côtés, mais le résultat est plus général. Le § 1 sert à définir le contexte dans lequel on va travailler, le § 2 donne une construction systématique d'éléments finis pour l'approximation de $H^1(\Omega)$ .

Dans le § 3 on s'intéresse à l'approximation de $H^2(\Omega)$ .

## § 1 . LES PROBLEMES VARIATIONNELS

### 1. Le problème de Neumann d'ordre 2m

L'espace V : $H^m(\Omega)$

$\Omega$ est un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ de frontière régulière ; on rappelle que

$$v \in H^m(\Omega) \Leftrightarrow v \in L^2(\Omega), \quad D^p v \in L^2(\Omega)$$

pour tout multi-indice $p = (p_1, \ldots, p_n)$ tel que $|p| = p_1 + \ldots + p_n \leq m$

$$D^p v = \frac{\partial^{p_1 + \ldots + p_n}}{\partial x_1^{p_1} \ldots \partial x_n^{p_n}} v \quad .$$

On pose :

$$(u, v)_V = \sum_{o \leq |p| \leq m} (D^p u, D^p)_{L^2(\Omega)}$$

La forme bilinéaire a(u, v) :

pour $u, v \in V$ on pose

$$a(u, v) = \sum_{p,q} \int_\Omega a_{p,q}(x) D^q u(x) D^p v(x) \, dx$$

où les $a_{p,q}$ sont donnés dans $L^\infty(\Omega)$ et vérifient l'hypothèse de coercivité :

$$(1.1) \qquad \sum_{p,q} a_{p,q}(x) \xi_p \xi_q \geq \alpha \sum_p |\xi_p|^2 \qquad \text{p.p. sur } \Omega$$

pour tout $\xi = (\ldots, \xi_p, \ldots) \in \mathbb{R}^N$

le nombre N étant défini maintenant.

Le nombre N = N(n, m) :

N désigne le nombre de multi-indices $p = (p_1, \ldots, p_n)$ tels que $o \leq |p| \leq m$.
Compte tenu des hypothèses, la forme $u, v \to a(u, v)$ est bilinéaire, bicontinue, coercitive au sens suivant :

$$(1.2) \qquad a(v, v) \geq \alpha \| v \|_V^2 \qquad \forall\, v \in V$$

La forme linéaire L(v)

On prend pour $v \in V$

$$L(v) = \int_\Omega f(x) v(x) \, dx$$

où f est donnée dans $L^2(\Omega)$

$v \to L(v)$ est une forme linéaire et continue sur T

Le Problème P : déterminer $v \in V$ tel que :

$$(1.3) \qquad a(u, v) = L(v) \qquad v \in V$$

On sait que ce problème admet une solution et une seule. Pour les problèmes variationnels cf J. LIONS - E. MAGENES [ ] .

### 2. Approximation de l'espace $H^m(\Omega)$ : l'espace $V_h^m$

L'espace produit F

Dans [ ] J. CEA introduisait l'espace V comme un sous espace de l'espace produit $F = \left(L^2(\Omega)\right)^{N(n, m)}$ ; en effet soit $v \in F$, on note les composantes de v de la façon suivante

$$v \equiv (\ldots, v_p, \ldots) \qquad p = (p_1, \ldots, p_n), \; o \leqslant |p| \leqslant m$$

visiblement $H^m(\Omega)$ peut être identifié avec le sous espace de F des éléments $v = (v_o, \ldots, v_p, \ldots)$ tels que :

$$v_p = D^p v_o$$

Notons que :

$$(u, v)_F = \sum (u_p, v_p)_{L^2(\Omega)} \qquad o \leqslant |p| \leqslant m$$

$$(u, v)_V = \sum (D^p u, D^p v)_{L^2(\Omega)}$$

La triangulation :

On partage $\Omega$ en éléments $K_\ell$, $\ell \in L$, L un ensemble d'indices donné ; on suppose que $\mathring{K}_\ell \cap \mathring{K}_{\ell'} = \emptyset$ . $\forall\, \ell \neq \ell'$ et que $\overline{\Omega} = \cup_\ell \overline{K}_\ell$ ; on pose

$$h = \max_{\ell \in L} (\text{diam } K_\ell)$$

et on suppose qu'on a, en fait, une famille de triangulations $\mathcal{T}_h$, avec $h \to o$ ; on suppose que la triangulation est "régulière" (pas d'écrasement d'éléments ...) .

L'espace $V_h^m$ :

On définit sur K un espace vectoriel $V_{h,K}^m$ de dimension finie, de fonctions régulières (des polynomes ...) .

La notation $\tilde{D}^p$ : soit $v_h$ une fonction définie sur $\Omega$ et telle que $\forall K \in \mathcal{T}_h \quad v_h\big|_K \in V_{h,K}^m$ ; à $v_h$ on va associer des fonction $\tilde{D}^p$ définies sur $\Omega$, appartenant à $L^2(\Omega)$ et vérifiant

$$\tilde{D}^p v_h\big|_K = D^p\left(v_h\big|_K\right)$$

la dérivée $D^p$ est la dérivée ordinaire dans K . Si $v_h$ est localement un polynome , $\tilde{D}^p v_h$ est aussi localement un polynome (dérivé du précédent) ; on aura donc

$$(\ldots, \tilde{D}\ v_h, \ldots) \in F$$

$V_h^m$ sera un sous-ensemble de tels éléments ; nous étudierons plus loin le problème du "raccordement" des $v_h\big/_K$

Hypothèse A :

$V_h$ est un sous espace FERME de F

$$\|v_h\|_F = o \Rightarrow v_h = o$$

Alors $V_h$ est un espace de Hilbert, muni du produit scalaire

$$(u, v)_{V_h} = \sum_{o \le |p| \le m} (\tilde{D}^p u,\ \tilde{D}^p v)_{L^2(\Omega)}$$

Hypothèse B :

$\forall\, v \in V$ , il existe $r_h v \in V_h$ tel que

$$\lim_{h \to o} \|r_h v - v\|_F = o .$$

Hypothèse C :

On suppose que :

si $u_h \in V_h^m$ , $\|u_h\|_F \le c$ , $\lim u_h = u \in F$ dans F faible

alors $u \in V$ .

On peut interpréter les hypothèses B et C de la manière suivante : on veut remplacer V par un espace voisin $V_h$ , l'hypothèse B assure que $V_h$ n'est pas trop "petit" (il y a assez d'éléments dans $V_h$ pour approcher n'importe quel élément de V) tandis que l'hypothèse C assure que $V_h$ n'est



pas trop grand (un élément qui est dans la "limite de $V_h$" est obligatoirement dans V .)

## 3. Les problèmes approchés

La forme bilinéaire sur $F \times F$ :

On la note a(u, v) :

$$u, v \in F , \quad u = (\ldots, u_p, \ldots) \quad v = (\ldots, v_p, \ldots)$$

$$a(u, v) = \sum_{p,q} \int_\Omega a_{p,q}\, u_q\, v_p$$

elle est coercitive sur les 3 espaces F , V , $V_h^m$

La forme linéaire sur F :

$$v = (\ldots, v_p, \ldots)$$

$$L(v) = (f, v_o)_{L^2(\Omega)}$$

Le problème $P_h$ : déterminer $u_h \in V_h^m$ tel que

$$(3.1) \qquad a(u_h, v_h) = L(v_h) \qquad \forall\, v_h \in V_h^m$$

si $u_h = (\ldots, \tilde{D}^p u_{o,h}, \ldots)$ , $v_h = (\ldots, \tilde{D}^p{}_{o,h}, \ldots)$ .

On a, en identifiant $u_{o,h}$ et $u_h$

$$(3.2) \qquad \begin{cases} u_h \in V_h^m \\ \sum_{p,q} \int_\Omega a_{p,q}\ \tilde{D}^q u_h \cdot \tilde{D}^p v_h\ dx = \int_\Omega f\ v_h\ dx . \\ \forall\, v_h \in V_h^m \end{cases}$$

Théorème 3.1 : sous les hypothèses A, B, C et celles du problème P , alors

1) le problème P a une solution u et une seule
2) le problème $P_h$ a une solution $u_h$ et une seule
3) de plus

$$\lim_{h \to o} \|u_h - u\|_F = o$$

i.e. $\forall\, p \quad o \le |p| \le m \quad \lim_{h \to o} \|\tilde{D}^p u_h - D^p u\|_{L^2(\Omega)} = o$ .

Démonstration :

Les points 1) et 2) sont des conséquences du lemme de Lax Milgram ; établissons le point 3 .

Convergence faible :

On a : $a(u_h, u_h) = L(u_h)$

d'où il vient

$$\| u_h \|_F \leq \| f \|_{L^2(\Omega)}$$

on peut donc extraire une sous-famille $u_{h'}$, faiblement convergente dans F vers un élément w de F

$$\begin{cases} \|u_{h'}\| \leq c \\ u_{h'} \rightharpoonup w \in F \end{cases}$$

alors d'après l'hypothèse C on a $w = V$ ; mais

$$a(u_h , r_h v) = L(r_h v) .$$

Compte tenu des convergences $u_{h'} \rightharpoonup w$ , $r_h v \to v$ on a par passage à la limite

$$a(w, v) = L(v) \qquad v \in V$$

donc $w = u$ et $u_h \rightharpoonup u$ dans F faible.

Convergence forte : on a :

$$a(u - u_h , u - u_h) = a(u, u) - a(u, u_h) - a(u_h, u) + a(u_h, u_h)$$

$$= L(u) - a(u, u_h) - a(u_h, u) + L(u_h)$$

et comme $u_h \rightharpoonup u$ , cela entraîne

$\lim a(u - u_h , u - u_h) = L(u) - a(u, u) - a(u, u) + L(u) = o$ .

La coercivité entraîne alors la convergence forte.

Remarque 3.1

Ce théorème figure dans J.CEA [ ] dans un cadre plus général ; notons les points suivants : il n'est pas nécessaire de supposer que la forme $a(u, v)$ est symétrique, en d'autres termes que le problème P est issu d'un problème de minimisation ; l'introduction de l'espace F a permis de sortir du cadre de la méthode de Galerkin et d'approcher séparément les dérivées $D^p u$ par des éléments de $L^2(\Omega)$, l'approximation étant dite alors EXTERNE ; dans le cas où $V \subset V_h$ l'approximation est dite INTERNE

Remarque 3.2 :

Dans le cas de l'approximation interne, l'hypothèse C est alors automatiquement vérifiée .

Remarque 3.3 :

On a exposé la méthode sur un exemple ; en réalité elle est beaucoup plus générale et on peut l'appliquer à des sous espaces d'espaces produits $\left(H^m(\Omega)\right)^q$ .

Les tests A, B, C

Pour se rapprocher du "langage Ingénieur", on emploiera le mot TEST au lieu d'hypothèse. Ainsi pour être assuré de la convergence de la méthode utilisée, notre espace $V_h^m$, avec un choix particulier d'éléments finis, doit passer avec succès les tests A, B, C.

Dans toute la suite, on va essentiellement se préoccuper du test C qui assure le "raccordement" des éléments lorsque $h \to o$ . Notons qu'il n'y a absolument rien à vérifier sur les formes bilinéaires et linéaires. Il ne s'agit ici que de l'approximation des espaces.

Si on veut calculer les formes bilinéaires et linéaires par des formules de quadratures, alors là seulement on pourra introduire des tests (de consistance en particulier!)

Il semble donc qu'il y ait une différence entre ce test C et le Patch Test cf. STRANG-FIX [ ] et la bibliographie de l'ouvrage.

## § 2 . APPROXIMATION DE $H^1(\Omega)$ $\Omega \subset \mathbb{R}^2$

### 1. L'espace $V_h^1$ et le test C :

$H^1(\Omega)$ est un sous ensemble de $F_1 = \left(L^2(\Omega)\right)^3$

$$u \equiv (u, D_1 u, D_2 u) \qquad D_i u = \frac{\partial u}{\partial x_i} \quad i = 1,2$$

De même $V_h^1$ est un sous espace de $F_1$

$$v_h \equiv (v_h, \tilde{D}_1 v_h, \tilde{D}_2 v_h)$$

où $\tilde{D}_i v_h \big|_K = D_i \left(v_h \big|_K\right)$ dérivée ordinaire dans K

$$\left(u_h, v_h\right)_{V_h^1} = \left(u_h, v_h\right)_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^{2} \left(\tilde{D}_i u_h, \tilde{D}_i v_h\right)_{L^2(\Omega)}$$

1ère forme du TEST C :

$$\left.\begin{array}{l} u_h \in V_h^1 \,,\ \|u_h\|_{F_1} \leq C \\ u_h \rightharpoonup u \in F_1 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad v \in V = H^1(\Omega)$$

Notons que $u_h \rightharpoonup u \in F_1$ signifie que, si $u = (u_o, u_1, u_2)$

$u_h \rightharpoonup u_o \in L^2(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ faible

$\tilde{D}_1 u_h \rightharpoonup u_1 \in L^2(\Omega)$ "

$\tilde{D}_2 u_h \rightharpoonup u_2 \in L^2(\Omega)$ "

il faut montrer que $u_1 = D_1 u_o$, $u_2 = D_2 u_o$ (donc que $u_o \in H^1(\Omega)$) .

Cela signifie que $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ ,

$$(u_i, \varphi) + (u_o, D_i \varphi) = o \qquad i = 1,2$$

On peut dire les choses autrement :

2ème forme du TEST C :

$$\left.\begin{array}{l} \|u_h\|_{V_h^1} \leq C \\ u_h \in V_h \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \ , \ \text{pour } i = 1,2$$

$$\lim_{h \to o} \left\{ (\tilde{D}_i u_h, \varphi) + (u_h, D_i \varphi) \right\} = o$$

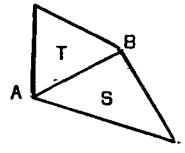
les 2 formes sont évidemment équivalentes; c'est cette 2ème forme que nous allons utiliser.

### 2. Une condition suffisante pour que le test C soit passé dans $H^1(\Omega)$ .

Voyons d'abord quelques définitions : $u_h \in V_h^1$ est définie localement sur chaque élément K de la triangulation ; on pose $u_h^K = u_h \big|_K$ ; $u_h^K$ a une trace sur la frontière $\partial K$, notée $\gamma u_h^K$ , ou $u_h^K$ , ou $u_h$ s'il n'y a pas d'ambiguité.

La propriété V.M. (valeur moyenne) :

On dira que $u_h$ a la propriété V.M. si $\forall T, S \in \mathcal{T}_h$ , ayant un côté commun AB on a :




$$(2.1) \qquad \frac{1}{AB} \int_{AB} \gamma u_h^T \, d\sigma = \frac{1}{AB} \int_{AB} \gamma u_h^S \, d\sigma \ .$$

Cette propriété est trivialement vérifiée si $u_h \in C^o(\Omega)$ .

On va démontrer le

Théorème 2.1. : si tout élément de $V_h^1$ a la propriété V.M. alors le test C est passé dans $H^1(\Omega)$ .

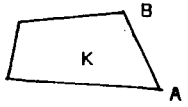
Démonstration :

Commençons par donner une notation :

• à tout élément $u_h$ on va associer une fonction définie sur $\Omega$ , constante sur chaque $K \in \mathcal{T}_h$ ; elle sera notée $\hat{u}_h$

$$\hat{u}_h\big|_K = \frac{1}{|K|} \int_K u_h^K(x)\, dx \quad , \quad |K| = \int_K dx$$

• On associe à la restriction $u_h^K$ de $u_h$ à K une fonction $\tilde{u}_h^K$ définie sur $\partial K$ , constante sur chaque côté :




$$\tilde{u}_h^K\big|_{AB} = \frac{1}{AB} \int_{AB} \gamma\, u_h^K\, d\sigma$$

S'il n'y a pas d'ambiguité on écrira $\hat{u}_h$ , $\tilde{u}_h$ au lieu de $\hat{u}_h\big|_K$ , $\tilde{u}_h^K$ , ...

Démontrons le théorème :

Soit $u_h \in V_h^1$ tel que

$$\|u_h\|^2_{V_h^1} = \|u_h\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\tilde{D}_1 u_h\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\tilde{D}_2 u_h\|^2_{L^2(\Omega)} \leq C$$

soit $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ et i = 1 ou 2 ; il s'agit de montrer le test C sous la 2ème forme :

$$\lim A_i(u_h, \varphi) = 0 \tag{2.2}$$

où

$$A_i(u_h, \varphi) = \left(\tilde{D}_i u_h, \varphi\right)_{L^2(\Omega)} + \left(u_h, \tilde{D}_i \varphi\right)_{L^2(\Omega)} . \tag{2.3}$$

On a, en supprimant momentanément l'indice h ,

$$A_i(u, \varphi) = \sum_K \left(D_i u, \varphi\right)_{L^2(K)} + \left(u, D_i \varphi\right)_{L^2(K)}$$
$$= \sum_K \int_{\partial K} u.\varphi.\eta_i \, d\sigma$$

la normale extérieure à $\partial K$ ayant pour cosinus directeurs $(\eta_1, \eta_2)$

grâce à l'hypothèse V.M. on a :

$$A_i(u, \varphi) = \sum_K \int_{\partial K} (u - \tilde{u})\, \varphi\, \eta_i \, d\sigma$$

mais puisque $\tilde{u}$ est défini par valeur moyenne et que $\tilde{\varphi}$ est constante sur chaque côté, on a aussi

$$A_i(u, \varphi) = \sum_K \int_{\partial K} (u - \tilde{u})(\varphi - \tilde{\varphi})\, \eta_i \, d\sigma$$

En ajoutant et en retranchant $\hat{u}$ et $\hat{\varphi}$ , on a :

$$A_i(u, \varphi) = \sum_K \int_{\partial K} (u - \hat{u} + \hat{u} - \tilde{u})(\varphi - \hat{\varphi} + \hat{\varphi} - \tilde{\varphi})\, \eta_i \, d\sigma$$

Ce qui conduit à :

$$A_i(u, \varphi) = \sum_K \int_{\partial K} (u - \hat{u})(\varphi - \hat{\varphi})\, \eta_i \, d\sigma + \sum_K \int_{\partial K} (u - \hat{u})(\hat{\varphi} - \tilde{\varphi})\, \eta_i \, d\sigma$$
$$+ \sum_K \int_{\partial K} (\hat{u} - \tilde{u})(\varphi - \tilde{\varphi})\, \eta_i \, d\sigma$$

Sur chaque coté $\hat{u} - \tilde{u}$ est constant, donc le dernier terme est nul d'où :

$$\begin{cases} A_i(u, \varphi) = B_i(u, \varphi) + C_i(u, \varphi) \\ B_i(u, \varphi) = \sum_K \int_{\partial K} (u - \hat{u})(\varphi - \hat{\varphi})\, \eta_i \, d\sigma \\ C_i(u, \varphi) = \sum_K \int_{\partial K} (u - \hat{u})(\hat{\varphi} - \tilde{\varphi})\, \eta_i \, d\sigma = \sum_K \int_{\partial K} (\tilde{u} - \hat{u})(\hat{\varphi} - \tilde{\varphi})\, \eta_i \, d\sigma \end{cases} \tag{2.4}$$

On peut réécrire $B_i$ sous la forme ;

$$B_i(u, \varphi) = \sum_K \left\{ \left(D_i(u - \hat{u}), \varphi - \hat{\varphi}\right)_{L^2(K)} + \left(u - \hat{u}, D_i(\varphi - \hat{\varphi})\right)_{L^2(K)} \right\}$$

$$B_i(u, \varphi) = \left(D_i u, \varphi - \hat{\varphi}\right)_{L^2(\Omega)} + \left(u - \hat{u}, D_i \varphi\right)_{L^2(\Omega)}$$

on vérifie facilement que

$$\lim_{h \to 0} B_i(u_h, \varphi) = 0 \quad . \tag{2.5}$$

Pour majorer $C_i$, on utilise le fait que $|\hat{\varphi} - \tilde{\varphi}| \leq C_\varphi . h$ et que le nombre d'éléments est d'ordre $\frac{1}{h^2}$ ceci est en fait une hypothèse sur la triangulation;

on a en utilisant plusieurs fois Cauchy-Schwartz :

$$|c_i(u,\varphi)|^2 \le \frac{c_o}{h^2} \sum_K \int_{\partial K} |\hat{u}-\tilde{u}|^2 d\sigma \cdot \int_{\partial K} |\hat{\varphi}-\tilde{\varphi}|^2 d\sigma$$
$$\le c_1 \cdot h \sum_K \int_{\partial K} |\hat{u}-\tilde{u}|^2 d\sigma$$

admettons un instant le :

Lemme 2.1. : $\forall\, v \in H^1(K)$ , pour tout coté $\gamma$ de K on a :

$$|\hat{u} - \tilde{u}_\gamma| \le c \, \|u\|_{H^1(K)} \qquad (2.6)$$

alors il vient :

$$|c_i(u,\varphi)|^2 \le c_2 h^2 \sum_K \|u\|^2_{H^1(K)}$$
$$|c_i(u,\varphi)|^2 \le c_2 h^2 \|u\|^2_{F_1}$$

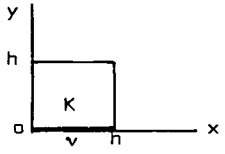
et donc

$$\lim_{h\to o} c_i(u_h,\varphi) = o \qquad (2.7)$$

Avec (2.4) , (2.5) , (2.7) on obtient (2.2) .

Démonstration du lemme :

Cas du carré :




$$\tilde{u}_\gamma = \frac{1}{h}\int_o^h u(x,o)\,dx$$
$$\hat{u} = \frac{1}{h^2}\int_o^h\int_o^h u(x,y)\,dx\,dy$$

On a : $u(x,y) = u(x,o) + \int_o^y u'_y(x,t)\,dt$

d'où en intégrant sur le carré

$$\hat{u}\,h^2 = \tilde{u}_\gamma h^2 + \iint dx\,dy \int_o^y u'_y(x,t)\,dt$$
$$|(\hat{u}-u_\gamma)h^2|^2 = \left|\iint dx\,dy \int_o^y u'_y(x,t)\,dt\right|^2$$

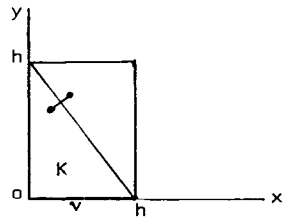


$$\le h^2 \iint dx\,dy \left|\int_o^y u'_y(x,t)\,dt\right|^2$$
$$\le h^3 \iint dx\,dy \int_o^h |u'_y(x,t)|^2\,dt$$
$$\le h^4 \iint |u'_y(x,t)|^2\,dt$$
$$\le h^4 \|u\|^2_{H^1(K)}$$

d'où

$$|\hat{u} - \tilde{u}_\gamma| \le \|u\|^2_{H^1(K)}$$

Cas du triangle isocèle :




on prolonge la fonction par reflexion sur l'hypothénuse du triangle et on applique le résultat précédent en remplaçant la norme dans $H^1(K)$ par 2 fois la norme.

Cas général: (triangles): par une transformation affine on se ramène au cas précédent. (cf cours CIARLET [ ] Chap.6 - Th.3 , Th.4)

Cas général : (quadrilatères): on partage le quadrilatère en 2 triangles.

Nous allons maintenant nous intéresser à des perturbations d'éléments qui passent le Test C.

Théorème 2.2 : si tout élément $u_h$ de $V_h^1$ a la propriété suivante :

$$(2.8)\quad \begin{cases} \text{Si } \|u_h\|_F \le C & \text{alors il existe } \pi u_h \in F \text{ tel que :} \\ \lim_{h\to o} (\pi u_h - u_h) = o \text{ dans F faible et que } \pi u_h \text{ passe le Test C} \end{cases}$$

alors le Test C est passé dans $H^1(\Omega)$ .

Démonstration: avant de démontrer ce théorème, fixons un peu de vocabulaire :

$\pi u_h$ est en général un élément fini plus simple que $u_h$ , $u_h$ peut être regardé

la démonstration est évidente : on retourne à l'hypothèse C, §1 , n°2. ∎

Regardons maintenant quelques utilisations possibles du théorème 2.2.

EXEMPLE 2.1.: on suppose ceci : si $u_h$ est borné dans F , on peut construire $\pi u_h$ qui vérifie le Test C et tel que

$$(2.9) \qquad \|u_h - \pi u_h\|^2_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^{n} \|\tilde{D}_i u_h - \tilde{D}_i \pi u_h\|^2_{L^2(\Omega)} \leq C.h\|u_h\|^2_F \ .$$

Alors (2.8) a lieu et le Test C est passé.

EXEMPLE 2.2.: on suppose maintenant, que $\pi u_h$ passe le test, que $\pi u_h - u_h \to o$ dans $L^2(\Omega)$ et que $\forall$ K on a

$$(2.10) \qquad \int_K D_i(u_h - \pi u_h)\, dx = o \qquad\qquad i = 1,2$$

Dans ces conditions (2.8) a lieu et le Test C est passé.

Remarque 2.1 :

Tout ce qui a été fait dans ce numéro est valable en dimension 3, (2.6) devant être changé en

$$(2.6)' \qquad |\hat{u} - \tilde{u}_\gamma|^2 \leq C \frac{1}{h} \|u\|^2_{H^1(K)}$$

mais le théorème 2.1 est inchangé.

## 3. Quelques éléments qui passent le Test C dans $H^1(\Omega)$ .

### 3.1 Relations qui permettent de définir des valeurs moyennes sur les côtés des éléments.

Soit u un polynome défini sur K , soit $\hat{u}$ son transporté sur l'élément de référence $\hat{K}$ dont 2 sommets sont $(-1,o),(+1,o)$ ; on va se limiter aux polynomes de d°5 ; on suppose que

$$\hat{u}(x_1,x_2) = a + [bx + cy] + [dx^2 + exy + fy^2] + [gx^3 + hx^2y + ixy^2 + jy^3] + [kx^4 + lx^3y + mx^2y^2 + nxy^3 + py^4] + [qx^5 + rx^4y + sx^3y^2 + tx^2y^3 + uxy^4 + vy^5]$$

$$\hat{u} = u_o + u_1 + \dots u_5$$

On pose

$$\psi(s) = \hat{u}(s,o)$$

$$m = \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} \psi(s)\, ds = \text{valeur moyenne de u sur un côté de K}$$

$$E_X = \frac{\psi(X)+\psi(-X)}{2} \qquad E_o = \psi(o)$$

$$D_X = \frac{\psi'(X)-\psi'(-X)}{2}$$

Pour étudier les différentes contributions des polynomes homogènes $u_o,\dots,u_5$ on dispose les résultats sous forme de tableau :

| $\hat{u}$ | $u_o$ | $u_1$ | $u_2$ | $u_3$ | $u_4$ | $u_5$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\psi(s)$ = | a | $+bs$ | $+ds^2$ | $+gs^3$ | $+ks^4$ | $+qs^5$ |
| m = | a | + o | $+\frac{d}{3}$ | + o | $+\frac{k}{5}$ | + o |
| $E_X$= | a | + o | $+dX^2$ | + o | $+kX^4$ | + o |
| $\psi'(s)$= | | b | $+2ds$ | $+3gs^2$ | $+4ks^3$ | $+5qs^4$ |
| $D_X$ = | | + o | 2ds | + o | $+4kX^3$ | + o |

3.1.1. Relations entre valeurs moyennes et valeurs ponctuelles de la fonction

type $m = f(E_X, E_Y, E_Z)$ où f est une fonction connue; X,Y,Z pouvant être distincts ou non; en fait $m = f\big(\psi(X), \psi(-X), \psi(Y), \psi(-Y), \psi(Z), \psi(-Z)\big)$

(3.1) $\hat{u} \in (P_1, xy)$ ; $m = E_o$ — ( o )

(3.2) $\hat{u} \in (P_1, xy)$ ; $m = E_1$ — (-1, +1)

(3.3) $\hat{u} \in (P_3, x^3y, x^2y^2, xy^3)$ ; $m = E_X$ , $X^2 = \frac{1}{3}$ — $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

(3.4) $\hat{u} \in (P_3, x^3y, u^2y^2, xy^3)$ ; $m = E_o + \frac{1}{3X^2}(E_X - E_o)$ $X = 1$ — (-1, o, 1)

(3.5) $\hat{u} \in (P_3, x^3y, x^2y^2, xy^3)$ ; $m = E_o + \frac{1}{3X^2}(E_X - E_o)$ $o < X < 1$ — (-X, o, +Y), $o < X < 1$

(3.6) $\hat{u} \in (P_3, x^3y, x^2y^2, xy^3)$ ; $m = \frac{X^2 E_1 - E_X}{X^2 - 1} + \frac{1}{3}\frac{E_X - E_1}{X^2 - 1}$ $o \le X < 1$ — (-1, -X, X, 1), $o < X < 1$



(3.7) $\hat{u} \in (P_5, x^5y, x^4y^2, x^3y^2, x^2, y^4, xy^5)$ ; $m = -\frac{2}{3}E_1 + \frac{5}{3}E_X$ $X^2 = \frac{1}{5}$ — $\left(-1, -\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}, 1\right)$

(3.8) $\hat{u} \in (P_5, x^5y, \ldots, xy^5)$ ; $m = f(E_o, E_X, E_Y)$ $o < X < Y \le 1$ — (-1, -X, o, X, Y), $o < X < Y \le 1$

(3.9) $\hat{u} \in (P_5, x^5y, \ldots, xy^5)$ ; $m = g(E_1, E_X, E_Y)$ $o \le X < Y < 1$ — (-1, -Y-X, X, Y, 1), $o \le X < Y$

3.1.2. Relations entre valeurs moyennes et valeurs ponctuelles de la fonction u et de ses dérivées premières.

On ne va pas expliciter les fonctions; on donne seulement la forme des résultats

$$m = f(E_X, E_Y, D_Z, D_V)$$

les points X,Y,Z,V étant différents ou non selon les cas.

Une première relation est du type :

(3.10) $\hat{u} \in P_3, x^3y, x^2y^2, xy^3)$ ; $m = f(E_X, D_Y)$ $o \le X \le 1$ $Y \neq o$

qui conduit à 2 cas particuliers

$(3.10)_1$ $X = o$ $o < Y \le 1$ — (-Y, o, +Y), $o < Y \le 1$

$(3.10)_2$ $X = 1$ $o < Y \le 1$ — (-1, -Y, +Y, +1), $o < Y \le 1$

$$(3.11)\begin{cases} \hat{u} \in (P_5, x^5y, x^4y^2, x^3y^3, x^2y^4, xy^5) \\ m = f(E_X, E_Y, D'_Z) \end{cases} \qquad \text{Contraintes sur } X, Y, Z$$

elle conduit à des cas particuliers :

$(3.11)_1$ $\quad X = o\ ,\quad o < Y \leq 1\ ,\quad Y^2 \neq 2Z^2$

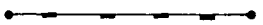
$(3.11)_2$ $\quad X = 1\ ,\quad \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & Y^2 & Z^4 \\ o & 2Z & 4Z^3 \end{pmatrix} \neq o$

Enfin on a une relation du type

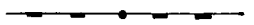
$$(3.12)\begin{cases} \hat{u} \in (P_5, x^5y, \ldots, xy^5) \\ m = f(E_X, D_Y, D_Z) \end{cases} \qquad \begin{array}{l} YZ(Z-Y)(Z+Y) \neq o \\ o \leq X \leq 1 \quad o < Y < Z \leq 1 \end{array}$$

qui conduit aux 3 cas :

$(3.12)_1$ $\quad X = 1$



$(3.12)_2$ $\quad X = o$



$(3.12)_3$ $\quad X \in ]o, 1[$

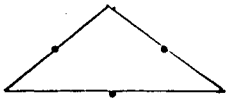
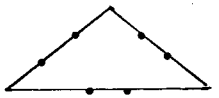
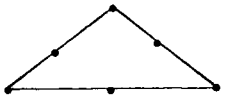
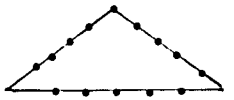
Notons ceci : on peut aussi établir des relations qui utilisent la dérivée seconde; nous ne le ferons pas ici.

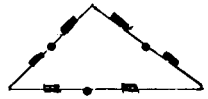
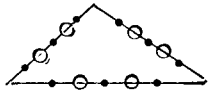
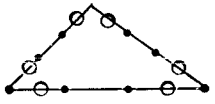
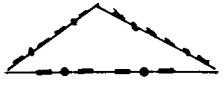
## 3.2 Quelques éléments

On choisit comme degrés de liberté les éléments qui servent à exprimer m dans les relations précédentes. Notons que dans plusieurs cas on ne fixera pas tous les degrés de liberté.

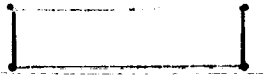
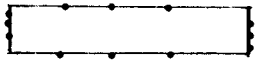
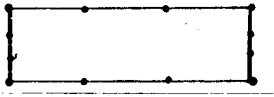
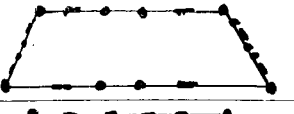
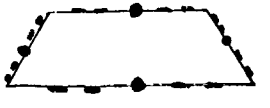
d = nombre de degrés de liberté imposés pour passer le Test C
p = nombre total de degrés.

TRIANGLES

| type | Schéma | d | d°P | p | points(sur -1, +1) | relation |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | | 3 | ≥1 | ≥3 | aucun | Th. 2.1 |
| 1 |  | 3 | 1 | 3 | 0 | (3.1) |
| 2 | | 3 | 1 | 10 | ± 1 | (3.2) |
| 3 |  | 6 | 3 | 10 | $\pm \frac{1}{\sqrt{3}}$ | (3.3) |
| 4 |  | 6 | 3 | 10 | ± 1,0 | (3.4) |
| 5 | | 9 | 3 | 10 | ± X,0<br>o < X < 1 | (3.5) |
| 6 | | 9 | 3 | 10 | ± 1 , ± Y<br>o < X < 1 | (3.6) |
| 7 | | 9 | 5 | 21 | ± 1 , $\pm \frac{1}{\sqrt{5}}$ | (3.7) |
| 8 |  | 15 | 5 | 21 | ± Y , ± X , o | (3.8) |
| 9 | | 15 | 5 | 21 | ± X , o, ± 1<br>o ≤ X < Y < 1 | (3.9) |

| type | S c h é m a | d | d°P | p | points | relation |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 10 |  | 9 | 3 | 10 | $\pm X \quad o$<br>$o < X \leq 1$ | $(3.10)_1$ |
| 11 | | 9 | 3 | 10 | $\pm 1 , \pm X$ | $(3.10)_2$ |
| 12 | | 15 | 5 | 21 | $0, \pm X, \pm Y$<br>contrainte | $(3.11)_1$ |
| 12' |  | 21 | 5 | 21 | $0 \pm X, \pm Y$<br>contrainte | $(3.11)_1$ |
| 13 | | 15 | 5 | 21 | $\pm 1, \pm X, \pm Y$<br>contrainte | $(3.11)_2$ |
| 13' |  | 21 | 5 | 21 | $\pm 1, \pm X, \pm Y$<br>contrainte | $(3.11)_2$ |
| 14 | | 15 | 5 | 21 | $\pm 1, \pm X, \pm Z$<br>$o < Y < Z < 1$ | $(3.12)_1$ |
| 15 | | 15 | 5 | 21 | $o , \pm Y, \pm Z$<br>$o < Y < Z \leq 1$ | $(3.12)_2$ |
| 16 |  | 18 | 5 | 21 | $\pm X, \pm Y, \pm Z$<br>$o \leq X \leq 1$<br>$o < Y < Z < 1$ | $(3.12)_3$ |
| | | | | | | |



| type | S c h é m a | d | d° P | p | points | relation |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | | 4 | > 2 | | aucun | Th.2.1 |
| 1 |  | 4 | $P_1, xy$ | 4 | $\pm 1$ | (3.1) |
| 2 | | 8 | $P_3$ | 10 | $\pm \frac{1}{\sqrt{3}}$ | (3.2) |
| 3 | | 8 | $P_3$ | 10 | $\pm 1, o$ | (3.4) |
| 4 |  | 12 | $P^3, x^3y, x^2y^2, xy^3$ | 12 | $\pm X, o$<br>$o < X \leq 1$ | (3.5) |
| 5 |  | 12 | $P_3, x^3y, x^2y^2, xy^3$ | 12 | $\pm 1 , \pm X$<br>$o < X < 1$ | (3.6) |
| 6 | | 12 | $P_5$ | 21 | $\pm 1, \pm \frac{1}{\sqrt{5}}$ | (3.7) |
| 7 | | 20 | $P_5$ | 21 | $\pm X, \pm Y, o$<br>$o < X < Y < 1$ | (3.8) |
| 8 | | 20 | $P_5$ | 21 | $\pm 1, \pm X, \pm Y$<br>$o \leq X < Y < 1$ | (3.9) |
| 9 | | 12 | $P_3, x^3y, x^2y^2, xy^3$ | 13 | $\pm X, o$<br>$o < X \leq 1$ | $(3.10)_2$ |
| 10 | | 20 | $P_5$ | 21 | $\pm X, \pm Y, o$<br>1 contrainte | $(3.11)_1$ |
| 11 |  | 20 | $P_5$ | 21 | $\pm 1, \pm X, \pm Y$<br>1 contrainte | $(3.11)_2$ |
| 12 | | 20 | $P_5$ | 21 | $\pm 1, \pm Y, \pm Z$<br>$o < Y < Z \leq 1$ | $(3.12)_1$ |
| 13 |  | 20 | $P_5$ | 21 | $\pm Y, \pm Z, o$<br>$o < Y < Z \leq 1$ | $(3.12)_2$ |

## § 3. APPROXIMATION DANS $H^2(\Omega)$ $\Omega \subset \mathbb{R}^2$

### 1. L'espace $V_h^2$ et le Test C dans $H^2(\Omega)$

$v \in H^2(\Omega)$ est identifié avec un élément de $F_2 = \left(L^2(\Omega)\right)^6$

$$v \equiv (v,\ D_1 v,\ D_2 v,\ D_{1,1} v,\ D_{1,2} v,\ D_{2,2} v)$$

où $\quad D_i v = \dfrac{\partial}{\partial x_i} v\ , \quad D_{i,j}\ v = \dfrac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_y} v$

De même un élément $v_h \in V_h^2$ est identifié avec un élément de $F_2$

$$v_h \equiv (v_h,\ \tilde{D}_1 v_h,\ \tilde{D}_2 v_h,\ \tilde{D}_{1,1} v_h,\ \tilde{D}_{1,2} v_h,\ \tilde{D}_{2,2} v_h)$$

et on a

$$\|v_h\|_{V_h^2} = \|v_h\|_{F_2}$$

la $2^{\text{ième}}$ forme du Test C est ici :

$$(1.1)\quad \left.\begin{array}{l} \|u_h\|_{V_h^2} \le c \\ u_h \in V_h^2 \end{array}\right| \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)\ , \text{ pour } i,j = 1,2 \\ \lim\limits_{h \to 0} \{(\tilde{D}_i u_h, \varphi) + (u_h, D_i \varphi)\} = 0 \\ \lim\limits_{h \to 0} \{(\tilde{D}_{i,j} u_h, \varphi) - (u_h, D_{j,i} \varphi)\} = 0 \end{array}\right.$$

ou encore

$$(1.2)\quad \left.\begin{array}{l} \|u_h\|_{V_h^2} \le c \\ u_h \in V_h^2 \end{array}\right| \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)\ , \text{ pour } i,j = 1,2 \\ \lim\limits_{h \to 0} \{(\tilde{D}_i u_h, \varphi) + (u_h, D_i \varphi)\} = 0 \\ \lim\limits_{h \to 0} \{(\tilde{D}_{i,j} u_h, \varphi) + (\tilde{D}_j u_h, D_i \varphi)\} = 0 \end{array}\right.$$

**Théorème 1.1 :** si tout élément $(u_h, \tilde{D}_1 u_h, \tilde{D}_2 u_h, \tilde{D}_{1,1} u_h, \tilde{D}_{1,2} u_h, \tilde{D}_{2,2} u_h)$ de $V_h^2$ est tel que $u_h$, $\tilde{D}_1 u_h$, $\tilde{D}_2 u_h$ ont la propriété Valeur Moyenne alors le Test C est passé dans $H^2(\Omega)$.

Démonstration:

On applique le Théorème 2.1 à $u_h, \tilde{D}_1 u_h, \tilde{D}_2 u_h$.

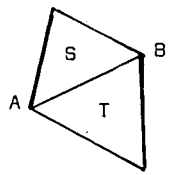
Cela va permettre la construction de nombreux éléments finis qui passent le Test C dans $H^2(\Omega)$; il suffit de choisir les degrés de liberté de façon que les 3 valeurs moyennes de $u_h, \tilde{D}_1 u_h, \tilde{D}_2 u_h$ s'expriment en fonction de ces degrés de liberté.

Notons la remarque importante suivante :

si $u_h$, $\tilde{D}_s u_h$, $\tilde{D}_n u_h$ ont la propriété V.M. alors $u_h$, $\tilde{D}_1 u_h$, $\tilde{D}_2 u_h$ aussi, et le Test C est passé; $D_s$ est la dérivée tangentielle, $D_n$ la dérivée normale à $\partial K$ ;

si maintenant, on impose aux éléments, le raccordement aux sommets de la triangulation, on obtient le

**Théorème 1.2 :** le Test C est passé dans $H^2(\Omega)$ si $\forall\, u_h \in V_h^2$ et pour toute interface AB commune à 2 éléments S et T on a :




$$(1.3)\quad \left\{\begin{array}{l} \bullet\ u_h^S(A) = u_h^T(A)\ , \quad u_h^S(B) = u_h^T(B) \\ \bullet\ \dfrac{1}{AB} \displaystyle\int_{AB} D_n\, u_h^S\, d\sigma = \frac{1}{AB} \int_{AB} D_n\, u_h^T\, d\sigma \end{array}\right.$$

$$D_n = \frac{\partial}{\partial n}$$

Démonstration :

Les relations (1.3) entraînent ceci : $\tilde{D}_s u_h$, $\tilde{D}_n u_h$ vérifient la propriété V.M.;

donc d'après le théorème 2.1 , $\tilde{D}_1 u_h$, $\tilde{D}_2 u_h$ passent le Test dans $H^1(\Omega)$ .

Il ne reste plus qu'à montrer que $u_h$ passe le test dans $H^1(\Omega)$.

Démontrons le dans le cas d'un triangle :si $u_h \in V_h^2$ , on désigne par $\pi u$ le polynome d'interpolation de d°1 de $u_h$ (dans chaque élément K de la triangulation). On sait que (cf.CIARLET [ ] )

$$(1.4) \qquad \left\| u_h - \pi u_h \right\|_{H^1(K)} \leq c\, h \left\| u_h \right\|_{H^2(K)}$$

la constante c ne dépendant pas de h.

On a maintenant :

$$A_i(u_h,\varphi) = \left(\tilde{D}_i u_h, \varphi\right)_{L^2(\Omega)} + \left(u_h, D_i\varphi\right)_{L^2(\Omega)}$$

mais $\pi u_h \in C^o(\Omega)$ et donc

$$(1.5) \qquad A_i(\pi u_h,\varphi) = \left(\tilde{D}_i\, \pi u_h, \varphi\right)_{L^2(\Omega)} + \left(\pi u_h,\, D_i\varphi\right)_{L^2(\Omega)} = o$$

d'où

$$A_i(u_h,\varphi) = A_i\left((u_h - \pi u_h)\,\varphi\right)$$

$$A_i(u_h,\varphi) = \left(\tilde{D}_i(u_h - \pi u_h), \varphi\right)_{L^2(\Omega)} + \left(u_h - \pi u_h,\, D_i\varphi\right)_{L^2(\Omega)}$$

Compte tenu de (1.4) il vient :

$$(1.6) \qquad \lim_{h \to o} A_i(u_h,\varphi) = o \ .$$

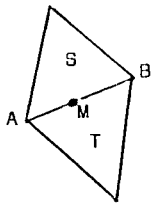
Cas des quadrilatères : on partage en 2 triangles et dans chaque triangle, on utilise le prolongement précédent.

On va établir maintenant un théorème analogue :

Théorème 1.3 : le Test C est passé dans $H^2(\Omega)$ si $\forall\, u_h \in V_h^2$ et pour toute



interface AB on a :




$$(1.7) \quad \begin{cases} u_h^S(M) = u_h^T(M) & M \text{ milieu de AB} \\ \dfrac{1}{\overline{AB}} \displaystyle\int_{AB} D_n u_h^S \, d\sigma = \dfrac{1}{\overline{AB}} \int_{AB} D_n u_h^T \, d\sigma \\ \dfrac{1}{\overline{AB}} \displaystyle\int_{AB} D_s u_h^S \, d\sigma = \dfrac{1}{\overline{AB}} \int_{AB} D_s u_h^T \, d\sigma \end{cases}$$

Démonstration:

Comme celle du Théorème 1.2 avec les changements suivants :

1) $\pi u_h$ interpole maintenant aux milieux des côtés

2) il faut établir (1.4) pour cette interpolation

3) On n'a plus (1.5) : $A_i(\pi u_h,\varphi) = o$

mais seulement

$$\lim A_i(\pi u_h,\varphi) = o$$

puisque $\pi u_h$ est du type T 1 (cf. §2)

le reste de la démonstration est inchangé.

Conclusion : chacun des 3 théorèmes va donner naissance à des éléments qui passent le Test C dans $H^2(\Omega)$ .

## 2. Quelques expressions des valeurs moyennes de u, $u'_x$ , $u'_y$ .

On reprend ce qui a été fait dans le § 2, n°3 . u est le polynome transporté, par une transformation affine,sur le triangle (-1,o) , (+1,o) , (o,+1) , $u_i$ désigne le polynome homogène de d°i qui entre dans la constitution de 0 .

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\hat{u}$ = | $u_o$ | + $u_1$ | + $u_2$ | + $u_3$ | + $u_4$ | + $u_5$ |
| $\psi(s)$ = | a | + bs | + $ds^2$ | + $gs^3$ | + $ks^4$ | + $qs^5$ |
| $\psi'_x(s)$ = | | + b | + 2ds | + $3gs^2$ | + $4ks^3$ | + $5qs^4$ |
| $\psi_y(s)$ = | | + c | + es | + $hs^2$ | + $ls^3$ | + $rs^4$ |
| m = | a | | + $\frac{d}{3}$ | | + $\frac{k}{5}$ | |
| $m_x$ = | | + b | | + g | | + q |
| $m_y$ = | | + c | | + $\frac{h}{3}$ | | + $\frac{r}{5}$ |

On a noté $\psi(s) = \hat{u}(s,o)$ $\qquad m = \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} \psi(s)\,ds$

$\psi_x(s) = \frac{\partial \hat{u}}{\partial x}(s,o)$ $\qquad m_x = \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} \psi_x(s)\,ds$

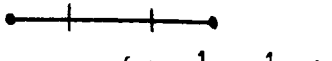
$\psi_y(s) = \frac{\partial \hat{u}}{\partial y}(s,o)$ $\qquad m_y = \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} \psi_y(s)\,ds$

le côté AB habituel est ici $(-1,+1)$ .

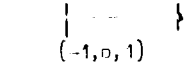
## 2.1. Quelques relations qui font intervenir des valeurs de la fonction et des dérivées

(2.1)
$$\begin{cases} \hat{u} \in (P_2, x^2y, xy^2) \\ m_x = \dfrac{\psi(1)-\psi(-1)}{2} \\ m_y = \psi_y(o) \\ \psi_x(o) = \dfrac{\psi(1)-\psi(-1)}{2} \end{cases}$$

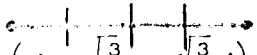
(2.2)
$$\begin{cases} \hat{u} \in (P_4, x^5, x^3y^2, x^2y^3, y^5) \\ m_x = \dfrac{\psi(1)-\psi(-1)}{2} \\ m_y = \dfrac{\psi_y(X)+\psi_y(-X)}{2} \end{cases} \qquad x^2 = \frac{1}{3}$$



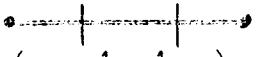

(2.3)
$$\begin{cases} \hat{u} \in (P_4, x^5, x^3y^2, x^2y^3, y^5) \\ m_x = \dfrac{\psi(1)-\psi(-1)}{2} \\ m_y = \frac{1}{6}\left(\psi_y(1)+\psi_y(-1)\right) + \frac{2}{3}\,\psi_y(o) \\ \psi_x(o) = \frac{3}{4}\left(\psi(1)-\psi(-1)\right) - \frac{1}{4}\left(\psi_x(1)+\psi_x(-1)\right) \end{cases}$$




(2.4)
$$\begin{cases} \hat{u} \in P_6 \\ m_x = \psi(1) - \psi(-1) \\ m_y = \frac{5}{18}\left(\psi_y(X) + \psi_y(-X)\right) + \frac{4}{9}\,\psi_y(o) \\ \psi_x(o) = \frac{9}{8}\left(\psi(1)-\psi(o)\right) - \frac{5}{8}\left(\psi_x(X)+\psi_x(-X)\right) \end{cases} \qquad x^2 = \frac{3}{5}$$

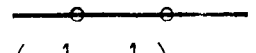



(2.5)
$$\begin{cases} \hat{u} \in P_6 \\ m_x = \dfrac{\psi(1)-\psi(-1)}{2} \\ m_y = \frac{5}{6}\left(\psi_y(X)+\psi_y(-X)\right) + \frac{1}{6}\left(\psi_y(1)+\psi_y(-1)\right) \end{cases} \qquad x^2 = \frac{1}{5}$$

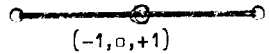



## 2.2. Quelques autres relations :

(2.6)
$$\begin{cases} u \in P_4 \\ m_x = \psi_x(X) + \psi_x(-X) \\ m_y = \dfrac{\psi_y(X)+\psi_y(-X)}{2} \end{cases} \qquad x^2 = \frac{1}{3}$$




(2.7)
$$\begin{cases} u \in P_4 \\ m_x = \frac{2}{3}\,\psi_x(o) + \frac{1}{6}\left(\psi_x(1)+\psi_x(-1)\right) \\ m_y = \frac{2}{3}\,\psi_y(o) + \frac{1}{6}\left(\psi_y(1)+\psi_y(-1)\right) \end{cases}$$



(2.8)
$$\begin{cases} u \in P_6 \\ m_x = \frac{5}{12}\left(\psi_x(X) + \psi_x(-X)\right) + \frac{1}{12}\left(\psi_x(1) + \psi_x(-1)\right) \\ m_y = \frac{5}{6}\left(\psi_y(X) + \psi_y(-X) + \frac{1}{6}\left(\psi_y(1) + \psi_y(-1)\right)\right. \end{cases}$$

$\left(-1, -\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}, 1\right)$ $\quad x^2 = \frac{1}{5}$

(2.9)
$$\begin{cases} u \in P_6 \\ m_x = \frac{4}{9}\psi_x(o) + \frac{5}{18}\left(\psi_x(X) + \psi_x(-X)\right) \\ m_y = \frac{4}{9}\psi_y(o) + \frac{5}{18}\left(\psi_y(X) + \psi_y(-X)\right) \end{cases}$$

$\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}, o, \sqrt{\frac{3}{5}}\right)$ $\quad x^2 = \frac{3}{5}$

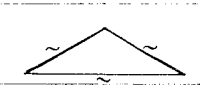
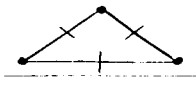
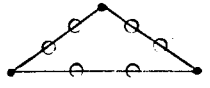
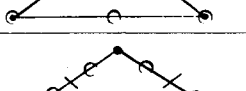
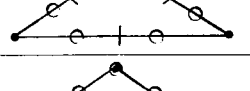
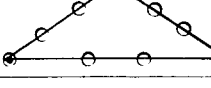
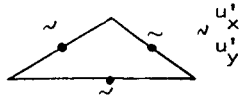
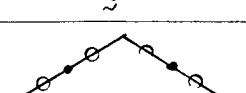
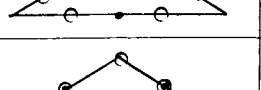
3. Quelques éléments qui passent le Test C dans $H^2(\Omega)$ .

d = nombre de degrés de liberté imposés pour passer le Test C

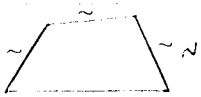
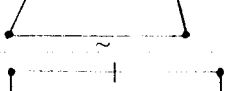
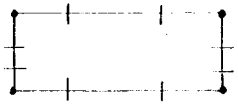
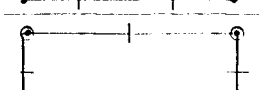
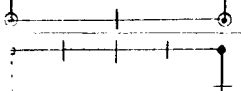
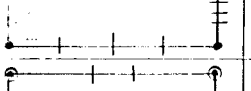
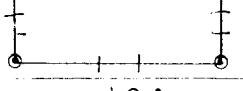
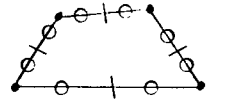
p = nombre total de degrés de liberté .

(voir tableau page suivante)

## TRIANGLES

| type | Schéma | d | d° P | p | Points | relation |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 |  | 9 | | | | Th. 1.1 |
| 1 | | 6 | | | | Th. 1.2 |
| 2 |  | 6 MURLEY | 2 | 6 | (-1,0,+1) | (2.1) |
| 3 | | 6 FRAEISS | $P_2 < P_K < P_3$ | | (-1,0,+1) | (2.2) |
| 4 |  | 15 | $P_4, x^3y^2, x^2y^3$ | 17 | $\left(-1,-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},1\right)$ | (2.2) |
| 5 | | 15 | $P_4, x^3y^2, x^2y^3$ | 17 | (-1,0,+1) | (2.3) |
| 6 |  | 18 | $P_5$ | 21 | $\left(-1,-\sqrt{\frac{3}{5}},0,\sqrt{\frac{3}{5}},1\right)$ | (2.4) |
| 7 |  | 21 | $P_5$ | 21 | $\left(-1,-\frac{1}{\sqrt{5}},\frac{1}{\sqrt{5}},1\right)$ | (2.5) |
| 8 |  | 9 | | | | Th. 1.3 |
| 9 |  | 15 | $P_4$ | 15 | $\left(-\frac{1}{\sqrt{5}},0,\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$ | (2.9) |
| 10 |  | 15 | $P_4$ | 15 | (-1,0,1) | (2.10) |
| 11 |  | 21 | $P_5$ | 21 | $\left(-1,-\frac{1}{\sqrt{5}},0,\frac{1}{\sqrt{5}},1\right)$ | (2.11) |
| 12 | | 21 | $P_5$ | 21 | $-\sqrt{\frac{3}{5}},0,+\sqrt{\frac{3}{5}}$ | (2.12) |

## QUADRILATERES

| type | Schéma | d | P | p | Points | relation |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 |  | 12 | | | | Th. 1.1 |
| 1 | | 8 | | | -1, +1 | Th. 1.2 |
| 2 |  | 8 | $P_2, x^2y, xy^2$ | 12 | -1,0,+1 | Th. 1.2 (2.1) |
| 3 | | 12 | $P_4$ | 15 | $-1,-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},1$ | (2.2) |
| 4 |  | 16 | $P_4, x^3y^2, x^2y^3$ | 17 | -1,0,+1 | (2.3) |
| 5 |  | 16 | $P_5$ | 21 | $-1,-\sqrt{\frac{3}{5}},0,\sqrt{\frac{3}{5}},1$ | (2.4) |
| 6 |  | 20 | $P_5$ | 21 | $-1,-\frac{1}{\sqrt{5}},\frac{1}{\sqrt{5}},1$ | (2.5) |
| 7 |  | 24 | $P_6$ | 28 | $-1,-\sqrt{\frac{3}{5}},0,\sqrt{\frac{3}{5}},1$ | (2.4) |
| 8 |  | 28 | $P_6$ | 28 | $-1,-\frac{1}{\sqrt{5}},\frac{1}{\sqrt{5}},1$ | (2.5) |
| 9 |  | 12 | | | | Th. 1.3 |
| 10 | | 28 | $P_6$ | 28 | $-1,-\frac{1}{\sqrt{5}},\frac{1}{\sqrt{5}},1$ | (2.8) |
| 11 | | 28 | $P_6$ | 28 | $-\sqrt{\frac{3}{5}},0,\sqrt{\frac{3}{5}}$ | (2.9) |