PUBLICATIONS MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUES DE RENNES

R. ARCANGELI
J. L. GOUT

Sur l'évaluation de l'erreur d'interpolation de Lagrange dans un ouvert de $\mathbb{R}^n$

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1976, fascicule S5
« Journées « éléments finis » », , p. 1-15

<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1976___S5_A1_0>

© Département de mathématiques et informatique, université de Rennes, 1976, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications mathématiques et informatiques de Rennes » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

SUR L'EVALUATION DE L'ERREUR D'INTERPOLATION DE LAGRANGE

DANS UN OUVERT DE $\mathbb{R}^n$ (*)

R. ARCANGELI et J.L. GOUT

Département de Mathématiques

Université de PAU

===

(*) Texte en grande partie extrait d'un article à paraître dans la R.A.I.R.O.

0 - INTRODUCTION ET NOTATIONS

Ce travail est consacré à une étude de l'erreur d'interpolation de Lagrange dans un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$. Les méthodes utilisées, basées sur la formule de Taylor avec reste intégral, permettent d'obtenir des majorations de l'erreur en semi-normes $|.|_{m,p,\Omega}$ (dont la définition est rappelée ci-dessous).

On en déduit des applications à l'évaluation de l'erreur d'interpolation de Lagrange dans la méthode des éléments finis droits et à l'estimation de l'erreur d'intégration numérique dans un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

Cette étude a pour point de départ l'article de P.G. Ciarlet et P.A. Raviart [4]. Les résultats du paragraphe 2 font suite à celui de J. Meinguet [10], où est donné un encadrement de l'erreur de meilleure approximation uniforme (cf. également G. Strang [13], P.G. Ciarlet et P.A. Raviart [5], P.G. Ciarlet et C. Wagschal [6], R.E. Barnhill et J.R. Whiteman [1], J.H. Bramble et S.R. Hilbert [2] et [3]) .

Soient n un entier ≥ 1 et Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$. On suppose $\mathbb{R}^n$ muni de la norme euclidienne, notée $||.||$, et on désigne par h le diamètre de Ω .

Pour tout multi-indice $\alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, on pose

$$\partial^\alpha = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \ldots \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n} ,$$

et on note $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$ et $\alpha ! = \alpha_1 ! \ldots \alpha_n !$.

Soit p un réel avec $1 \leq p \leq +\infty$. Pour tout $m \in \mathbb{N}$, on désigne par $W^{m,p}(\Omega)$ l'espace de Sobolev des (classes de) fonctions u qui appartiennent à $L^p(\Omega)$ ainsi que toutes leurs dérivées partielles $\partial^\alpha u$ d'ordre $|\alpha| \leq m$, muni de sa topologie naturelle. Pour tout $u \in W^{m,p}(\Omega)$, pour tout $\ell = 0,1,\ldots,m$ et pour presque tout $x \in \Omega$, on note $D^\ell u(x)$ la $\ell^{\text{ième}}$ dérivée de u au point x et on pose

$$||D^\ell u(x)|| = \sup_{\substack{||\xi_i|| \leq 1 \\ 1 \leq i \leq \ell}} |D^\ell u(x).(\xi_1,\ldots,\xi_\ell)| ,$$

avec, par convention, $||D^{\ell}u(x)|| = |u(x)|$ pour $\ell = 0$. On munit également $W^{m,p}(\Omega)$ des semi-normes

$$|u|_{\ell,p,\Omega} = \left(\int_{\Omega} ||D^{\ell}u(x)||^{p} dx \right)^{\frac{1}{p}} , \quad 0 \leq \ell \leq m ,$$

lorsque $p < +\infty$, avec la modification habituelle lorsque $p = +\infty$. Toutefois, pour K compact de $\mathbb{R}^n$, on écrira pour simplifier , comme c'est l'usage, $W^{m,p}(K)$ [ou $H^m(K)$, dans le cas $p = 2$] au lieu de $W^{m,p}(\overset{\circ}{K})$, $\overset{\circ}{K}$ désignant l'intérieur de K , et $|.|_{\ell,p,K}$ au lieu de $|.|_{\ell,p,\overset{\circ}{K}}$.

Soit enfin k un entier ≥ 0 . On désigne par P_k l'espace des polynômes de degré $\leq k$ en les n variables $x_1, \ldots, x_n$.

1- ETUDE DIRECTE DE L'ERREUR D'INTERPOLATION

On suppose que

(1-1) $\quad k + 1 > \frac{n}{p}$,

(1-2) $\quad \Omega$ est un ouvert borné non vide de $\mathbb{R}^n$, à frontière lipschitzienne, tel que $\overline{\Omega}$ soit étoilé par rapport à chacun des points de $\sum$,

où

(1-3) $\quad \sum = \{a_i\}_{i=1,\ldots,N}$ est un ensemble P-unisolvant de points de $\overline{\Omega}$, P désignant un espace de dimension finie N de fonctions définies sur $\overline{\Omega}$ tel que $P_k \subset P \subset C^k(\overline{\Omega})$.

(Pour la définition d'ensemble P-unisolvant, comme, de façon générale, pour la définition des différentes notions utilisées dans la méthode des éléments finis, nous renvoyons à Ciarlet-Raviart [4]) . On a évidemment

$$N \geq \dim P_k = \binom{n+k}{k} .$$

Pour tout $u \in C^{k+1}(\overline{\Omega})$, pour tout $a \in \overline{\Omega}$ tel que $\overline{\Omega}$ soit étoilé par rapport au point a et pour tout $x \in \Omega$, on pose

(1-4) $$J(u,a)(x) = \int_0^1 (1-t)^k D^{k+1}u(x+t(a-x)).(a-x)^{k+1} dt .$$

Compte tenu de (1-2) et (1-3), l'application de la formule de Taylor

à l'ordre k avec reste intégral, donne, pour tout $u \in C^{k+1}(\bar{\Omega})$ et pour tout $x \in \Omega$, les relations

$$(1\text{-}5) \qquad u(a_i) = \sum_{\ell=0}^{k} \frac{D^{\ell}u(x).(a_i-x)^{\ell}}{\ell!} + \frac{1}{k!} J(u,a_i)(x) \ , \quad i = 1,\dots, N \ .$$

On a d'abord la

Proposition 1-1 .

On suppose vérifiées les hypothèses (1-1) , (1-2) et (1-3). Alors, pour tout $u \in C^{k+1}(\bar{\Omega})$,

$$(1\text{-}6) \qquad ||J(u,a_i)||_{L^p(\Omega)} \leq \frac{1}{k+1-\frac{n}{p}} \ |u|_{k+1,p,\Omega} \ h^{k+1} \ , \quad i = 1,\dots, N \ .$$

Démonstration

Le résultat est immédiat lorsque $p = +\infty$. On se borne à étudier le cas $1 < p < +\infty$, la démonstration se simplifiant dans le cas $p = 1$. On a

$$|J(u,a_i)(x)| \leq h^{k+1} \int_0^1 (1-t)^k ||D^{k+1}u(x+t(a_i-x))||dt$$

$$\leq h^{k+1} \int_0^1 (1-t)^{-\frac{1}{q}+\varepsilon} (1-t)^{k+\frac{1}{q}-\varepsilon} ||D^{k+1}u(x+t(a_i-x))||dt$$

où ε est un nombre positif tel que $(k+1)p-p\varepsilon-n > 0$ et q est tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ En appliquant l'inégalité de Hölder, il vient

$$|J(u,a_i)(x)| \leq h^{k+1} \Big(\int_0^1 (1-t)^{-1+q\varepsilon} dt \Big)^{\frac{1}{q}} \Big(\int_0^1 (1-t)^{pk+\frac{p}{q}-p\varepsilon} ||D^{k+1}u(x+t(a_i-x))||^p dt \Big)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq h^{k+1} \Big(\frac{1}{q\varepsilon} \Big)^{1/q} \Big(\int_0^1 (1-t)^{pk+p-1-p\varepsilon} ||D^{k+1}u(x+t(a_i-x))||^p dt \Big)^{1/p} \ .$$

On en déduit que

$$\int_{\Omega} |J(u,a_i)(x)|^p dx \leq h^{p(k+1)} \Big(\frac{1}{q\varepsilon} \Big)^{p-1} \int_{\Omega\times]0,1[} (1-t)^{p(k+1)-1-p\varepsilon} ||D^{k+1}u(x+t(a_i-x))||^p dx dt$$

Effectuant dans l'intégrale du second membre le changement de variables

$$\begin{cases} y_j = x_j + t(a_{i,j}-x_j) \ , \quad j = 1,\dots, n \\ s = t \ , \end{cases}$$

on obtient

$$\int_\Omega |J(u,a_i)(x)|^p dx \leq h^{p(k+1)} \left(\frac{1}{q\varepsilon}\right)^{p-1} \int_C (1-s)^{p(k+1)-1-p\varepsilon-n} \left|\left|D^{k+1}u(y)\right|\right|^p dyds ,$$

où C est un cône ouvert de base Ω et de hauteur 1 inscrit dans $\Omega \times]0,1[$. D'où l'inégalité

$$\int_\Omega |J(u,a_i)(x)|^p dx \leq h^{p(k+1)} \left(\frac{1}{q\varepsilon}\right)^{p-1} \left(\int_0^1 (1-s)^{p(k+1)-1-p\varepsilon-n} ds\right) \left(\int_\Omega \left|\left|D^{k+1}u(y)\right|\right|^p dy\right) ,$$

soit

$$\int_\Omega |J(u,a_i)(x)|^p dx \leq \left(\frac{1}{q\varepsilon}\right)^{p-1} \frac{1}{(k+1)p-p\varepsilon-n} |u|^p_{k+1,p,\Omega} \; h^{p(k+1)} ,$$

et le résultat, avec $\varepsilon = \frac{1}{q}\left[(k+1) - \frac{n}{p}\right]$. □

On peut maintenant montrer le

Théorème 1-1

On suppose vérifiées les hypothèses (1-1) , (1-2) et (1-3) . Soient Π l'opérateur de P-interpolation de Lagrange sur $\sum$ et $\{p_i\}_{i=1,\ldots,N}$ l'ensemble des fonctions de base de P relativement à $\sum$. Alors pour tout $u \in W^{k+1,p}(\Omega)$ et pour tout $m = 0,1,\ldots,k$, on a :

$$(1\text{-}7) \qquad |u-\Pi u|_{m,p,\Omega} \leq \frac{1}{k!} \frac{1}{k+1-\frac{n}{p}} \left(\sum_{i=1}^N |p_i|_{m,\infty,\Omega}\right) |u|_{k+1,p,\Omega} \; h^{k+1} .$$

Démonstration

1°/ On montre d'abord (1-7) pour $u \in C^{k+1}(\overline{\Omega})$ et $p < +\infty$. Pour cela on reprend la démonstration du théorème 1 de Ciarlet-Raviart [4] en utilisant la formule de Taylor avec reste intégral, les p_i désignant ici les fonctions de base de P relativement à $\sum$. On obtient de même, pour tout $x \in \Omega$ et pour tout $m = 0,1,\ldots,k$, la relation

$$D^m(\Pi u)(x) - D^m u(x) = \frac{1}{k!} \sum_{i=1}^N J(u,a_i)(x) D^m p_i(x),$$

où $J(u,a_i)(x)$ est défini par (1-4) . On en déduit que

$$|u-\Pi u|_{m,p,\Omega} \leq \frac{1}{k!} \sum_{i=1}^N |p_i|_{m,\infty,\Omega} \left|\left|J(u,a_i)\right|\right|_{L^p(\Omega)}$$

et le résultat suit compte tenu de (1-6).

2°/ On en déduit le résultat général en distinguant les cas $p < +\infty$ et $p = +\infty$.

On vérifie en effet que, pour tout p tel que $1 \leq p \leq +\infty$ et pour tout $m = 0,1,\ldots,k$, on a : $\Pi \in \mathcal{L}(W^{k+1,p}(\Omega), W^{m,p}(\Omega))$. D'autre part,

- lorsque $p < +\infty$, on sait que $C^{k+1}(\overline{\Omega})$ est dense dans $W^{m,p}(\Omega)$ pour tout $m = 0,1,\ldots, k+1$, puisque Ω est borné à frontière continue (cf. J. Nečas [11]). Il suffit alors de raisonner par densité pour conclure.

- lorsque $p = +\infty$, on remarque que, pour tout $p \geq 1$: $W^{k+1,\infty}(\Omega) \subset W^{k+1,p}(\Omega)$, car Ω est borné. Dans ce cas, la relation (1-7) s'obtient en faisant tendre p vers $+\infty$ dans le résultat précédent.

Remarque 1-1

Le théorème 1-1 s'applique évidemment à la méthode des éléments finis droits. Considérons seulement le cas des éléments finis de type n-simplexe : soit donc $(\mathcal{T}_h)$ une suite de triangulations d'un ouvert polyédrique de $\mathbb{R}^n$ (cf. P.A. Raviart [12]) et supposons alors que $\overline{\Omega}$ soit un élément quelconque K d'une triangulation $\mathcal{T}_h$.

Dans ce cas, il est important de remarquer que, lorsque la suite de triangulations $(\mathcal{T}_h)$ est *régulière* (au sens de Ciarlet-Raviart [4]), la formule (1-7) conduit à des majorations *uniformes* de l'erreur d'interpolation (nous entendons par là que ces majorations sont de la forme

$$|u-\Pi u|_{m,p,K} \leq C(n,k,m,p)\ |u|_{k+1,p,K}\ h^{k+1-m} ,$$

où $C(n,k,m,p)$ ne dépend pas de $\sum$ et de K) : il suffit, pour le vérifier, d'utiliser un changement de variables qui ramène le calcul des $|p_i|_{m,\infty,K}$ à un calcul dans un n-simplexe de référence et de tenir compte de résultats de [4].

Remarque 1-2

Montrons maintenant que l'on peut *calculer* effectivement des majorations de l'erreur d'interpolation dans la méthode des éléments finis droits. Soient toujours $(\mathcal{T}_h)$ une suite de triangulations d'un ouvert polyédrique de $\mathbb{R}^n$ et $\overline{\Omega} = K$ un élément quelconque d'une triangulation $\mathcal{T}_h$. Supposons que les fonctions de base p_i soient explicitées sous la forme

$$p_i(x) = f_i(\lambda_1(x), \ldots, \lambda_{n+1}(x)) \quad , \quad i = 1,\ldots, N \quad ,$$

où les f_i sont des fonctions de classe C^k indépendantes de $\hat{K}$ et de K et où $\lambda_1(x), \ldots, \lambda_{n+1}(x)$ désignent les coordonnées barycentriques de x par rapport au sommet du n-simplexe K .

On vérifie que, pour tout $m = 0,1,\ldots,k$ et pour tout $i = 1,\ldots, N$

$$||D^m p_i(x)|| \leq \left(\max_{j=1,\ldots,n+1} ||D\lambda_j|| \right)^m \sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} \left|\partial^\alpha f_i(\lambda_1(x),\ldots,\lambda_{n+1}(x))\right| ,$$

où ici $\alpha \in \mathbb{N}^{n+1}$. Il résulte alors des relations (cf. Ciarlet-Wagschal [6])

$$||D\lambda_j|| \leq \frac{1}{\rho} , \quad j = 1,\ldots, n+1 ,$$

où ρ désigne le maximum des diamètres des sphères contenues dans K , que l'on a , pour tout $m = 0,1,\ldots,k$,

$$(1\text{-}8) \qquad |u-\Pi u|_{m,p,K} \leq C(n,k,m,p,K) \; |u|_{k+1,p,K} \; \frac{h^{k+1}}{\rho^m} ,$$

avec

$$(1\text{-}9) \qquad C(n,k,m,p,K) = \frac{1}{k!} \; \frac{1}{k+1-\frac{n}{p}} \sum_{i=1}^{N} \max_{x\in K} \left(\sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} \left|\partial^\alpha f_i(\lambda_1(x),\ldots,\lambda_{n+1}(x))\right| \right).$$

On constate que le second membre de (1-9) est en fait indépendant de K (il ne dépend que d'un n-simplexe fixe). On vérifie donc à nouveau que si la suite de triangulations $(\mathcal{C}_h)$ est régulière, les majorations (1-8) sont uniformes.

On retrouve ainsi le théorème 5 de Ciarlet-Raviart [4] dans le cas où Π est l'opérateur de P-interpolation de Lagrange sur $\hat{K}$.

Il est à souligner que le calcul des constantes (1-9) s'effectue directement et ne nécessite donc pas le passage par un élément fini de référence.

Du point de vue numérique, ce calcul présente des difficultés, même dans le cas où P est un espace de polynômes (on est ramené à la détermination de maximums de fonctions de $n+1$ variables). Notons cependant que le calcul est aisé lorsque $m = k$ et $P = P_k$.

La méthode du paragraphe suivant, lorsqu'elle est applicable (cf. remarque 2-3) , ne présente pas les mêmes inconvénients.

2 - ETUDE BASEE SUR L'APPROXIMATION

Commençons par un résultat d'approximation.

Soient n un entier ≥ 1, p un réel avec $1 \leq p \leq +\infty$, k un entier tel que $k + 1 > \frac{n}{p}$ et Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ de diamètre h.

Pour tout $u \in W^{k+1,p}(\Omega)$ $1 \leq p \leq +\infty$, et pour presque tout $a \in \Omega$, on note $\psi_T(u,a)$ le "polynôme de Taylor à l'ordre k de u au point a", défini par

$$(2\text{-}1) \qquad \forall x \in \Omega, \quad \psi_T(u,a)(x) = \sum_{\ell=0}^{k} \frac{D^\ell u(a).(x-a)^\ell}{\ell!},$$

et $D^m\psi_T(u,a)$ la dérivée $m^{\text{ième}}$ de l'application $x \to \psi_T(u,a)(x)$. On vérifie que l'application $(x,a) \to ||D^m\psi_T(u,a)(x)||$ appartient à $L^p(\Omega \times \Omega)$.

Proposition 2-1

On suppose que n,p,k vérifient (1-1) et que Ω est un ouvert convexe borné non vide de $\mathbb{R}^n$, à frontière continue. Alors pour tout $u \in W^{k+1,p}(\Omega)$ et pour tout entier $m \geq 0$ tel que $k + 1 > m + \frac{n}{p}$, on a :

(i) Si $p < +\infty$,

$$\min_{\psi \in P_k} |u-\psi|_{m,p,\Omega} \leq \left(\frac{1}{\text{mes } \Omega} \int_\Omega |u-\psi_T(u,a)|^p_{m,p,\Omega} da \right)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{1}{(k-m)!} \frac{1}{k+1-m-\frac{n}{p}} |u|_{k+1,p,\Omega} h^{k+1-m}$$

(ii) Si $p = +\infty$,

$$\min_{\psi \in P_k} |u-\psi|_{m,\infty,\Omega} \leq \sup_{a \in \Omega} \text{ess } |u-\psi_T(u,a)|_{m,\infty,\Omega} \leq \frac{1}{(k+1-m)!} |u|_{k+1,\infty,\Omega} h^{k+1-m},$$

où $\psi_T(u,a)$ est défini par (2-1).

Démonstration

Dans (i) [resp. (ii)], la première inégalité est évidente. Tout revient donc, dans chaque cas, à vérifier la seconde.

1°- Montrons d'abord la seconde inégalité dans (i) pour $u \in C^{k+1}(\bar{\Omega})$. On se borne à étudier le cas $1 < p < +\infty$, la démonstration se simplifiant dans le cas $p = 1$.

Soient $u \in C^{k+1}(\bar{\Omega})$ et a un point quelconque de Ω . On a

$$|u-\psi_T(u,a)|_{m,p,\Omega} = \left(\int_\Omega ||D^m u(x) - D^m \psi_T(u,a)(x)||^p dx \right)^{\frac{1}{p}} .$$

D'après la formule de Taylor à l'ordre $k - m$ pour $D^m u$ au voisinage de a , on a :

$$D^m u(x) - D^m \psi_T(u,a)(x) = \frac{1}{(k-m)!} \int_0^1 (1-t)^{k-m} D^{k+1} u(a+t(x-a)).(x-a)^{k+1-m} dt ,$$

d'où

$$||D^m u(x) - D^m \psi_T(u,a)(x)|| \leq \frac{h^{k+1-m}}{(k-m)!} \int_0^1 (1-t)^{k-m} ||D^{k+1} u(a+t(x-a))|| dt .$$

En appliquant l'inégalité de Hölder, on obtient

$$||D^m u(x)-D^m \psi_T(u,a)(x)||^p \leq \left(\frac{h^{k+1-m}}{(k-m)!}\right)^p \left(\frac{1}{q\varepsilon}\right)^{p-1} \int_0^1 (1-t)^{(k+1-m)p-1-p\varepsilon} ||D^{k+1} u(a+t(x-a))||^p dt,$$

où ε est un nombre positif tel que $(k+1-m)p-p\varepsilon-n > 0$ et q est tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

En intégrant successivement les deux membres de l'inégalité précédente par rapport à x sur Ω , puis par rapport à a sur Ω , on a

$$\int_\Omega |u-\psi_T(u,a)|^p_{m,p,\Omega} da \leq \left(\frac{h^{k+1-m}}{(k-m)!}\right)^p \left(\frac{1}{q\varepsilon}\right)^{p-1} \int_\Omega da \int_\Omega dx \int_0^1 (1-t)^{(k+1-m)p-1-p\varepsilon} ||D^{k+1} u(a+t(x-a))||^p dt.$$

Après permutation des intégrations en x et a , l'intégrale du second membre s'écrit

$$\int_\Omega dx \int_{\Omega \times]0,1[} (1-t)^{(k+1-m)p-1-p\varepsilon} ||D^{k+1} u(a+t(x-a))||^p da\, dt ,$$

et en raisonnant comme dans la démonstration de la proposition 1-1, avec ici $\varepsilon = \frac{1}{q}\left(k+1-m-\frac{n}{p}\right)$, on obtient

$$\int_\Omega |u-\psi_T(u,a)|^p_{m,p,\Omega} da \leq (\text{mes } \Omega) \left(\frac{1}{(k-m)!} \frac{1}{k+1-m-\frac{n}{p}}\right)^p |u|^p_{k+1,p,\Omega} h^{(k+1-m)p} ,$$

d'où la seconde inégalité dans (i) pour $u \in C^{k+1}(\bar{\Omega})$.

2°- Montrons maintenant que le résultat précédent est encore valable pour $u \in W^{k+1,p}(\Omega)$, $p < +\infty$.

Soient $u \in W^{k+1,p}(\Omega)$, $p < +\infty$ et $(u_j) \subset C^{k+1}(\overline{\Omega})$ une suite convergeant vers u dans $W^{k+1,p}(\Omega)$: il suffit de vérifier que, quand $j \to +\infty$,

$$\left(\int_\Omega |u_j - \psi_T(u_j,a)|^p_{m,p,\Omega} da \right)^{\frac{1}{p}} \longrightarrow \left(\int_\Omega |u - \psi_T(u,a)|^p_{m,p,\Omega} da \right)^{\frac{1}{p}} .$$

Or, on a

$$\left| \left(\int_\Omega |u-\psi_T(u,a)|^p_{m,p,\Omega} da \right)^{\frac{1}{p}} - \left(\int_\Omega |u_j - \psi_T(u_j,a)|^p_{m,p,\Omega} da \right)^{\frac{1}{p}} \right|$$

$$\leq \left(\int_\Omega |u-u_j|^p_{m,p,\Omega} da \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_\Omega |\psi_T(u,a) - \psi_T(u_j,a)|^p_{m,p,\Omega} da \right)^{\frac{1}{p}} ,$$

où les deux termes du second membre tendent vers 0 , le premier par hypothèse et le second parce que majoré par

$$(\text{mes } \Omega)^{\frac{1}{p}} \sum_{\ell=m}^{k} \frac{h^{\ell-m}}{(\ell-m)!} |u-u_j|_{\ell,p,\Omega} .$$

3°- La seconde inégalité dans (ii) résulte de l'inégalité correspondante dans (i). En effet, si $u \in W^{k+1,\infty}(\Omega)$ alors $u \in W^{k+1,p}(\Omega)$ pour tout $p \geq 1$, puisque Ω est borné, et il suffit de faire tendre p vers $+\infty$ dans (i) pour obtenir le résultat. □

Notons que la proposition 2-1 peut n'avoir lieu que pour $m = 0$. □

Signalons également que lorsque $u \in C^{k+1}(\overline{\Omega})$, on a (cf. J. Meinguet [10]) l'inégalité

$$\min_{\psi \in P_k} |u-\psi|_{m,\infty,\Omega} \leq \frac{1}{(k+1-m)!} |u|_{k+1,\infty,\Omega} \left(\frac{h}{2}\right)^{k+1-m} . \quad \square$$

On déduit de la proposition 2-1 le résultat suivant, qui a pour point de départ une idée de J. Meinguet [10] :

Théorème 2-1

On suppose que Ω est un ouvert convexe borné non vide de $\mathbb{R}^n$ à frontière lipschitzienne, que les hypothèses (1-1) et (1-3) sont vérifiées et que Π est l'opérateur de P-interpolation de Lagrange sur Σ .

Alors, pour tout $u \in W^{k+1,p}(\Omega)$ et pour tout entier $m \geqslant 0$ tel que $k+1 > m + \frac{n}{p}$ et pour tout $q \geqslant 1$, on a :

$$(2\text{-}2) \quad |u-\Pi u|_{m,q,\Omega} \leqslant (\text{mes } \Omega)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \frac{1}{(k-m)!} \frac{1}{k+1-m-\frac{n}{p}} |u|_{k+1,p,\Omega} h^{k+1-m}$$

$$+ (\text{mes } \Omega)^{-\frac{1}{p}} \frac{1}{k!} \frac{1}{k+1-\frac{n}{p}} \Big(\sum_{i=1}^{N} |p_i|_{m,q,\Omega} \Big) |u|_{k+1,p,\Omega} h^{k+1} ,$$

où $\{p_i\}_{i=1,\ldots,N}$ désigne l'ensemble des fonctions de base de P relativement à $\sum$.

Démonstration

Il suffit de montrer le résultat pour $u \in C^{k+1}(\overline{\Omega})$, et $p < +\infty$, le cas général s'obtenant en raisonnant par densité lorsque $p < +\infty$ [compte tenu du fait que $W^{k+1,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{m,q}(\Omega)$] et en passant à la limite sur p lorsque $p = +\infty$.

Puisque

$$\forall\, \Psi \in P \quad , \quad \Pi\Psi = \Psi \quad ,$$

on a en prenant $\Psi = \Psi_T(u,a)$, avec $a \in \Omega$, quelconque ,

$$\begin{aligned} u - \Pi u &= u - \Psi_T(u,a) - \Pi(u-\Psi_T(u,a)) \\ &= u - \Psi_T(u,a) - \frac{1}{k!} \sum_{i=1}^{N} J(u,a_i)(a)\, p_i \quad , \end{aligned}$$

d'où , pour tout $x \in \Omega$,

$$||D^m(u-\Pi u)(x)|| \leqslant ||D^m(u-\Psi_T(u,a))(x)|| + \frac{1}{k!} \sum_{i=1}^{N} |J(u,a_i)(a)|\, ||D^m p_i(x)|| \ .$$

Prenant alors les normes $L^p(\Omega)$ des deux membres considérés comme fonctions de la variable a et utilisant les propositions 1-1 et 2-1 , il vient :

$$(\text{mes } \Omega)^{\frac{1}{p}} \ ||D^m(u-\Pi u)(x)|| \leqslant \frac{1}{(k-m)!} \frac{1}{k+1-m-\frac{n}{p}} |u|_{k+1,p,\Omega} h^{k+1-m}$$

$$+ \frac{1}{k!} \frac{1}{k+1-\frac{n}{p}} \Big(\sum_{i=1}^{N} ||D^m p_i(x)|| \Big) u_{k+1,p,\Omega} h^{k+1} \ .$$

Prenant ensuite les normes $L^q(\Omega)$ des deux membres par rapport à la variable x , on obtient (2-2) pour $u \in C^{k+1}(\overline{\Omega})$ et $p < +\infty$.

Remarque 2-1

Comme le théorème 1-1 , le théorème 2-1 s'applique à la méthode des éléments finis droits. Ici aussi et pour les mêmes raisons que celles qui ont été développées dans la remarque 1-1 , la formule (2-2) fournit, lorsque la suite de triangulations est régulière, des majorations uniformes de l'erreur d'interpolation dans un n-simplexe.

Remarque 2-2

Sous les mêmes hypothèses et avec les mêmes notations que dans la remarque 1-1 , on obtient, pour tout $i = 1, \ldots, N$ et pour tout entier $m \geqslant 0$ tel que $k + 1 > m + \frac{n}{p}$ avec $p < +\infty$, la relation

$$(2\text{-}3) \qquad |p_i|_{m,p,K} \leq \frac{1}{\rho^m} \left\{ \int_K \left[\sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} \left| \partial^\alpha f_i(\lambda_1(x), \ldots, \lambda_{n+1}(x)) \right| \right]^p dx \right\}^{\frac{1}{p}} .$$

Lorsque P est un espace de *polynômes*, le calcul des majorations (2-3) ne présente pas de difficultés particulières : on peut utiliser la formule

$$\int_K (\lambda_1(x))^{\nu_1} \ldots (\lambda_{n+1}(x))^{\nu_{n+1}} dx = \frac{\nu_1! \ldots \nu_{n+1}!}{(\nu_1 + \ldots + \nu_{n+1} + n)!} n! \text{ mes } K , \quad \nu_1, \ldots, \nu_{n+1} \in \mathbb{N} ,$$

(cf. O.C. Zienkiewicz [15]) pour calculer le second membre de (2-3) ce qui conduit à des majorations du type

$$|p_i|_{m,p,K} \leq C_i \frac{(\text{mes } K)^{\frac{1}{p}}}{\rho^m} ,$$

où les C_i sont des constantes indépendantes de $\sum$ et de K .

Remarque 2-3

Rappelons que le théorème 2-1 nécessite l'hypothèse $k + 1 > m + \frac{n}{p}$: il peut donc n'avoir lieu que pour $m = 0$, alors que le théorème 1-1 est toujours valable pour $m = 0, 1, \ldots, k$.

Du point de vue du calcul numérique, l'utilisation du théorème 1-1 implique (cf. remarque 1-2) la détermination de maximums de fonctions de plusieurs variables, tandis que l'application du théorème 2-1 pour $p < +\infty$ entraîne seulement le calcul d'intégrales (cf. remarque 2-2). D'autre part, l'expérience montre que, pour $p < +\infty$, le théorème 2-1 donne de meilleurs résultats numériques que le théorème 1-1 (cf. les exemples numériques du paragraphe 3).

Notons enfin que dans le cas usuel $n = p = 2$, on a la possibilité d'utiliser le théorème 2-1 pour $m = 0,1,\ldots,k-1$ et le théorème 1-1 pour $m = k$.

3- APPLICATIONS

3-1 - Exemples d'application à la méthode des éléments finis droits

Soit K un triangle quelconque de $\mathbb{R}^2$. On note h le diamètre de K et ρ le diamètre du cercle inscrit dans K.

Donnons d'abord des exemples d'application du théorème 1-1 dans le cas $p = 2$.

Exemple 3-1

On prend pour Σ l'ensemble des sommets de K et pour P l'espace P_1.

$m = 0$: On obtient $\sum_{i=1}^{3} |p_i|_{0,\infty,K} = 3$, d'où

$$\forall u \in H^2(K), \quad |u-\Pi u|_{0,2,K} \leq 3\,|u|_{2,2,K}\,h^2$$

$m = 1$: On obtient $\sum_{i=1}^{3} |p_i|_{1,\infty,K} \leq \frac{3}{\rho}$, d'où

$$\forall u \in H^2(K), \quad |u-\Pi u|_{1,2,K} \leq 3\,|u|_{2,2,K}\,\frac{h^2}{\rho}$$

Exemple 3-2

On prend pour Σ l'ensemble des sommets et des milieux des côtés de K et pour P l'espace P_2.

$m = 0$: On obtient $\sum_{i=1}^{6} |p_i|_{0,\infty,K} = 6$, d'où

$$\forall u \in H^3(K), \quad |u-\Pi u|_{0,2,K} \leq 2\,|u|_{3,2,K}\,h^3$$

$\underline{m = 1}$: On obtient $\sum_{i=1}^{6} |p_i|_{1,\infty,K} \leq \frac{21}{\rho}$, d'où

$$\forall u \in H^3(K) \quad , \quad |u-\Pi u|_{1,2,K} \leq 6\, |u|_{3,2,K} \frac{h^3}{\rho}$$

$\underline{m = 2}$: On obtient $\sum_{i=1}^{6} |p_i|_{1,\infty,K} \leq \frac{36}{\rho^2}$, d'où

$$\forall u \in H^3(K) \quad , \quad |u-\Pi u|_{2,2,K} \leq 9\, |u|_{3,2,K} \frac{h^3}{\rho^2} \ . \qquad \square$$

Reprenons les exemples précédents en appliquant maintenant le théorème 2-1 avec $p = q = 2$.

Cas de l'exemple 3-1 : On a $k = 1$, $n = p = 2$, donc le théorème (2-1) n'a lieu que pour $m = 0$.

$$\text{On obtient } \sum_{i=1}^{3} |p_i|_{0,2,K} = \sqrt{\frac{3}{2}}\, (\text{mes } K)^{\frac{1}{2}} \ , \ \text{d'où}$$

$$\forall u \in H^2(K) \ , \quad |u-\Pi u|_{0,2,K} \leq 3\, |u|_{2,2,K}\, h^2$$

Cas ce l'exemple 3-2 : Ici $k = 2$, $n = p = 2$: les seules valeurs possibles de m sont $m = 0$ et $m = 1$.

$\underline{m = 0}$: On obtient $\sum_{i=1}^{6} |p_i|_{0,2,K} = \frac{4 + \sqrt{3}}{\sqrt{10}}\, (\text{mes } K)^{1/2}$, d'où

$$\forall u \in H^3(K) \ , \quad |u-\Pi u|_{0,2,K} \leq |u|_{3,2,K}\, h^3$$

$\underline{m = 1}$: On obtient $\sum_{i=1}^{6} |p_i|_{1,2,K} \leq \frac{3 + 6\sqrt{2}}{\rho}\, (\text{mes } K)^{1/2}$, d'où

$$\forall u \in H^3(K) \ , \quad |u-\Pi u|_{1,2,K} \leq (1 + 3\,\frac{h}{\rho})\, |u|_{3,2,K}\, h^2 \ . \qquad \square$$

On peut remarquer que, lorsqu'il est applicable, le théorème 2-1 donne de meilleurs résultats que le théorème 1-1.

3-2 - Application à l'intégration numérique

Pour tout $u \in C^0(\bar{\Omega})$, soit

$$(3\text{-}1) \qquad R(u) = \int_{\Omega} u(x)dx - \sum_{i=1}^{N} \omega_i u(a_i)$$

l'erreur d'intégration de u sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$ correspondant à une formule d'intégration approchée caractérisée par des poids ω_i , $i = 1,\ldots, N$ et des points $a_i \in \bar{\Omega}$, $i = 1,\ldots, N$. On suppose que

(3-2) $\forall \psi \in P_k \quad , \quad R\psi = 0$

i.e. que l'intégration est exacte sur P_k . Notons que l'on a

(3-3) $$\sum_{i=1}^{N} \omega_i = \text{mes } \Omega$$

Théorème 3-1

On suppose que n , p , k vérifient (1-1) , que Ω est un ouvert convexe borné non vide de $\mathbb{R}^n$ à frontière lipschitzienne, que R est la forme linéaire définie par (3-1) et (3-2) .

Alors, pour tout $u \in W^{k+1,p}(\Omega)$, on a :

(3-4) $$|R(u)| \leq \left\{ (\text{mes } \Omega)^{1/q} + \frac{\sum_{i=1}^{N} |\omega_i|}{(\text{mes } \Omega)^{1/p}} \right\} \frac{1}{k!} \quad \frac{1}{k+1-\frac{n}{p}} |u|_{k+1,p,\Omega} \, h^{k+1} \quad ,$$

où q est tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Démonstration

Il suffit de montrer (3-4) pour $u \in C^{k+1}(\bar{\Omega})$ et $p < +\infty$, le cas général résultant alors d'un raisonnement précédemment utilisé.

Soit donc $u \in C^{k+1}(\bar{\Omega})$. On déduit de (3-1) et (3-2) que

$$|R(u)| \leq |u-\psi_T(u,a)|_{0,1,\Omega} + \sum_{i=1}^{N} |\omega_i| \quad |u(a_i) - \psi_T(u,a)(a_i)|$$

où $\psi_T(u,a)$, avec $a \in \Omega$, quelconque, est défini par (2-1). On a encore

$$|R(u)| \leq (\text{mes}\Omega)^{1/q} \quad |u-\psi_T(u,a)|_{0,p,\Omega} + \sum_{i=1}^{N} |\omega_i| \quad |u(a_i)-\psi_T(u,a)(a_i)|.$$

Prenant alors les normes $L^p(\Omega)$ des deux membres considérés comme fonction de la variable a , on obtient

$$|R(u)| \leq (\text{mes } \Omega)^{\frac{1}{q}} \left(\frac{1}{\text{mes } \Omega} \int_{\Omega} |u-\psi_T(u,a)|^p_{0,p,\Omega} da \right)^{\frac{1}{p}} + \frac{\sum_{i=1}^{N} |\omega_i|}{(\text{mes } \Omega)^{1/p}} \left(\int_{\Omega} |u(a_i)-\psi_T(u,a)(a_i)|^p da \right)^{\frac{1}{p}} .$$

On procède ensuite comme dans la démonstration du théorème (2-1) et le résultat suit. □

Notons que lorsque les poids ω_i sont *positifs*, il résulte de (3-3) que (3-4) s'écrit

$$|R(u)| \leq 2 \, (\text{mes } \Omega)^{\frac{1}{q}} \frac{1}{k!} \quad \frac{1}{k+1-\frac{n}{p}} |u|_{k+1,p,\Omega} \quad h^{k+1} .$$

REFERENCES

[1] BARNHILL R.E. et WHITEMAN J.R., Error Analysis of Finite Element Methods with Triangles for Elliptic Boundary Value Problems, *The mathematics of Finite Elements and Applications* (J.R. WHITEMAN, ed.), 83-112, Acad. Press (1973).

[2] BRAMBLE J.H. et HILBERT S.R., *Estimation of Linear Functionals on Sobolev Spaces with Application to Fourier Transforms and Spline Interpolation*, SIAM J. Numer. Anal. 7, 112-124 (1970).

[3] BRAMBLE J.H. et HILBERT S.R., *Bounds for a Class of Linear Functionals with Applications to Hermite Interpolation*, Numer. Math. 16, 362-369 (1971).

[4] CIARLET P.G. et RAVIART P.A., *General Lagrange and Hermite Interpolation in $\mathbb{R}^n$ with Applications to Finite Element Methods*, Arch. Rat. Mech. Anal. 46, 177-199 (1972).

[5] CIARLET P.G. et RAVIART P.A., *Interpolation Theory over Curved Elements with Applications to Finite Element Methods*, Comp. Meth. Appl. Mech. Engin. 1, 217-249 (1972).

[6] CIARLET P.G. et WAGSCHAL C., *Multipoint Taylor Formulas and Applications to Finite Element Method*, Numer. Math. 17, 84-100 (1971).

[7] CHENIN P., *Thèse 3ème cycle*, Grenoble (1974).

[8] COATMELEC C., *Approximation et interpolation des fonctions différentiables de plusieurs variables*, Ann. Sc. Ecole Norm. Sup. (3) 83, 271-341 (1966).

[9] DESCLOUX J., *Méthode des éléments finis*, Ecole polytechnique fédérale de Lausanne (1973).

[10] MEINGUET J., Realistic Estimates for Generic Constants in Multivariate Pointwise Approximation, *Topics in Numerical Analysis II*, J.J.H. Miller ed., Acad. Press. (1975).

[11] NEČAS J., *Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques*, Masson (1967).

[12] RAVIART P.A., *Méthodes des éléments finis*, rédigé par J.M. THOMAS, D.E.A. Analyse Numérique, Paris VI (1971-1972).

[13] STRANG G., *Approximation in the Finite Element Method*, Numer. Math. 19, 81-98 (1972).

[14] STROUD A.H., *Approximate Calculation of Multiple Integrals*, Prentice Hall (1971).

[15] ZIENKIEWICZ O.C., *La méthode des éléments finis*, Ediscience, Paris (1973).

====