PUBLICATIONS MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUES DE RENNES

J. C. NEDELEC

Calcul par éléments finis des courants de Foucault sur une surface conductrice de R^3

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1976, fascicule S5
« Journées « éléments finis » », , p. 1-24

<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1976___S5_A12_0>

© Département de mathématiques et informatique, université de Rennes, 1976, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications mathématiques et informatiques de Rennes » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

CALCUL PAR ÉLÉMENTS FINIS DES COURANTS DE FOUCAULT

SUR UNE SURFACE CONDUCTRICE DE R^3.

par J.C. NEDELEC

Ecole Polytechnique - Centre de Mathématiques Appliquées
91120 PALAISEAU - Tél. : 941 82 00

RÉSUMÉ

Nous étudions les courants de Foucault sur une surface Γ conductrice mince dans R^3.

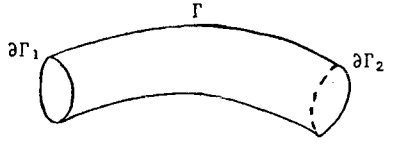
Nous supposons que ces courants sont créés par une excitation (différence de potentiel ou courant imposé) périodique alternative. Nous écrirons, alors, les équations des courants en utilisant la variable densité surfacique du courant qui est un vecteur complexe tangent à Γ.

Nous montrons, d'abord, que ces équations intégro-différentielles ont une solution unique. Nous introduisons, ensuite, un problème approché sur une surface approchée, construits par éléments finis.

Nous étudions l'erreur d'approximation de cette méthode. Des calculs numériques ont été réalisés et comparés à des résultats de mesures. Nous renvoyons, pour ces résultats, à NEDELEC-VERITE [1].

1 - POSITION DU PROBLÈME PHYSIQUE ET FORMULATION VARIATIONNELLE.

Nous étudions les courants dans un conducteur mince que nous assimilons à une surface Γ de R^3. Nous supposons que cette surface est homéomorphe à un cylindre, c'est-à-dire qu'elle comporte une seule nappe percée de deux trous. Nous noterons $\partial\Gamma_1$ et $\partial\Gamma_2$ les courbes fermées de R^3 qui sont les bords de ces trous.



Nous étudions le cas de courants alternatifs, de période ω. Les inconnues du problème sont, alors, d'une part, le courant surfacique J, qui est un vecteur complexe tangent à la surface Γ, et, d'autre part, le potentiel scalaire V, qui est une fonction complexe définie dans l'espace R^3.

Si nous négligeons certains effets relativistes, nous pouvons admettre que le courant J est conservatif sur la surface Γ, ce que nous traduirons par l'équation

$$\text{div } J = 0 . \tag{1.1}$$

L'équation de Maxwell s'écrit, dans l'espace R^3,

$$\frac{1}{\sigma} J(x) + \frac{i\omega\mu}{c^2} \int_\Gamma \frac{J(y)}{|x-y|} dy = - \text{grad } V , \tag{1.2}$$

où σ désigne la résistivité surfacique du conducteur, μ, la perméabilité magnétique, et c, la vitesse de la lumière.

Les conditions aux limites, sur les bords des trous, sont de deux types. Ou bien, le potentiel V est imposé sur $\partial\Gamma$ (et il est facile de voir alors que seule intervient la différence de potentiel entre $\partial\Gamma_1$ et $\partial\Gamma_2$), ou bien, le flux de courant sortant est imposé (i.e. $J.n$, où n est la normale à $\partial\Gamma$ dans le plan tangent à Γ).

Remarque 1 : Nous pourrions considérer le cas d'une surface à plusieurs nappes et à plus de deux trous, avec les conditions aux limites des deux types qui peuvent être mixtes. C'est dans le souci de clarifier l'exposé que nous avons considéré le cas le plus simple.

Nous allons préciser les équations (1.1) et (1.2). Précisons, d'abord, la surface Γ. Elle est définie par la donnée d'un nombre fini p de cartes qui sont des applications bijectives Φ_i d'un ouvert θ_i de R^2 sur une partie Γ_i de R^3 :

$$\xi = (\xi_1, \xi_2) \in \theta_i \rightarrow \Phi_i(\xi_1, \xi_2) = \begin{cases} x_i(\xi_1, \xi_2) \\ y_i(\xi_1, \xi_2) \\ z_i(\xi_1, \xi_1) \end{cases}$$

telles que les applications Φ_i soient suffisamment régulières, et telles que les vecteurs tangents

$$e_1 = \frac{\partial\Phi_i}{\partial\xi_1} , \quad e_2 = \frac{\partial\Phi_i}{\partial\xi_2}$$

soient non co-linéaires. Nous noterons e_3 le vecteur normal "extérieur", de longueur 1. D'autre part, les applications $\Phi_i^{-1} \circ \Phi_j$ sont bijectives et régulières de l'ensemble $\Phi_j^{-1}(\Gamma_i \cap \Gamma_j)$ sur $\Phi_i^{-1}(\Gamma_i \cap \Gamma_j)$.

Les bords $\partial\Gamma_1$ et $\partial\Gamma_2$ sont alors des courbes de la surface Γ, dont les images par les cartes Φ_i^{-1} sont des courbes régulières de R^2.

Nous supposons, afin de construire une triangulation, que nous pouvons trouver, dans chaque domaine θ_i, un fermé D_i polyhédrique, tels que

$$\bigcup_{i=1}^{P} \Phi_i(D_i) = \Gamma$$

$\Phi_i(D_i) \cap \Phi_j(D_j)$; $i \neq j$; est une courbe de Γ.

Les vecteurs e_1, e_2, nous permettent de définir la première forme fondamentale de la surface par

$$g_{ij} = e_i \cdot e_j \quad , \quad 1 \leqslant i, j \leqslant 2 ,$$

(où . désigne le produit scalaire euclidien de R^3 , et également, le produit scalaire hermitien de C^3).

La matrice inverse sera notée par g^{ij}. Les vecteurs

$$e^i = g^{ij} e_j \quad \text{(convention de sommation de l'indice répété)}$$

constituent la base duale de la base (e_1, e_2) du plan tangent.

Rappelons que l'élément d'aire $d\gamma$ sur la surface Γ est

$$d\gamma = \sqrt{g} \; d\xi^1 \; d\xi^2$$

avec

$$g = g_{11} \; g_{22} - (g_{12})^2 = \det (g_{ij}).$$

Un vecteur complexe J , tangent à Γ , sera alors repéré, soit par ses coordonnées complexes dans la base e_1, e_2 , notées J^1, J^2 (coordonnées contra-variantes), soit par ses coordonnées dans la base duale (coordonnées co-variantes), notées J_1, J_2. Nous avons donc :

$$J_i = g_{ij} \; J^j$$
$$J^i = g^{ij} \; J_j .$$

Le produit hermitien de deux vecteurs J et K, définis au même point, sera

$$J \cdot K = g_{ij} \; J^i \; \overline{K}^j = J^i \; \overline{K}_i = J_i \; \overline{K}^i = g^{ij} \; J_i \; \overline{K}_j .$$

Nous noterons par

$$|J| = (J \cdot J)^{1/2}$$

la norme hermitienne de J.

Nous définissons le gradient d'une fonction V, définie sur Γ, comme le vecteur X de coordonnées co-variantes :

$$X_i = \frac{\partial V}{\partial \xi^i} .$$

Le rotationnel d'une fonction φ , définie sur Γ , sera le vecteur X de coordonnées contra-variantes (noté $\vec{rot}\ \varphi$)

$$X^1 = -\frac{1}{\sqrt{g}} \; \frac{\partial \varphi}{\partial \xi^2} \quad , \quad X^2 = \frac{1}{\sqrt{g}} \; \frac{\partial \varphi}{\partial \xi^1} .$$

La divergence d'un vecteur J sera la fonction scalaire

$$\text{div } J = \frac{1}{\sqrt{g}} \; \frac{\partial}{\partial \xi^i} \; (\sqrt{g} \; J^i) .$$

Le rotationnel du vecteur X sera la fonction scalaire

$$\text{rot } X = \frac{1}{\sqrt{g}} \left(\frac{\partial X_2}{\partial \xi^1} - \frac{\partial X_1}{\partial \xi^2} \right) .$$

On vérifie, alors, facilement que

$$|\text{grad } \varphi|^2 = g^{ij} \; \frac{\partial \varphi}{\partial \xi^i} \; \frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial \xi^j} = |\text{rot } \varphi|^2 .$$

On définit aussi le laplacien qui est la fonction scalaire

$$\Delta \varphi = \text{div grad } \varphi = \text{rot } \vec{rot}\ \varphi = \frac{1}{\sqrt{g}} \; \frac{\partial}{\partial \xi^i} \left(\sqrt{g} \cdot g^{ij} \; \frac{\partial \varphi}{\partial \xi^j} \right) .$$

Nous avons les propriétés suivantes :

PROPOSITION 1.1 : Soit J *un vecteur tangent à* Γ *, et* φ *une fonction définie sur* Γ *, tels que* $J \in H^1(\Gamma)$ *, et* $\varphi \in H^1(\Gamma)$ *, nous avons :*

$$\int_\Gamma \overline{\varphi} \ \text{div} \ J \ d\gamma + \int_\Gamma J \ . \ \text{grad} \ \varphi \ d\gamma = \int_{\partial\Gamma} \overline{\varphi} \ J \ . \ n \ d s \ ; \tag{1.3}$$

$$\int_\Gamma J \ . \ \vec{\text{rot}} \ \varphi \ d\gamma + \int_\Gamma \overline{\varphi} \ \text{rot} \ J \ d\gamma = \int_{\partial\Gamma} \overline{\varphi} \ J \ . \ t \ d s \ , \tag{1.4}$$

où n *est la normale extérieure à* $\partial\Gamma$ *dans le plan tangent à* Γ *, et* t *la tangente orientée à* $\partial\Gamma$ *.*

Démonstration : Les égalités (1.3) et (1.4) sont des cas particuliers de la formule générale de Stokes pour des formes différentielles extérieures sur des variétés (Cf Mme LELONG-FERRAND [2]) ;

$$\int_\Gamma d\omega = \int_{\partial\Gamma} \omega$$

où $d\omega$ désigne la différentielle extérieure de la forme ω. Nous obtenons (1.3) en choisissant :

$$\omega = \overline{\varphi} \sqrt{g} \ (- J^2 \, d\xi^1 + J^1 \, d\xi^2)$$

$$d\omega = \overline{\varphi} \ \text{div} \ J \ . \sqrt{g} \ d\xi^1 \, d\xi^2 + J^i \ \frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial \xi^i} \sqrt{g} \ d\xi^1 \, d\xi^2 \ .$$

Il reste à vérifier que les coordonnées co-variantes du vecteur unitaire normal extérieur à Γ dans le plan tangent, sont :

$$n_1 = - \sqrt{g} \ \frac{d\xi^1}{ds} \quad ; \quad n_2 = \sqrt{g} \ \frac{d\xi^2}{ds} \ .$$

Nous obtenons (1.4) en choisissant

$$\omega = \overline{\varphi} \ (J_1 \, d\xi^1 + J_2 \, d\xi^2) \ ;$$

$$d\omega = \overline{\varphi} \ \text{rot} \ J \ \sqrt{g} \ d\xi^1 \, d\xi^2 + J \ . \ \vec{\text{rot}} \ \varphi \ \sqrt{g} \ d\xi^1 \, d\xi^2 \ .$$

Il reste alors à vérifier que le vecteur contra-variant de coordonnées $\frac{d\xi^1}{ds}$, $\frac{d\xi^2}{ds}$, est bien le vecteur unitaire tangent à $\partial\Gamma$, l'orientation étant fixée par le sens de parcours choisi.

PROPOSITION 1.2 : Soient J *et* X *, deux vecteurs tangents à* Γ *. Nous avons les équivalences*

$$\text{div} \ J = 0 \ \ et \ \ J \in L^2(\Gamma) \iff J = \text{rot} \ \varphi + \lambda \ J_0 \ , \ \ \lambda \in C \tag{1.5}$$

avec $\varphi \in H^1(\Gamma)$ *et* $J_0 \in L^2(\Gamma)$, $\text{div} \ J_0 = 0$ *et* $\int_{\partial\Gamma_1} J_0 \ . \ n \ d s \neq 0$

$$\text{rot} \ X = 0 \ \ et \ \ X \in L^2(\Gamma) \iff X = \text{grad} \ V + \nu X_0 \ , \ \ \nu \in C \tag{1.6}$$

avec $V \in H^1(\Gamma)$ *et* $X_0 \in L^2(\Gamma)$, $\text{rot} \ X_0 = 0$ *et* $\int_{\partial\Gamma_1} X_0 \ . \ t \ d s = 1$

(φ *et* V *sont uniques à une constante près si* J_0 *et* X_0 *sont donnés).*

Démonstration : En choisissant $\lambda = \int_{\partial\Gamma_1} J \ . \ n \ d s$, nous voyons, d'après (1.3), que

$$\int_{\partial\Gamma_1} (J - \lambda \, J_0) \ . \ n \ d s = \int_{\partial\Gamma_2} (J - \lambda \, J_0) \ . \ n \ d s = 0 \ .$$

L'équivalence (1.5) est alors une conséquence du théorème de De Rham [ ]. L'équivalence (1.6) est analogue.

Remarque 2 : Si nous imposons $J \ . \ n = 0$ sur une portion de frontière $\partial\Gamma_1$, par exemple, nous obtenons une proposition analogue en choisissant $\varphi \in H^1$ et $\varphi|_{\partial\Gamma_1} = 0$.

Nous pouvons, maintenant, donner la formulation variationnelle de l'équation (1.2). Soit H l'espace de Hilbert suivant :

$$H = \left\{ K \in L^2(\Gamma) \ ; \ K \text{ tangent à } \Gamma \, , \ \text{div} \ K = 0 \right\} .$$

Le courant J sera alors solution de (nous notons x et y des points courants de Γ)

(1.7)
$$\begin{cases} \text{Trouver } J \in H \text{ tel que} \\ \displaystyle\int_\Gamma \frac{1}{\sigma} J.K \, d\gamma + \frac{i\omega\mu}{c^2} \int_\Gamma \int_\Gamma \frac{J(x).K(y)}{|x-y|} \, d\gamma_x \, d\gamma_y = -\int_{\partial\Gamma} V_0 \, n.K \, ds \, , \; \forall K \in H \, . \end{cases}$$

La fonction V_0 est le potentiel imposé sur $\partial\Gamma$. Si nous choisissons J_0 réel et régulier, avec

$$\operatorname{div} J_0 = 0 \qquad \text{et} \qquad \int_{\partial\Gamma_1} J_0 \, . \, n \, ds = 1 \, ,$$

nous aurons la formulation équivalente (d'après la proposition (1.2) :

(1.8)
$$\int_\Gamma \frac{1}{\sigma} (\vec{\text{rot}}\,\varphi + \lambda J_0).(\vec{\text{rot}}\,\psi + \nu J_0) d\gamma + \frac{i\omega\mu}{c^2} \int_\Gamma \int_\Gamma \frac{(\vec{\text{rot}}\,\varphi + \lambda J_0)(x).(\vec{\text{rot}}\,\psi + \nu J_0)(y)}{|x-y|} \, d\gamma_x \, d\gamma_y$$
$$= -\int_{\partial\Gamma} V_0 \, n.(\vec{\text{rot}}\,\psi + \nu J_0) \, ds \, , \; \forall \psi \in H^1(\Gamma) \, , \; \nu \in C \, .$$

THEOREME 1.1 : Si $V_0 \in H^{1/2}(\partial\Gamma)$, le problème (1.7) (et donc le problème (1.8)) admet une solution unique dans $L^2(\Gamma)$, et si de plus $V_0 \in H^{3/2}(\partial\Gamma)$, alors la solution est dans $H^1(\Gamma)$ (donc φ est dans $H^2(\Gamma)$ si $J_0 \in H^1(\Gamma)$).

Démonstration : Si nous notons $a(J,K)$ la forme sesquilinéaire du premier membre de (1.7), nous savons que

(1.9)
$$|a(J,K)| \leq M \, |J|_{L^2(\Gamma)} \, |K|_{L^2(\Gamma)} \, ;$$

et que, d'autre part,

(1.10)
$$\mathcal{R}e \; a(J,J) = \frac{1}{\sigma} \, |J|^2_{L^2(\Gamma)} \, ;$$

Le théorème de Lax-Milgram, appliqué dans l'espace H, nous assure donc l'existence et l'unicité de J. Il suffit de vérifier que le second membre est une forme linéaire continue sur l'espace H, ce qui est vrai si $V_0 \in H^{1/2}(\partial\Gamma)$ d'après le théorème de trace ($n.K \in H^{-1/2}(\partial\Gamma)$ si $K \in H$).

Il en résulte, d'après NEDELEC-PLANCHARD [3], que la fonction vectorielle

$$\psi(y) = \int_\Gamma \frac{J(x)}{|x-y|} \, d\gamma_x$$

est dans l'espace $H^1(\Gamma)$ (c'est encore l'intégrale sur une surface fermée $\tilde{\Gamma}$ régulière portant Γ du prolongement de J par zéro à $\tilde{\Gamma}$).

Désignons par $P\,\psi(y)$, la projection du vecteur $\psi(y)$ sur le plan tangent en y à la surface Γ. Alors $P\,\psi(y)$ est aussi dans $H^1(\Gamma)$. Nous vérifions (en utilisant (1.4)) que

$$\frac{1}{\sigma} \Delta\varphi = -\frac{\lambda}{\sigma} \operatorname{rot} J_0 - \frac{i\omega\mu}{c^2} \operatorname{rot} P.\psi \, ;$$

et (en utilisant la formule $\operatorname{grad}\varphi.n = \operatorname{rot}\varphi.t$) que

$$\frac{1}{\sigma} \frac{\partial\varphi}{\partial n} = \frac{\partial V_0}{\partial s} - \frac{\lambda}{\sigma} J_0 \, . \, t - \frac{i\omega\mu}{c^2} P\psi \, . \, t \quad , \text{ sur } \partial\Gamma \, .$$

Donc, si $V_0 \in H^{3/2}(\partial\Gamma)$, on voit que

$$\begin{cases} \Delta\varphi \in L^2(\Gamma) \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial n} \in H^{1/2}(\partial\Gamma) \, , \end{cases}$$

ce qui entraîne

$$\varphi \in H^2(\Gamma) \, ,$$

par un résultat de régularité classique.

Remarque 3 : En ré-utilisant le même argument, on pourrait montrer que $\psi \in H^{3/2-\varepsilon}(\Gamma)$ $(\varepsilon > 0)$, et en déduire une régularité correspondante pour φ et J. A cause du terme en ψ, il semble donc que la régularité maximale de J est $H^{3/2-\varepsilon}(\Gamma)$ pour tout ε positif.

Remarque 4 : La fonction φ dépend du choix de J_0, mais est unique pour J_0 fixé.

COROLLAIRE 1.1 : Si $V_0 \in H^{3/2}(\Gamma)$, *alors il existe une fonction* V *unique dans* $H^2(\Gamma)$, *telle que :*

$$(1.11) \qquad \begin{cases} \frac{1}{\sigma} J(x) + \frac{i\omega\mu}{c^2} P_x \int_\Gamma \frac{J(y)}{|x-y|} d\gamma_y = - \operatorname{grad} V \\ V|_{\partial\Gamma} = V_0 , \end{cases}$$

où P_x *est la projection des vecteurs de* R^3 *sur le plan tangent à* Γ, *au point* x.

Démonstration : Soit V_0 une fonction définie sur Γ, dont la trace sur $\partial\Gamma$ est V_0. Nous avons, d'après (1.3),

$$\int_{\partial\Gamma} V_0 \, n . K \, ds = \int_\Gamma \operatorname{grad} V_0 . K \, d\gamma .$$

Si nous posons

$$P\psi(x) = P_x \int_\Gamma \frac{J(y)}{|x-y|} d\gamma_y ,$$

nous avons

$$\int_\Gamma \left(\frac{1}{\sigma} J + \frac{i\omega\mu}{c^2} P\psi + \operatorname{grad} V_0 \right) . K \, d\gamma = 0 , \quad \forall K \in H .$$

En choisissant $K = \vec{rot}\ \varphi$, et en utilisant (1.4), nous avons

$$- \int_\Gamma \operatorname{rot} \left(\frac{1}{\sigma} J + \frac{i\omega\mu}{c^2} P\psi + \operatorname{grad} V_0 \right) \overline{\varphi} \, d\gamma + \int_{\partial\Gamma} \left(\frac{1}{\sigma} J + \frac{i\omega\mu}{c^2} P\psi + \operatorname{grad} V_0 \right) . t \, \overline{\varphi} \, ds = 0 .$$

Nous choisissons alors, successivement, $\varphi \in H_0^1(\Gamma)$, d'où

$$\operatorname{rot} \left(\frac{1}{\sigma} J + \frac{i\omega\mu}{c^2} P\psi + \operatorname{grad} V_0 \right) = 0 ,$$

puis $\varphi \in H^1(\Gamma)$,

$$\left(\frac{1}{\sigma} J + \frac{i\omega\mu}{c^2} P\psi + \operatorname{grad} V_0 \right) . t = 0 .$$

D'où, d'après (1.6),

$$\frac{1}{\sigma} J + \frac{i\omega\mu}{c^2} P\psi + \operatorname{grad} V_0) = - \operatorname{grad} V - \nu X_0 .$$

En choisissant alors φ avec

$$\varphi|_{\partial\Gamma_1} = 1 \quad , \quad \varphi|_{\partial\Gamma_2} = 0 ,$$

nous voyons que $\nu = 0$. Nous avons aussi

$$\operatorname{grad} V . t = 0 .$$

Nous pouvons donc choisir V constant sur $\partial\Gamma_1$ et sur $\partial\Gamma_2$. Nous avons (V_1 et V_2 désignent les valeurs constantes de V sur $\partial\Gamma_1$ et sur $\partial\Gamma_2$ respectivement)

$$0 = \int_\Gamma \operatorname{grad} V . J_0 \, ds = \int_{\partial\Gamma} V \, J_0 . n \, ds = \int_{\partial\Gamma_1} V_1 \, J_0 . n \, ds - \int_{\partial\Gamma_2} V_2 \, J_0 . n \, ds = V_1 - V_2 .$$

Nous pouvons donc choisir V dans $H_0^1(\Omega)$. La fonction $V + V_0$ satisfait alors à (1.11).

2 - APPROXIMATION PAR ÉLÉMENTS FINIS.

Afin d'approcher la solution du problème (1.7), nous allons introduire, d'abord, une surface Γ_h , puis un espace H_h de vecteurs définis sur Γ_h qui approchent respectivement Γ et H .

Pour chaque domaine polyhédrique D_i , nous construisons une triangulation T_{hi} (par des triangles dont le diamètre maximal est noté h et vérifiant la classique condition des angles $\theta \geq \theta_0 > 0$, θ_0 indépendant de h). Considérons alors Φ_{ih} , l'interpolé affine de l'application Φ_i , définie par

$\Phi_{ih}(a) = \Phi_i(a)$, pour tout sommet a de T_{hi} ;

Φ_{ih} est affine sur chaque triangle de T_{hi} .

Nous noterons F_T la restriction de l'application Φ_{ih} à un triangle T de T_{hi} .

L'image de D_i par Φ_{ih} est alors (pour h assez petit au moins) une surface Γ_{ih} continue, formée de triangles plats, dont les sommets sont les points $\Phi_i(a)$, $a \in S_i$.

Nous supposons les triangulations T_{hi} compatibles entre elles : les sommets des triangulations Γ_{ih} et Γ_{jh} $(i \neq j)$, situés sur les courbes $\Phi_i(D_i) \cap \Phi_j(D_j)$ sont communs. Alors, l'union des Γ_{ih} forme une surface Γ_h qui est homéomorphe à Γ, dont les cartes sont les applications Φ_{ih} , qui sont bijectives pour h assez petit.

Les courants approchés seront des vecteurs complexes constants sur chaque triangle de Γ_h , vérifiant, de plus, la condition d'égalité du flux sur un côté commun à deux triangles T_1 et T_2 (normales n_1 et n_2 à ce côté dans T_1 et T_2 , respectivement)

$$J_1 \cdot n_1 + J_2 \cdot n_2 = 0 . \tag{2.1}$$

Nous désignerons par H_h cet espace vectoriel.

Le problème approché est alors :

$$\int_{\Gamma_h} \frac{1}{\sigma} J_h \cdot K_h \, d\gamma + \frac{i\omega\mu}{c^2} \int_{\Gamma_h}\int_{\Gamma_h} \frac{J_h(x) \cdot K_h(y)}{|x - y|} \, d\gamma_x \, d\gamma_y = - \int_{\partial\Gamma_h} V_{0h} \, n \cdot K_h \, d\gamma \quad , \quad \forall K_h \in H_h . \tag{2.2}$$

Soit J_{0h} dans l'espace H_h tel que

$$\int_{\partial\Gamma_{h_1}} J_{0h} \cdot n \, ds = 1 .$$

Nous avons alors la

PROPOSITION 2.1 :

$$J_h \in H_h \iff J_h = \lambda J_{0h} + \vec{rot} \ \varphi_h$$

$$\varphi_h \in \Phi_h$$

$$\Phi_h = \left\{ \varphi_h \in C^0(\Gamma_h) \ , \ \varphi_h|_T \in P_1 \ ; \ \forall T \subset \Gamma_h \right\} .$$

Démonstration : Choisissons λ tel que

$$\int_{\partial\Gamma_{h_1}} (J_h \cdot n - \lambda J_{0h} \cdot n) \, ds = \int_{\partial\Gamma_{h_2}} (J_h - \lambda J_{0h}) \cdot n \, ds = 0 . \tag{2.3}$$

Alors, sur chaque facette T de Γ_h , φ_h est défini à une constante près (dans les coordonnées locales de cette facette, J_h est à divergence nulle puisque constant). La condition de raccord (2.1) de J_h sur le côté commun à deux triangles T_1 et T_2 montre alors que l'on peut choisir, pour φ_{h_1} et φ_{h_2} , des valeurs communes sur ce côté. On peut alors construire φ_h de proche en proche, et la condition (2.3) montre que cette construction conduit à une fonction φ_h globalement continue.

Réciproquement, la continuité de φ_h entraîne (2.1). ∎

Nous avons, d'après la proposition 2.1, une formulation équivalente du problème (2.2), qui est

$$\int_{\Gamma_h} \frac{1}{\sigma}(\vec{rot}\,\varphi_h + \lambda J_{0h}).(\vec{rot}\,\psi_h + \nu J_{0h})d\gamma + \frac{i\omega\mu}{c^2}\int_{\Gamma_h}\int_{\Gamma_h} \frac{(\vec{rot}\,\varphi_h + \lambda J_{0h})(x).(\vec{rot}\,\psi_h + \nu J_{0h})(y)}{|x - y|} d\gamma_x d\gamma_y \tag{2.4}$$

$$= -\int_{\partial\Gamma_h} V_{0h}\ n.(\vec{rot}\,\psi_h + \nu J_{0h})\,ds\ ,\ \forall \nu \in c\ ,\ \varphi_h \in \psi_h\ . \tag{2.7}$$

Afin d'étudier l'erreur d'approximation, nous allons comparer, au vecteur J, un vecteur $\tilde{J}_h$ lié à J_h de la façon suivante : un vecteur J_h de l'espace H_h sera réperé par ses coordonnées contra-variantes dans le système d'axes mobiles associés aux différentes cartes Φ_{hi}. Nous pouvons alors associer, au champ de vecteurs $J_h|_{\Gamma_{hi}}$, le champ de vecteurs $\hat{J}_{hi}$ défini sur D_i de coordonnées co-variantes ($\sqrt{g_h}$ est l'élément d'aire sur Γ_h) :

$$\begin{aligned} \hat{J}_{hi_1}|_T &= J_h^1 \sqrt{g_h} \\ \hat{J}_{hi_2}|_T &= J_h^2 \sqrt{g_h}\ . \end{aligned} \tag{2.5}$$

Alors, la propriété (2.1) nous permet de vérifier que $\hat{J}_{hi}$ est un champ de vecteurs à divergence nulle dans $L^2(D_i)$. (Si T_1 et T_2 sont deux triangles adjacents de D_i, et $\vec{n}$ la normale au côté commun, on a encore

$$(\hat{J}_h|_{T_1} - \hat{J}_h|_{T_2}).n = 0\ ).$$

Enfin, nous définissons le champ de vecteurs $\tilde{J}_h$ sur Γ comme le champ de vecteurs dont les coordonnées contra-variantes, dans les axes associés à la carte Φ_i, sont :

$$\begin{aligned} \tilde{J}_h^1 &= \frac{1}{\sqrt{g}}\ \hat{J}_{h_1} \\ \tilde{J}_h^2 &= \frac{1}{\sqrt{g}}\ \hat{J}_{h_2}\ . \end{aligned} \tag{2.6}$$

Nous vérifions alors que $\tilde{J}_h$ est un champ de vecteurs à divergence nulle. Nous avons le lemme suivant ;

LEMME 2.1 : Soit a *la forme sesquilinéaire du premier membre de (1.7) et* a_h *la forme sesquilinéaire du premier membre de (2.1), nous avons*

$$|a_h(J_h, K_h) - a(\tilde{J}_h, \tilde{K}_h)| \leq c\ h\ |\tilde{J}_h|_{L^2(\Gamma)}\ |\tilde{K}_h|_{L^2(\Gamma)}\ .$$

Démonstration :

$$a_h(J_h, K_h) = \int_{\Gamma_h} \frac{1}{\sigma}\ J_h.K_h\ d\gamma_h + \frac{i\omega\mu}{c^2}\int_{\Gamma_h}\int_{\Gamma_h} \frac{J_h(x).K_h(y)}{|x - y|}\ d\gamma_x\ d\gamma_y\ .$$

Nous transformons les intégrales sur Γ_h en intégrales sur Γ, en utilisant les applications $\Phi_i \circ \Phi_{hi}^{-1}$. D'où

$$a_h(J_h,K_h) = \int_{\Gamma} \frac{1}{\sigma}\ J_h(x_h).K_h(x_h)\sqrt{\frac{g_h}{g}}\ d\gamma + \frac{i\omega\mu}{c^2}\int_{\Gamma}\int_{\Gamma} \frac{J_h(x_h).K_h(y_h)}{|x_h - y_h|}\sqrt{\frac{g_h(x_h)g_h(y_h)}{g(x)\ g(y)}}\ d\gamma_x d\gamma_y$$

avec

$$x = \Phi_i \circ \Phi_{hi}^{-1}\ (x_h)\quad ,\ \text{si}\ \ x \in \Gamma_i$$

$$y = \Phi_j \circ \Phi_{hi}^{-1}\ (y_h)\quad ,\ \text{si}\ \ y \in \Gamma_j\ .$$

Comparons, maintenant, $J_h(x_h)$ et $\tilde{J}_h(x)$:

$$J_h(x_h) = J_h^1\ \frac{\partial\Phi_{hi}}{\partial\xi^1} + J_h^2\ \frac{\partial\Phi_{hi}}{\partial\xi^2}$$

$$\tilde{J}_h(x) = \sqrt{\frac{g_h(x_h)}{g(x)}}\ \left(J_h^1\ \frac{\partial\Phi_i}{\partial\xi^1} + J_h\ \frac{\partial\Phi_i}{\partial\xi^2} \right)\ .$$

Mais nous savons que

$$\left| \frac{\partial\Phi_i}{\partial\xi^1} - \frac{\partial\Phi_{hi}}{\partial\xi^1} \right| \leq c\ h \max_{x \in D_i} |D^2\ \Phi_i(\xi)|\ ,$$

d'où nous déduisons

$$\left| \sqrt{\frac{g_h(x_h)}{g(x)}} - 1 \right| \leq c\ h\ .$$

D'où $(x = \Phi_i \circ \Phi_{hi}^{-1}(x_h))$

$$|J_h(x_h) - \tilde{J_h}(x)| \leq c\ h\ |\tilde{J_h}|\ .$$

Nous en déduisons

$$\left| \int_\Gamma \frac{1}{\sigma} J_h(x_h).K_h(x_h)\sqrt{\frac{g_h}{g}}\ d\gamma - \int_\Gamma \frac{1}{\sigma} \tilde{J_h}(x).\tilde{K_h}(x)\ d\gamma \right| \leq c\ h\ |\tilde{J_h}|_{L^2(\Gamma)}\ |\tilde{K_h}|_{L^2(\Gamma)}\ . \tag{2.8}$$

Comparons, maintenant, le second terme de a_h au second membre de a. Il apparait une erreur supplémentaire, due au terme

$$\left| \frac{1}{|x_h - y_h|} - \frac{1}{|x-y|} \right| = \frac{\left| |x-y| - |x_h - y_h| \right|}{|x_h - y_h|\ |x-y|} \leq \frac{|x - y - x_h + y_h|}{|x_h - y_h|\ |x-y|}\ . \tag{2.9}$$

Nous considérons alors deux cas :

- ou bien

$$|x - y| \geqslant c\ h\ ,$$

et alors

$$|x - x_h| \leq c\ h^2 \quad (\text{car } |\Phi_i - \Phi_{hi}| \leq c\ h^2)\ ,$$

et nous majorons (2.9) par $\dfrac{c\ h}{|x-y|}$;

- ou bien

$$|x - y| \leqslant c\ h\ ,$$

et alors nous pouvons considérer que, dans un voisinage de $\xi = \Phi_i^{-1}(x)$, $\Phi_i(\xi) - \Phi_{ih}(\xi)$ est une fonction lipschitzienne à dérivée bornée par c h.

D'où

$$|x - x_h - (y - y_h)| \leq c\ h\ |x - y| \quad (\Rightarrow |x - y| \leq c\ |x_h - y_h|).$$

D'où, dans les deux cas,

$$\left| \frac{1}{|x-y|} - \frac{1}{|x_h - y_h|} \right| \leqslant \frac{c\ h}{|x-y|}\ .$$

Nous en déduisons une majoration :

$$\left| \int_{\Gamma_h}\int_{\Gamma_h} \frac{J_h(x_h).K_h(y_h)}{|x_h - y_h|}\ d\gamma_x\ d\gamma_y - \int_\Gamma\int_\Gamma \frac{\tilde{J_h}(x).\tilde{K_h}(y)}{|x - y|}\ d\gamma_x d\gamma_y \right| \leqslant c\ h \int_\Gamma\int_\Gamma \frac{|\tilde{J_h}(x)|\,|\tilde{K_h}(y)|}{|x - y|}\ d\gamma_x d\gamma_y$$

En utilisant, alors, NEDELEC-PLANCHARD [3], nous savons que le second membre est majoré par

$$c\ h\ |\tilde{J_h}|_{L^2(\Gamma)}\ |\tilde{K_h}|_{L^2(\Gamma)}\ .$$

Utilisant cette majoration et (2.8), nous en déduisons (2.7).

THEOREME 2.1 : Nous supposons connus $J_0 \in H^1(\Gamma)$ *et* $J_{0h} \in H_h$ *tel que*

$$|J_0 - \tilde{J_{0h}}|_{L^2(\Gamma)} \leqslant c\ h\ ; \tag{2.10}$$

alors, nous avons la majoration d'erreur

$$|J - \tilde{J_h}|_{L^2(\Gamma)} \leqslant c \left[h\ |J|_{H^1(\Gamma)} + |V_0 - \tilde{V_{0h}}|_{H^{1/2}(\partial\Gamma)} \right] \tag{2.11}$$

où $\tilde{V_{0h}}(x) = V_{0h}(x_h)$, $\Phi_i^{-1}(x) = \Phi_{ih}^{-1}(x_h)$.

Démonstration : Soit J_0 dans $H^1(\Gamma)$, choisi tel que

$$\int_{\partial\Gamma_1} J_0 \cdot n\ ds = 1\ .$$

Nous supposons connu J_{0h} dans H_h tel que

$$|J_0 - \tilde{J_{0h}}|_{L^2(\Gamma)} \leqslant c\ h\ .$$

Alors, d'après la proposition 1.2, pour $J \in H^1(\Gamma)$, il existe $\varphi \in H^2(\Gamma)$, tel que

$$J = \lambda J_0 + \vec{rot}\ \varphi \ .$$

Nous pouvons définir, sur Γ_h, l'interpolé φ_h de φ, tel que

$\varphi_h(a) = \varphi(a)$, pour tout sommet d'un triangle de Γ_h ;

φ_h affine sur chaque triangle de Γ_h .

Nous notons $\pi_h J$ l'interpolé de J défini sur Γ_h par

$$\pi_h J = \lambda J_{0h} + \vec{rot}\ \varphi_h \ .$$

Considérons, maintenant, la quantité

$$a(J_h^{\sim} - \pi_h^{\sim} J\ ,\ J_h^{\sim} - \pi_h^{\sim} J).$$

$$a(J_h^{\sim}-\pi_h^{\sim}J, J_h^{\sim}-\pi_h^{\sim}J) = -a(J, J_h^{\sim}-\pi_h^{\sim}J) + a(J-\pi_h^{\sim}J, J_h^{\sim}-\pi_h^{\sim}J) + a(J_h^{\sim}, J_h^{\sim}-\pi_h^{\sim}J) - a_h(J_h, J_h-\pi_h J) + a_h(J_h, J_h-\pi_h J)$$

D'où, d'après (1.10) et (2.7),

$$|J_h^{\sim}-\pi_h^{\sim}J|_{L^2(\Gamma)} \leq c\left[|J-\pi_h^{\sim}J|_{L^2(\Gamma)} |J_h^{\sim}-\pi_h^{\sim}J|_{L^2(\Gamma)} + h|J_h^{\sim}|_{L^2(\Gamma)} |J_h^{\sim}-\pi_h^{\sim}J|_{L^2(\Gamma)} + a_h(J_h, J_h-\pi_h J) - a(J, J_h^{\sim}-\pi_h^{\sim}J) \right]$$

Nous en déduisons

$$|J-J_h^{\sim}|_{L^2(\Gamma)} \leq c\left[|J-\pi_h^{\sim}J|_{L^2(\Gamma)} + h\,|J_h^{\sim}|_{L^2(\Gamma)} + \sup_{K_h^{\sim} \in H_h} \frac{|a_h(J_h, K_h) - a(J, K_h^{\sim})|}{|K_h^{\sim}|_{L^2(\Gamma)}} \right].$$

Evaluons , successivement, les trois termes du second membre. L'erreur d'interpolation, d'abord ;

LEMME 2.2 : Soit $J \in H^1(\Gamma)$, nous avons .

$$|J - \pi_h^{\sim} J|_{L^2(\Gamma)} \leq c\ h\ |J|_{H^1(\Gamma)} \ . \tag{2.13}$$

Démonstration : Il nous faut évaluer

$$\vec{rot}\ \varphi - \tilde{\vec{rot}}\ \varphi_h \ .$$

Mais, on vérifie, en utilisant les définitions de $\vec{rot}$ et de l'opération $\sim$, que

$$\tilde{\vec{rot}}\ \varphi_h = \vec{rot}\ \tilde{\varphi}_h \ ; \quad \tilde{\varphi}_h(x) = \varphi_h(x_h) \ ; \quad x = \Phi_i \circ \Phi_{ih}^{-1}(x_h) \ .$$

Soit, maintenant, $\hat{\varphi}|_T = \varphi \circ \Phi_i^{-1}$:

$$\hat{\varphi_h}|_T = \varphi_h \circ F_T^{-1} \ ;$$

alors, par construction de la triangulation et de φ_h, nous savons que $\hat{\varphi_h}$ est l'interpolé affine de $\hat{\varphi}$ sur T. Donc, d'après le classique lemme de Bramble-Hilbert, nous avons

$$|\hat{\varphi} - \hat{\varphi_h}|_{H^1(T)} \leq c\ h\ |\hat{\varphi}|_{H^2(T)} \ .$$

Par retour à Γ, nous en déduisons

$$|\varphi - \tilde{\varphi_h}|_{H^1(\Gamma)} \leq c\ h\ |\varphi|_{H^2(\Gamma)} \ .$$

D'où, en particulier,

$$|\vec{rot}\ \varphi - \tilde{\vec{rot}}\ \tilde{\varphi_h}|_{L^2(\Gamma)} \leq c\ h\ |\varphi|_{H^2(\Gamma)} \ .$$

D'où le lemme, en utilisant (2.11) et la proposition 1.2. ∎

Considérons, maintenant, le second terme de (2.12). Pour montrer que $|J_h^{\sim}|_{L^2(\Gamma)}$ est borné, il suffit de montrer que $|J_h|_{L^2(\Gamma_h)}$ est borné. Mais, nous avons

$$Re\ a_h(J_h, J_h) = \frac{1}{\sigma} \int_{\Gamma_h} |J_h(x)|^2\ dx = \int_{\partial\Gamma_h} V_{0h}\ n_h \cdot J_h\ ds_h \ .$$

Nous vérifions que, dans le changement de variable,

$$x = \Phi_i \circ \Phi_{ih}^{-1}(x_h) \ ;$$

$$n_h \cdot J_h \ ds_h = n \cdot \tilde{J_h} \ ds \ ;$$

et donc

$$\int_{\partial\Gamma_h} V_{0h} \ n_h \cdot J_h \ ds_h = \int_{\partial\Gamma} \tilde{V_{0h}} \ n \cdot \tilde{J_h} \ ds \ ,$$

avec

$$\tilde{V_{0h}} = V_{0h} \circ F_{ih} \circ \Phi_i^{-1}.$$

D'où (nous utilisons la continuité dans $H^{-1/2}(\partial\Gamma)$ de la trace $n \cdot \tilde{J_h}$)

$$|J_h|_{L^2(\Gamma)} \leq c \ |V_{0h}|_{H^{1/2}(\partial\Gamma)} \ .$$

Il nous reste à évaluer le dernier terme de l'erreur dans (2.12) ; soit

$$a_h(J_h, K_h) - a(J, \tilde{K_h}) = \int_{\partial\Gamma} (\tilde{V_{0h}} - V_0) \ n \cdot \tilde{K_h} \ ds \ .$$

D'où, en utilisant à nouveau la continuité de l'application trace,

$$|a_h(J_h, K_h) - a(J, \tilde{K_h})| \leq c \ |\tilde{V_{0h}} - V_0|_{H^{1/2}(\partial\Gamma)} \ |\tilde{K_h}|_{L^2(\Gamma)} \ .$$

L'inégalité (2.11) est alors une conséquence de (2.12) et des majorations ci-dessus.

Remarque 5 : Le choix de J_{0h} peut, éventuellement, se faire de la façon suivante. Soit une coupure de Γ, c'est-à-dire une courbe S qui joint $\partial\Gamma_1$ à $\partial\Gamma_2$. Soit Γ' la surface coupée ainsi construite. Alors, il existe $\varphi_0 \in H^2(\Gamma')$ telle que

$$J_0 = \text{rot } \varphi_0 \ , \ \varphi_0^+ - \varphi_0^- = \text{constante le long de } S \ ,$$

où φ_0^+ (resp. φ_0^-) désigne la valeur de φ_0 d'un côté de S.

A cette coupure de Γ correspond une coupure de Γ_h, si les sommets de la triangulation sont bien choisis.

L'interpolé affine φ_{0h} de φ_0 sur Γ'_h vérifie

$$\varphi_{0h}^+ - \varphi_{0h}^- = \text{constante.}$$

Et alors

$$J_{0h} = \text{rot } \varphi_{0h}$$

vérifie l'inégalité (2.10) et appartient à l'espace H_h. ∎

Nous allons indiquer, maintenant, une méthode pour calculer une valeur approchée du potentiel scalaire V sur la surface Γ. Remarquons d'abord que que nous avons

$$\int_\Gamma \text{grad } V \cdot \text{grad } V' \ d\gamma = -\frac{i\omega\mu}{c^2} \int_\Gamma \int_\Gamma \frac{J(y) \cdot \text{grad } V'(x)}{|x-y|} \ d\gamma_x d\gamma_y \ , \ \forall \ V' \in H_0^1(\Gamma) \quad (2.14)$$

(et aussi $V|_{\partial\Gamma} = V_0$)

Nous considérons l'espace de fonctions approchées suivant

$$\Phi_h^0 = \left\{ V_h \in C^0(\Gamma_h) \ ; \ V_h|_T \in P_1 \ ; \ \forall \ T \subset \Gamma_h \ , \ V_h|_{\partial\Gamma_h} = 0 \right\} .$$

Nous définissons V_h comme solution de

$$\int_{\Gamma_h} \text{grad } V_h \cdot \text{grad } V'_h \ d\gamma = -\frac{i\omega\mu}{c^2} \int_{\Gamma_h} \int_{\Gamma_h} \frac{J_h(y) \cdot \text{grad } V'_h(x)}{|x-y|} \ d\gamma_x d\gamma_y \ , \quad (2.15)$$

$$\forall \ V'_h \in H_0^1(\Gamma) \ , \ V_h \in \Phi_h \ , \ V_h|_{\partial\Gamma_h} = V_{0h}$$

Il est facile de voir que V_h est ainsi défini de façon unique.

Le théorème suivant donne l'erreur entre V et $\tilde{V_h}$ défini par

$$\tilde{V_h}(x) = V_h \circ \Phi_{ih}^{-1} \circ \Phi_i(x) \quad , \quad \forall \ x \in \Phi_i(D_i) \ .$$

THEOREME 2.2 : Sous les hypothèses du thèorème 2.1, et si nous supposons de plus que V_{0h} *est l'interpolé affine sur* $\partial\Gamma_h$ *de* V_0 *, nous avons l'estimation suivante :*

$$|V - \tilde{V}_h|_{H^1(\Gamma)} \leq C\ h \tag{2.16}$$

où V *est la solution de (2.14) et* V_h *la solution de (2.15).*

Démonstration : Soit la forme bilinéaire

$$a(V, V') = \int_\Gamma \text{grad } V \cdot \text{grad } V'\ d\gamma$$

et

$$a_h(V_h, V'_h) = \int_{\Gamma_h} \text{grad } V_h \cdot \text{grad } V'_h\ d\gamma_h .$$

Nous avons donc, de façon analogue à (2.7),

$$|a(V_h, \tilde{V'_h}) - a_h(V_h, V'_h)| \leq C\ h\ |\text{grad } \tilde{V}_h|_{L^2(\Gamma)}\ |\text{grad } \tilde{V'}_h|_{L^2(\Gamma)} \tag{2.17}$$

Soit πV l'interpolé affine de V défini sur Γ_h . Nous remarquons que V_{0h} étant l'interpolé affine de V_0 sur $\partial\Gamma$,

$$\pi V|_{\partial\Gamma_h} = V_{0h} ,$$

et donc

$$\pi V - V_h \in H^1_0(\Gamma_h).$$

Majorons, maintenant, successivement les termes :

$$|V - \tilde{V}_h|_{H^1(\Gamma)} \leq |V - \tilde{\pi V}|_{H^1(\Gamma)} + |\tilde{\pi V} - \tilde{V}_h|_{H^1_0(\Gamma)}$$

et

$$|\tilde{\pi V} - \tilde{V}_h|^2_{H^1_0(\Gamma)} \leq C\ |\text{grad } (\tilde{\pi V} - \tilde{V}_h)|^2_{L^2(\Gamma)} \leq C\ |a(\tilde{\pi V} - \tilde{V}_h, \tilde{\pi V} - \tilde{V}_h)|$$

$$a(\tilde{\pi V} - \tilde{V}_h, \tilde{\pi V} - \tilde{V}_h) = a(\tilde{\pi V} - V, \tilde{\pi V} - \tilde{V}_h) + a(V, \tilde{\pi V} - \tilde{V}_h) - a(\tilde{V}_h, \tilde{\pi V} - \tilde{V}_h) ,$$

d'où en regroupant les majorations et en utilisant (2.17)

$$|V - \tilde{V}_h|_{H^1(\Gamma)} \leq \left[C\ |V - \tilde{\pi V}|_{H^1(\Gamma)} + C\ h\ |\text{grad } \tilde{V}_h|_{L^2(\Gamma)} + \sup_{V'_h} \Phi_h \frac{a(V, \tilde{V'_h}) - a_h(V_h, V'_h)}{|\text{grad } \tilde{V'_h}|_{L^2(\Gamma)}} \right]$$

$$a(V, \tilde{V'_h}) - a_h(V_h, V'_h) = -\frac{i\omega\mu}{c^2} \left[\int_\Gamma \int_\Gamma \frac{J(y) \cdot \text{grad } \tilde{V'_h}(x)}{|x - y|}\ d\gamma_x d\gamma_y - \int_{\Gamma_h} \int_{\Gamma_h} \frac{J_h(y) \cdot \text{grad } V'_h(x)}{|x_h - y_h|}\ d\gamma_x d\gamma_y \right.$$

Si nous transformons alors les intégrales sur Γ_h en intégrales sur Γ , il apparaît trois termes d'erreur, l'un que l'on majorera par

$$C\ |J - \tilde{J}_h|_{L^2(\Gamma)}\ |\text{grad } \tilde{V'}_h|_{L^2(\Gamma)} ,$$

les deux autres, provenant de la géométrie, que l'on majorera par

$$C\ h\ |\tilde{J}_h|_{L^2(\Gamma)} .$$

En utilisant, alors, le théorème 2.1, nous obtenons (2.16).

CONCLUSIONS

Nous allons donner quelques indications sur la mise en oeuvre de la méthode pour laquelle nous renvoyons à NEDELEC-VERITE [1].

La formulation qui apparait la plus commode est la formulation (2.4), car les fonctions de base en φ_h sont connues et à support "local". Dans la pratique, le choix de la fonction de base J_{0h} est facile. Il faut aussi faire attention au fait qu'il faut supprimer l'une des fonctions de base qui engendrent l'espace Φ_h, car φ_h est défini à une constante près. (Ceci revient à fixer la valeur de φ_h en un noeud).

Le calcul des coefficients du système provenant de la partie

$$\int_{\Gamma_h} \frac{1}{\sigma} \; J_h \cdot J'_h \; d\gamma$$

est analogue à un assemblage pour un opérateur elliptique et nous donne la partie réèlle de la matrice. Le calcul des coefficients de la partie imaginaire de la matrice

$$\frac{i\omega\mu}{c^2} \int_{\Gamma_h} \int_{\Gamma_h} \frac{J_h(x).J'_h(y)}{|x-y|} \; d\gamma_x \; d\gamma_y$$

se fait en utilisant la primitive explicite de

$$\int_{\Gamma} \frac{d\gamma_x}{|x-y|}$$

puis ensuite par une formule d'intégration numérique. Nous renvoyons à NEDELEC [4], et à DJAOUA [5], pour des précisions sur ces calculs de coefficients.

L'introduction des éléments finis à divergence nulle utilisés ici, est due à RAVIART-THOMAS [6]. Il est possible d'utiliser des éléments finis du même type et d'ordre plus élevé. L'étude d'erreur est analogue. Mais alors, il faut aussi augmenter le degré d'approximation de la surface Γ et les calculs des coefficients provenant de la partie intégrale singulière de l'opérateur sont très compliqués. D'autre part, la solution étant peu régulière, au moins au voisinage du bord $\partial\Gamma$, le gain de précision réél serait faible.

Par ailleurs, nous renvoyons au petit ouvrage de R.L. STOLL [7] pour une étude assez complète des équations et des propriétés des courants de Foucault.

BIBLIOGRAPHIE

[1] J.C. NEDELEC, J.C. VERITE, à paraître.

[2] Mme LELONG-FERRAND, Géométrie Différentielle, Masson, Paris, 1963.

[3] J.C. NEDELEC, J. PLANCHARD, Une méthode variationnelle d'éléments finis pour la résolution numérique d'un problème extérieur dans R^3, R.A.I.R.O., 7 (1973), R3, 105-129.

[4] J.C. NEDELEC, Curved finite elements method for the solution of singular integral equations on surfaces in R^3, à paraître.

[5] M. DJAOUA, Rapport Interne du Centre de Mathématiques Appliquées N° 3 (1975) Ecole Polytechnique, 91120 PALAISEAU.

[6] P.A. RAVIART, J.M. THOMAS, A mixed finite element method for 2nd order elliptic problems.

[7] R.L. STOLL, The analysis of Eddy currents, Clarendon Press, Oxford, 1974.