PUBLICATIONS MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUES DE RENNES

P. LESAINT

P. A. RAVIART

Résolution numérique de l'équation de continuité par une méthode du type éléments finis

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1976, fascicule S5
« Journées « éléments finis » », , p. 1-10

<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1976___S5_A10_0>

© Département de mathématiques et informatique, université de Rennes, 1976, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications mathématiques et informatiques de Rennes » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

RESOLUTION NUMERIQUE DE L'EQUATION DE CONTINUITE PAR UNE METHODE DU TYPE ELEMENTS FINIS

P. LESAINT et P.A. RAVIART

1 - POSITION DU PROBLEME ET DESCRIPTION DES SCHEMAS NUMERIQUES

On considère le problème suivant :

$$(1.1) \qquad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) = 0 \quad ,$$

$$(1.2) \qquad \rho(x,o) = \rho_o(x) \quad .$$

Dans le cas du problème de Cauchy pur, on suppose que $\rho_o(x)$ est à support compact (donc aussi $\rho(x,t)$). Lorsque le domaine spatial est l'intervalle $]0,1[$, on impose des conditions aux limites en $x = 0$ pour $u(0,t) > 0$ et en $x = 1$ pour $u(1,t) < 0$.

Description des méthodes

On considère d'abord, pour simplifier, le cas où la vitesse u est constante, soit

$$(1.3) \qquad \frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0$$

On découpe la droite en intervalles $[y_i, y_{i+1}]$ non nécessairement égaux. Soit V_h^1 (resp. V_h^2) l'espace des fonctions v_h dont la restriction à chaque intervalle $[y_i, y_{i+1}]$ est un polynôme de P_k, et continues (resp. non nécessairement continues) aux points y_i.

Problème de Cauchy

Soit $\rho_h^n \in V_h$ (V_h^1 ou V_h^2) l'approximation de la solution à l'instant $n\,\Delta t$. Pour définir la solution à l'instant $(n+1)\,\Delta t$, on procède en deux étapes :

1) On définit une fonction $\rho^*(x)$, transportée de ρ_h^n de façon Lagrangienne, c'est-à-dire

$$(1.4) \qquad \rho^*(x) = \rho_h^n(x - u\Delta t) \quad .$$

2) On définit ρ_h^{n+1} par projection (interpolation) de $\rho^*(x)$ sur V_h par

$$(1.5) \qquad \int \rho_h^{n+1} v \, dx = \int \rho^* v \, dx = \int \rho^n(x - u\Delta t) v \, dx \quad , \qquad \text{pour tout } v \in V_h .$$

Cas des conditions aux limites

On suppose $u > 0$. La condition aux limites pour $x = 0$ s'écrit :

$$(1.6) \qquad \rho(0,t) = g(t).$$

Pour définir la solution à l'instant $(n+1)\Delta t$, on procède en deux étapes :

1) On définit $\rho^*(x)$ (transportée de ρ_h^n) par

$$(1.7) \qquad \rho^*(x) = \begin{cases} \rho_h^n(x - u\Delta t) & \text{pour } u\Delta t \leq x \leq 1 \\ \rho\left(0, (n+1)\Delta t - \frac{x}{u}\right) & \text{pour } 0 \leq x \leq u\Delta t \end{cases}$$

2) On définit $\rho_h^{n+1} \in V_h$ par

$$(1.8) \qquad \int_0^1 \rho_h^{n+1} v \, dx = \int_0^1 \rho^* v \, dx = \int_0^{u\Delta t} \rho\left(0, (n+1)\,\Delta t - \frac{x}{u}\right) v \, dx + \int_{u\Delta t}^1 \rho_h^n (x - u\Delta t) v \, dx,$$

pour tout $v \in V_h$.

Remarque 1.1 : Dans le schéma précédent, la condition aux limites est traitée de façon discontinue, même si $V_h = V_h^1$. On peut traiter cette condition de façon continue : on définit $\rho_h^{n+1} \in V_h^1$ par

$$(1.9) \qquad \rho_h^{n+1}(0) = \rho\left(0,(n+1)\,\Delta t\right) \quad ,$$

$$(1.10) \qquad \int_0^1 \rho_h^{n+1} v\, dx = \int_0^1 \rho^* v\, dx \qquad \text{pour tout } v \in V_{h,1}^0 = \{v_h \in V_h^1 \ ; \ v_h|_{[0,h]} \in P_{k-1}\}$$

Remarque 1.2 : Pour calculer ρ_h^{n+1} par le schéma (1.7), (1.8), il faut inverser une matrice de masse (2k+1) diagonale lorsque $V_h = V_h^1$, et (k+1) diagonale lorsque $V_h = V_h^2$. On a donc une méthode implicite. La méthode peut être rendue explicite si on calcule l'intégrale du 1er membre de (1.8) en utilisant une formule de quadrature comportant k+1 points distincts par intervalle, ces points étant ceux auxquels sont attachés les degrés de liberté de V_h.

Dans le cas où $V_h = V_h^1$, la formule de quadrature sur un intervalle donné comporte donc nécessairement les points extrémités de cet intervalle.

Soit la formule de quadrature sur $[y_i, y_{i+1}]$.

$$(1.11) \qquad \int_{y_i}^{y_{i+1}} f(t)\, dy \sim \sum_{\ell=1}^{k+1} \omega_\ell^i f(b_\ell^i)$$

Cette formule de quadrature permet de définir le produit scalaire discret

$$(1.12) \qquad \langle f,g\rangle = \sum_i \sum_{\ell=1}^{k+1} \omega_\ell^i\, (fg)\, (b_\ell^i).$$

Dans le cas du problème avec conditions aux limites, on suppose que l'intervalle $[0,1]$ est divisé en I intervalles. Le produit scalaire discret s'écrit alors :

$$(1.13) \qquad \langle f,g\rangle = \sum_{i=0}^{I-1} \sum_{\ell=1}^{k+1} \omega_\ell^i\, (fg)\, (b_\ell^i).$$

On note $|.|$ la norme correspondant au produit scalaire $\langle .,. \rangle$. On définit l'opérateur A de V_h dans V_h par

$$(1.14) \qquad \langle Af,g\rangle = \langle f,g\rangle - \int fg\, dx.$$

Lorsqu'on calcule le membre de gauche de (1.5) en utilisant la formule (1.11), on peut écrire

$$(1.15) \qquad \langle \rho_h^{n+1}, v\rangle = \int \rho^* v\, dx, \text{ pour tout } v \in V_h$$

Remarque 1.3 : Soit $V_h = V_h^1$, k=1, $y_{i+1} - y_i = y_i - y_{i-1}$, pour tout i. On utilise sur chaque intervalle la formule des trapèzes. Le problème (1.15) s'écrit alors :

$$(1.16) \qquad \rho_i^{n+1} = \frac{1}{\Delta x} \int \rho^* v_i(x) dx. \quad , \ \forall i \ , \quad \text{où les } v_i(x) \text{ désignent les fonctions chapeaux.}$$

Le problème (1.5) s'écrit :

$$(1.17) \qquad \rho_i^{n+1} + \frac{1}{6}\left(\rho_{i+1}^{n+1} - 2\,\rho_i^{n+1} + \rho_{i-1}^{n+1}\right) = \frac{1}{\Delta x} \int \rho^* v_i(x)\, dx \quad , \text{ pour tout i.}$$

L'utilisation de formules de quadrature induit le terme de dissipation (diffusion) suivant :

$$(1.18) \qquad -\frac{1}{6}\left(\rho_{i+1}^{n+1} - 2\,\rho_i^{n+1} + \rho_{i-1}^{n+1}\right) = \frac{1}{h} \langle A\, \rho^{n+1}, v_i\rangle \quad , \text{ pour tout i analogue}$$

discret de $-\frac{\Delta x^2}{6}\frac{\partial^2\rho}{\partial x^2}$, l'opérateur A étant ici défini positif. Ce terme de dissipation se manifeste encore de la façon suivante :

On suppose que la vitesse u est nulle. On a donc :

(1.19) $\rho(x,(n+1)\Delta t) = \rho(x,n\Delta t)$.

Lorsqu'on effectue les calculs de façon exacte (problème (1.5)), on a :

$$\rho_h^{n+1}(x) = \rho_h^n(x).$$

Lorsqu'on effectue les calculs de façon approchée (problème (1.15)), on a

$\rho_i^{n+1} = \rho_i^n + \frac{1}{6}\left(\rho_{i+1}^n - 2\rho_i^n + \rho_{i-1}^n\right)$, pour tout i, ce qui correspond à une diffusion en :

$$-\frac{\Delta x^2}{6}\frac{\partial^2\rho}{\partial x^2}$$

Pour supprimer ce terme de dissipation parasite, on est amené à introduire un terme d'antidiffusion [2] , caractérisé par la différence entre $\int\rho^{n+1}v\,dx$ et $\langle\rho^{n+1}, v\rangle$.

Soit donc <u>le schéma</u> :

1) On définit $\rho^*(x)$ (transportée de ρ_h^n) comme en (1.4) (ou en (1.7)) dans le cas des conditions aux limites)

2) On définit $\rho^{n+1/2} \in V_h$ par (interpolation)

(1.20) $\langle\rho^{n+1/2}, v\rangle = \int\rho^*(x)v\,dx$,

3) On définit $\rho_h^{n+1} \in V_h$ par (antidiffusion)

(1.21) $\langle\rho_h^{n+1}, v\rangle = \langle\rho^{n+1/2}, v\rangle - \left(\int\rho^{n+1/2}v\,dx - \langle\rho^{n+1/2}, v\rangle\right)$.

<u>Remarque 1.4</u> : Lorsque l'on a $u = 0$, $y_{i+2} - y_i = Ax$ $\forall i$, et $k = 1$, il vient :

$$\rho_i^{n+1/2} = \rho_i^n + \frac{1}{6}\left(\rho_{i+1}^n - 2\rho_i^n + \rho_{i-1}^n\right)$$

$$\rho_i^{n+1} = \rho_i^{n+1/2} - \frac{1}{6}\left(\rho_{i+1}^{n+1/2} - 2\rho_i^{n+1/2} + \rho_{i-1}^{n+1/2}\right) ,$$

ou encore, en éliminant $\rho^{n+1/2}$:

(1.22) $\rho_i^{n+1} = \rho_i^n - \frac{1}{36}\left(\rho_{i+2}^n - 4\rho_{i+1}^n + 6\rho_i^n - 4\rho_{i-1}^n + \rho_{i-2}^n\right)$,

ce qui correspond à une diffusion en $\frac{\Delta x^4}{36}\frac{\partial^4\rho}{\partial x^4}$

Si on veut pouvoir obtenir rigoureusement

(1.23) $\rho_i^{n+1} = \rho_i^n$, si $u = 0$,

il faut compliquer légèrement le schéma. On obtient alors <u>le schéma (Phénix [2])</u> :

1) On définit $\rho^*(x)$ comme en (1.4)

2) On définit $\rho^{n+1/2}$, $\tilde{\rho}^{n+1/2}$ et $\rho_h^{n+1} \in V_h$ par

(1.24) $\langle\rho^{n+1/2}, v\rangle = \int\rho^*(x)v\,dx$

(1.25) $\langle\tilde{\rho}^{n+1/2}, v\rangle = \langle\rho^{n+1/2}, v\rangle - \left(\int\rho^n v\,dx - \langle\rho^n, v\rangle\right)$,

(1.26) $\langle\rho_h^{n+1}, v\rangle = \langle\rho^{n+1/2}, v\rangle - \left(\int\tilde{\rho}^{n+1/2}v\,dx - \langle\tilde{\rho}^{n+1/2}, v\rangle\right)$.

Pour $u = 0$, on vérifie que l'on a $\rho_h^{n+1} = \rho_h^n$.

Définition 1.1 : Soit Π l'opérateur de projection sur V_h pour la produit scalaire L^2 : $\Pi v \in V_h$

$$(1.27) \qquad \int (\Pi v) w \, dx = \int v \, w \, dx \qquad \text{pour tout } w \in V_h .$$

Les schémas (1.8), {(1.18), (1.19)} et {(1.22), à (1.24)} s'écrivent, respectivement, avec ρ^* définie comme en (1.4) ou (1.7)

$$(1.28) \qquad \rho^{n+1} = \Pi\rho^* \quad ,$$

$$(1.29) \qquad \rho^{n+1} = (I-A^2)\,\Pi\rho^* ,$$

$$(1.30) \qquad \rho^{n+1} = (I-A^2)\Pi\rho^* + A^2\,\rho^n \ .$$

Remarque 1.5 : Dans le cas du problème avec conditions aux limites, on peut toujours utiliser les schémas (1.20), (1.21) et (1.24), (1.25), (1.26). Il suffit de remplacer $\int dx$ par $\int_0^1 dx$. On peut aussi traiter de façon exacte la condition à la limite (1.6) lorsqu'on cherche la solution approchée ρ_h dans l'espace V_h^1 ; on fait alors décrire à la fonction test v l'espace $V_{h,1}^o$ défini à la Remarque 1.1.

Remarque 1.6 : Le schéma (1.8) est conservatif, et on a :

$$(1.31) \qquad \int_0^1 \rho_h^{n+1} dx = \int_0^{1-u\Delta t} \rho_h^n \, dx + u \int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t} g(t)dt \ .$$

Si on suppose que la formule de quadrature (1.11) est exacte pour les polynômes de degré $\leq k$, alors les schémas {(1.20), (1.21)} et {(1.24) à (1.26)} sont conservatifs ; en effet, dans ces schémas, on peut remplacer v par la constante 1, et on peut écrire :

$$(1.32) \qquad \int_{y_i}^{y_{i+1}} \rho_h \, dx = \sum_{\ell=1}^{k+1} \omega_\ell^i \, \rho_h(b_\ell^i) \quad , \text{ pour tout } \rho_h \in V_h$$

On obtient alors aisément la relation (1.31).

2 - RESULTATS DE STABILITE

Lemme 2.1. Dans le cas du problème de Cauchy, le schéma (1.5) est stable pour la norme L^2 et on a :

$$(2.1) \qquad ||\rho_h^n||_{L^2} \leq ||\rho_h^o||_{L^2}$$

Démonstration

On a $\int \rho_h^{n+1} v \, dx = \int \rho^* v \, dx$ pour tout $v \in V_h$. On en déduit en remplaçant v par ρ_h^{n+1}

$$\int (\rho_h^{n+1})^2 \, dx \leq \left(\int (\rho^*)^2 dx\right)^{1/2} \left(\int (\rho_h^{n+1})^2 \, dx\right)^{1/2} ,$$

$$\int (\rho_h^{n+1})^2 \, dx \leq \int (\rho^*)^2 dx = \int (\rho_h^n)^2 dx \ .$$

L'inégalité (2.1) en découle immédiatement.

Lemme 2.2. Dans le cas du problème avec conditions aux limites, le schéma (1.8) est stable pour la norme L^2 et on a :

$$(2.2) \qquad ||\rho_h^n||_{L^2(0,1)} \leq ||\rho_h^o||^2_{L^2(0,1)} + \int_0^{n\Delta t} u\big(\rho(0,s)\big)^2 \, ds.$$

Démonstration

On a (2.3) $\int_0^1 \rho_h^{n+1} v \, dx = \int_0^1 \rho^* \, v \, dx$, pour tout $v \in V_h$ avec :

$$(2.4) \qquad \rho^*(x) = \begin{cases} \rho\left(0, (n+1)\Delta t - \dfrac{x}{u}\right) & \text{si } 0 < x < u\Delta t \\ \rho^n(x - u\Delta t) & \text{si } u\Delta t < x < 1 \end{cases}$$

Comme dans le lemme 2.1, on peut écrire :

$$(2.5) \qquad \|\rho_h^{n+1}\|^2_{L^2(0,1)} \leq \int_0^1 \left(\rho^*(x)\right)^2 dx.$$

On a : $\int_0^1 \left(\rho^*(x)\right)^2 dx = \int_0^{u\Delta t} \left(\rho\left(0,(n+1)\Delta t - \frac{x}{u}\right)\right)^2 + \int_{u\Delta t}^1 (\rho_h^n)^2\, dx$, d'où en faisant le changement de variable $s = (n+1)\Delta t - \frac{x}{u}$:

$$(2.6) \qquad \int_0^1 \left(\rho^*(x)\right)^2 dx \leq u \int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t} \left(\rho(0,s)\right)^2 ds + \int_0^1 (\rho_h^n)^2\, dx$$

En combinant les inégalités (2.5) et (2.6) et en sommant sur les indices n, on obtient l'inégalité (2.2).

Remarque 2.1 : On se place dans le cadre de la Remarque 1.1. On suppose que l'espace V_h^1 est construit avec des polynômes de degré ≤ 1. Le schéma (1.9), (1.10) donne

$$\frac{h}{2}\rho_0^{n+1} + \frac{5}{6}h\,\rho_1^{n+1} + \frac{h}{6}\rho_2^{n+1} = \int_0^{2h} \rho^*(x)\, v_1(x)\, dx \quad ,$$

$$\frac{h}{6}\rho_{i-1}^{n+1} + \frac{4}{6}h\,\rho_i^{n+1} + \frac{h}{6}\rho_{i+1}^{n+1} = \int_{(i-1)h}^{(i+1)h} \rho^*(x)\, v_i(x)\, dx, \quad 2 \leq i \leq I-1 \quad ,$$

$$\rho_0^{n+1} = \left(0,(n+1)\Delta t\right) \quad ,$$

où $v_i \in V_h$, et $v_i(x_j) = \delta_{ij}$, pour $0 \leq j$, $2 \leq i$,

$v_1(x_j) = 0$ pour $j \geq 2$, $v_1(x_1) = v_1(x_0) = 1$.

On a alors le résultat suivant, lorsque les intervalles sont égaux.

Lemme 2.3. Lorsque k = 1, le schéma (1.9), (1.10) est stable pour la norme $L^2(0,1)$ et on a :

$$(2.7) \qquad \int_{h-u\Delta t}^1 (\rho_h^n)^2 dx + \frac{h}{4}(1-\lambda)^2(\rho_1^n)^2 \leq C\left(\int_{h-u\Delta t}^1 (\rho_h^0)^2 dx + \frac{h}{4}(1-\lambda)^2(\rho_1^0)^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{3u}{2}\int_0^{n\Delta t} \left(g(t)\right)^2 dt + u\,\frac{\lambda^2}{6}\sum_{r=0}^{n} \Delta t \left(g(r\Delta t)\right)^2 + \frac{h(1+\lambda)^2}{4}\sum_{r=1}^{n} t\left(\frac{g(r\Delta t)-g((r-1)\Delta t)}{\Delta t}\right)^2\right)$$

lorsque $\lambda = u\frac{\Delta t}{h} \leq 1$.

$$(2.8) \qquad \int_0^1 (\rho_h^n)^2 dx \leq \int_0^1 (\rho_h^0)^2\, dx + \frac{2u}{3}\Delta t \sum_{r=1}^{n} \left(g(r\Delta t)\right)^2 + 3u \int_0^{n\Delta t} \left(g(t)\right)^2 dt$$

lorsque $\lambda = u\frac{\Delta t}{h} > 1$.

Démonstration

On a $(2.9) \qquad \int_0^1 \rho_h^{n+1} v\, dx = \int_0^1 \rho^* v\, dx$ pour tout $v \in V_{h,0}^1$, $\rho_h^{n+1}(0) = \rho\left(0,(n+1)\Delta t\right)$.

Soit v la fonction de $V_{h,0}^1$ définie par

$$(2.10) \qquad v = \begin{cases} \rho_h^{n+1}(x) & \text{pour } h \leq x \leq 1 \\ \rho_1^{n+1} & \text{pour } 0 \leq x \leq h \quad . \end{cases}$$

On a :

$$\int_0^1 \rho_h^{n+1}\, v\, dx = \int_0^h \rho_h^{n+1}\, \rho_1^{n+1}\, dx + \int_h^1 (\rho_h^{n+1})^2\, dx$$

$$\int_0^1 \rho_h^{n+1}\, v\, dx = \frac{h}{2}\left((\rho_1^{n+1})^2 + \rho_0^{n+1}\,\rho_1^{n+1}\right) + \int_h^1 (\rho_h^{n+1})^2\, dx \tag{2.11}$$

On considère le cas où $u\Delta t \leq h$ et on a

$$\int_0^1 \rho^*\, v\, dx = \int_h^1 \rho_h^n(x-u\Delta t)\ \rho_h^{n+1}(x)\,dx + \int_{u\Delta t}^h \rho^n(x-u\,t)\,\rho_1^{n+1}\, dx +$$

$$+ \int_0^{u\Delta t} \rho_1^{n+1}\ \rho\left(0, (n+1)\Delta t - \frac{x}{u}\right) dx.$$

$$\int_0^1 \rho^*\, v\, dx \leq \frac{1}{2}\int_h^1 \left(\rho_h^{n+1}(x)\right)^2 dx + \frac{1}{2}\int_{h-u\Delta t}^{1-u\Delta t} \left(\rho_h^n(x)\right)^2 dx + \rho_1^{n+1}\int_0^{h-u\Delta t} \rho_h^n(x)\,dx + \tag{2.12}$$

$$+ u\,\rho_1^{n+1}\int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t} g(t)\,dt\ .$$

Un calcul simple montre que :

$$\int_0^{h-u\Delta t} \rho_h^n(x)\,dx = \frac{h}{2}\left((1-\lambda^2)\rho_o^n + (1-\lambda)^2\,\rho_1^n\right) \tag{2.13}$$

$$\int_{h-u\Delta t}^h \left(\rho_h^{n+1}(x)\right)^2 dx = h\,\frac{\lambda}{6}\left(\left(3-3\lambda+\lambda^2\right)(\rho_1^{n+1})^2 + \lambda(3-2\lambda)\rho_0^{n+1}\rho_1^{n+1} + \lambda^2(\rho_0^{n+1})^2\right) \tag{2.14}$$

En combinant les relations (2.9), (2.11), (2.12), (2.13) et (2.15), il vient :

$$\frac{1}{2}\int_{h-u\Delta t}^1 (\rho_h^{n+1})^2 dx + \frac{h}{2}\left(1-\lambda+\frac{\lambda^2}{2}-\frac{\lambda^3}{3}\right)(\rho_1^{n+1})^2 + \frac{h}{6}(3-3\lambda^2+2\lambda^3)\rho_0^{n+1}\rho_1^{n+1} \leq$$

$$\leq \frac{1}{2}\int_{h-u\Delta t}^{1-u\Delta t} (\rho_h^n)^2 dx + \frac{h}{2}(1-\lambda)^2\rho_1^n\,\rho_1^{n+1} + \frac{h}{2}(1-\lambda^2)\rho_o^n\,\rho_1^{n+1} + h\,\frac{\lambda^3}{6}(\rho_0^{n+1})^2 + u\rho_1^{n+1}\int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t} g(t)\,dt\ ,$$

ou encore :

$$\frac{1}{2}\int_{h-u\Delta t}^1 (\rho_h^{n+1})^2 dx + \frac{h}{4}(1-\lambda)^2(\rho_1^{n+1})^2 + \frac{h\lambda}{6}(3-\lambda^2)(\rho_1^{n+1})^2 \leq \frac{1}{2}\int_{h-u\Delta t}^{1-u\Delta t} (\rho_h^n)^2 dx + \frac{h}{4}(1-\lambda)^2(\rho_1^n)^2 +$$

$$+ \frac{h}{2}(1-\lambda^2)\rho_1^{n+1}(\rho_O^n - \rho_O^{n+1}) + h\,\frac{\lambda^3}{3}\rho_O^{n+1}\,\rho_1^{n+1} + \frac{\lambda}{6}(\rho_1^{n+1})^2 + \frac{3u}{2}\int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t}\left(g(t)\right)^2 dt\ .$$

Le terme $\frac{h}{2}(1-\lambda^2)\rho_1^{n+1}(\rho_O^n - \rho_O^{n+1})$ est majoré par $C\,\frac{h}{4}\Delta t(1-\lambda)^2(\rho_1^{n+1})^2 + \frac{h\Delta t}{4C}(1+\lambda)^2\left(\frac{\rho_O^{n+1}-\rho_O^n}{\Delta t}\right)^2$,

où C est une constante > 0. D'autre part, on a $\frac{h}{3}\lambda^3\,\rho_O^{n+1}\,\rho_1^{n+1} \leq \frac{h}{6}\lambda^3(\rho_1^{n+1})^2 + \frac{h}{6}\lambda^3(\rho_1^{n+1})^2$

En combinant les trois dernières inégalités, on obtient :

$$\frac{1}{2}\int_{h-u\Delta t}^1 (\rho_h^{n+1})^2 dx + \frac{h}{4}(1-\lambda)^2(1-c\Delta t)(\rho_1^{n+1})^2 + \frac{h\lambda}{3}(1-\lambda^2)(\rho_1^{n+1})^2 \leq \tag{2.15}$$

$$\leq \frac{1}{2}\int_{h-u\Delta t}^{1-u\Delta t} (\rho_h^n)^2 + \frac{h}{4}(1-\lambda)^2(\rho_1^n)^2 + \frac{h\lambda^3}{6}(\rho_O^{n+1})^2 + \frac{3u}{2}\int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t}\left(g(t)\right)^2 dt +$$

$$+ \frac{h\Delta t}{4C}(1+\lambda)^2\left(\frac{\rho_O^{n+1}-\rho_O^n}{\Delta t}\right)$$

En sommant sur les indices n, on obtient l'inégalité (2.7). On considère maintenant le cas où $u\Delta t \geq h$. On a :

$$\int_0^1 \rho^*\, v\, dx = \int_{u\ t}^1 \rho_h^n(x-u\Delta t)\rho_h^{n+1}(x)\,dx + \int_h^{u\Delta t} \rho_h^{n+1}(x)\,\rho\left(0,(n+1)\Delta t - \frac{x}{u}\right) dx + \int_0^h \rho_1^{n+1}\,\rho\left(0,(n+1)\Delta t - \frac{x}{u}\right) dx.$$

$$(2.16)\quad \int_0^1 \rho^* v\,dx \leq \frac{1}{2}\int_{u\Delta t}^1 (\rho_h^{n+1})^2 dx + \frac{1}{2}\int_0^{1-u\Delta t} (\rho_h^n)^2 dx + \frac{1}{2}\int_h^{u\Delta t} (\rho_h^{n+1})^2 +$$

$$+ \frac{h}{6}(\rho_1^{n+1})^2 + \frac{3u}{2}\int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t} \big(g(t)\big)^2\,dt\ .$$

D'autre part, on a :

$$(2.17)\quad \int_0^h (\rho_h^{n+1})^2 dx = \frac{h}{3}\left((\rho_0^{n+1})^2 + \rho_0^{n+1}\,\rho_1^{n+1} + (\rho_1^{n+1})^2\right).$$

Des relations (2.9), (2.11), (2.16) et (2.17), on déduit :

$$(2.18)\quad \frac{1}{2}\int_0^1 (\rho_h^{n+1})^2\,dx + \frac{h}{6}\left(\rho_1^{n+1} + \rho_0^{n+1}\right)^2 \leq \frac{1}{2}\int_0^{1-u\Delta t} (\rho_h^n)^2 dx + \frac{h}{3}(\rho_0^{n+1})^2$$

$$+ \frac{3u}{2}\int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t} \big(g(t)\big)^2 dt$$

En sommant sur les indices n, on obtient l'inégalité (2.8).

On suppose que l'opérateur A défini en (1.14) satisfait l'hypothèse suivante :

$$(2.19)\quad (Av, v) \geq 0 \qquad \text{pour tout} \quad v \in V_h.$$

Lemme 2.4. On suppose que l'hypothèse (2.9) est satisfaite. Le schéma (1.20) (1.21) dans le cas du problème de Cauchy est stable pour la norme $L^2(0,1)$ et on a

$$(2.20)\quad ||\rho_h^n||^2_{L^2} \leq ||\rho_h^0||^2_{L^2}$$

Démonstration

On a $< \rho^{n+1/2}, v > = \int \rho(x-u\Delta t)v\,dx$ pour tout $v \in V_h$

En remplaçant v par $\rho^{n+1/2}$, on a : $|\rho^{n+1/2}|^2 \leq ||\rho^n||_{L^2}\,||\rho^{n+1/2}||_{L^2} \leq \frac{1}{2}||\rho^n||^2_{L^2} + \frac{1}{2}||\rho^{n+1/2}||^2_{L^2}$

Or, pour tout $v \in V_h$, on a

$$(2.21)\quad ||v||^2_{L^2} = |v|^2 - <Av, v>$$

On en déduit l'inégalité

$$(2.22)\quad |\rho^{n+1/2}|^2 + <A\,\rho^{n+1/2}, \rho^{n+1/2}> \leq ||\rho^n||^2_{L^2}$$

D'autre part, on a $\rho^{n+1} = (I+A)\rho^{n+1/2}$, donc :

$$||\rho^{n+1}||^2_{L^2} = |(I+A)\rho^{n+1/2}|^2 - <(A+A^2)\rho^{n+1/2}, (I+A)\rho^{n+1/2}>$$

En développant le second membre, on obtient :

$$(2.23)\quad ||\rho^{n+1}||^2_{L^2} = |\rho^{n+1/2}|^2 + <A\,\rho^{n+1/2}, \rho^{n+1/2}> - <A^2\rho^{n+1/2}, A\rho^{n+1/2}> - |A\rho^{n+1/2}|^2$$

En combinant avec l'inégalité (2.22), on obtient (2.20)

Lemme 2.5. On suppose que l'hypothèse (2.19) est satisfaite. Le schéma (1.18), (1.19) dans le cas du problème avec conditions aux limites (traitées de façon discontinue) est stable pour la norme $L^2(0,1)$ et on a :

$$(2.24)\quad ||\rho_h^n||^2_{L^2(0,1)} \leq ||\rho_h^0||^2_{L^2(0,1)} + u\int_0^{n\Delta t} (g(t))^2 dt\ .$$

Démonstration

On a : $< \rho^{n+1/2}, v > = \int_0^1 \rho^*(x) v \, dx$ pour tout $v \in V_h$,

$$|\rho^{n+1/2}|^2 \leq \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\rho^*(x)\right)^2 dx + \frac{1}{2} ||\rho^{n+1/2}||^2_{L^2}$$

Or, on peut écrire

$$\int_0^1 \left(\rho^*(x)\right)^2 dx = \int_0^{1-u\Delta t} \left(\rho_h^n(x)\right)^2 dx + u \int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t} \left(g(t)\right)^2 dt.$$

En utilisant l'inégalité (2.21), on en déduit

$$|\rho^{n+1/2}|^2 + <A\rho^{n+1/2}, \rho^{n+1/2}> \leq ||\rho_h^n||^2_{L^2} + u \int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t} \left(g(t)\right)^2 dt$$

La fin de la démonstration est identique à celle du lemme 2.4.

Lemme 2.6. On suppose que les points b_ℓ^i, $1 \leq \ell \leq k+1$, de la formule de quadrature (1.11) sont les abscisses de Gauss Lobatto pour le segment $[y_i, y_{i+1}]$, pour tout i. L'hypothèse (2.19) est alors satisfaite.

Démonstration

La restriction de $v \in V_h$ au segment $[y_i, y_{i+1}]$ est un polynôme de degré $\leq k$ que l'on peut écrire :

$$v = \sum_{m=0}^{k} v^{(m)} x^m$$

On pose : $<v,w>_i = \sum_{\ell=1}^{k+1} \omega_\ell^i (vw)\ (b_\ell^i)$

On a : $<v,v>_i - \int_{y_i}^{y_{i+1}} v^2 \, dx = \sum_{m,n=0}^{k} v^{(m)} v^{(n)} \left(<x^m,x^n>_i - \int_{y_i}^{y_{i+1}} x^{m+n} \, dx \right)$

La formule de quadrature (1.11) est exacte pour les polynômes de degré $\leq 2k-1$, on a donc :

$$<v,v>_i - \int_{y_i}^{y_{i+1}} v^2 \, dx = (v^{(k)})^2 \left(<x^k,x^k>_i - \int_{y_i}^{y_{i+1}} x^{2k} \, dx \right) .$$

Cette dernière quantité est > 0 d'après [3, page 80] . En sommant sur les indices i, on obtient le lemme 2.6.

3 - QUELQUES MAJORATIONS D'ERREUR

Définition 3.1 : A toute fonction continue $\rho(x,t)$, on associe la fonction $\sigma(x,t)$, V_h^1- interpolée de ρ . On pose :

$$(3.1) \quad \sigma^n(x) = \sigma(x,n\Delta t)$$

Théorème 3.1. On suppose que la solution exacte du problème (1.1), (1.2) appartient à $L^2((0,T) ; H^{k+1})$. Soit $\rho_h^n \in V_h$ la solution du schéma (1.9), (1.10) pour le problème de Cauchy. On a la majoration d'erreur suivante :

$$(3.2) \quad ||\rho_h^n - \rho(.,n\Delta t)||_{L^2} \leq ||\rho_h^0 - (.,0)||_{L^2} + C h^k \left(\int_0^T |\rho(.,t)|^2_{k+1,01} \, dt \right)^{1/2}$$

Démonstration

On a $\int \rho_h^{n+1} v \, dx = \int \rho_h^n (x-u\Delta t) v \, dx$ pour tout $v \in V_h$,

$$\int \sigma^{n+1} v \, dx = \int \left(\sigma^{n+1}(x) - \sigma^n(x-u\Delta t)\right) v \, dx + \int \sigma^n(x-u\Delta t) v \, dx$$

En retranchant membre à membre, il vient

$$\int (\rho_h^{n+1} - \sigma^{n+1})\, v\, dx = \int (\rho_h^n - \sigma^n)(x-u\Delta t)\, v\, dx - \int (\sigma^{n+1}(x) - \sigma^n(x-u\Delta t))\, v\, dx,$$

Le dernier terme du membre de droite peut s'écrire :

$$\int (\sigma^{n+1}(x) - \sigma^n(x-u\Delta t))\, v\, dx = \int [(\sigma^{n+1}(x) - \rho(x,(n+1)\Delta t) - (\sigma^n(x) - \rho(x,n\Delta t))]\, v\, dx +$$
$$+ \left(\int_{x-u\Delta t}^{x} \frac{\partial}{\partial y} (\sigma^n(y) - \rho(y,n\Delta t))\, dy \right) v\, dx$$

On en déduit :

$$||\rho_h^{n+1} - \sigma^{n+1}||_{L^2} \leq ||\rho_h^n - \sigma^n||_{L^2} + \sup_{v \in V_h} \frac{|\int (\sigma^{n+1}(x) - \sigma^n(x-u\Delta t))\, v\, dx|}{||v||_{L^2}}$$

La quantité $\sigma^{n+1}(x) - \sigma^n(x-u\Delta t)$ est identiquement nulle pour tout ρ appartenant à

$$\{x^\ell t^r\}_{\substack{0 \leq \ell \leq k \\ r \geq 0}} \cup \{ x^{k+1} t \} .$$

En utilisant une variante [4] du lemme de Bramble et Hilbert [1] , on en déduit la majoration (3.2)

Théorème 3.2. On suppose que les hypothèses du théorème 3.1 sont satisfaites. Soit $\rho_h^n \in V_h$ la solution du schéma (1.9), (1.10) pour le problème avec conditions aux limites (traitées de façon implicite). On a la majoration d'erreur suivante :

$$||\rho_h^n - \rho(.,n\Delta t)||_{L^2} \leq ||\rho_h^0 - \rho(.,0)||_{L^2} + O(h^k + \Delta t^{k+1})$$

Démonstration

On a $$\int_0^1 \rho_h^{n+1} v\, dx = \int_{u\Delta t}^1 \rho_h^n (x - u\Delta t)\, v\, dx + \int_0^{u\Delta t} g((n+1)\Delta t - \frac{x}{u})\, v\, dx$$

On peut donc écrire :

$$\int_0^1 (\rho_h^{n+1} - \sigma^{n+1})\, v\, dx = \int_{u\Delta t}^1 (\rho_h^n(x-u\Delta t) - \sigma^n(x-u\Delta t))\, v\, dx - \int_{u\Delta t}^1 (\sigma^{n+1}(x) - \sigma^n(x-u\Delta t))\, v\, dx +$$
$$+ \int_0^{u\Delta t} (g((n+1)\Delta t - \frac{x}{u}) - \sigma^{n+1}(x))\, v\, dx$$

Le dernier terme du membre de droite est majoré par

$$\int_0^{u\Delta t} (g((n+1)\Delta t - \frac{x}{u}) - \sigma^{n+1}(x))\, v\, dx \leq C\, u\Delta t^{k+1} \left(\int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t} \left(\frac{d^{k+1} g}{dt^{k+1}} \right)^2 dt \right)^{1/2} ||v||_{L^2(0,1)}$$

On termine la démonstration comme dans le théorème 3.1

Théorème 3.3. On suppose que les hypothèses du théorème 3.1 sont satisfaites. Soit $\rho_h^n \in V_h$ la solution du schéma (1.20), (1.21) pour le problème avec conditions aux limites (traitées de façon implicite). On a la majoration d'erreur suivante

$$||\rho_h^n - \rho(.,n\,t)||_{L^2} \leq ||\rho_h^0 - \rho(.,0)||_{L^2} + O\left(h^k + \frac{h^{k+1}}{\Delta t} + \Delta t^k\right)$$

Démonstration

On procède comme dans les théorèmes précédents.

Remarque 3.1 : La présence du terme $\frac{h^{k+1}}{\Delta t}$ provient du terme de diffusion "parasite" indépendante de la vitesse u.

4 - REMARQUES DIVERSES

Dans le cas où la vitesse u n'est pas constante, on peut définir des schémas numériques de façon un peu plus compliquée ([2] , [5]) pour lesquels on obtient encore [5] des résultats de stabilité. Il est aussi possible d'introduire un second membre f et de considérer un système d'équations non linéaires. Dans ce cas, le terme d'antidiffusion introduit au paragraphe 1 est défini de façon plus sophistiquée [2] .

Les schémas décrits ici peuvent être définis de la même façon en dimension 2, mais la mise en oeuvre semble être assez lourde.

REFERENCES

[1] BRAMBLE J.H., HILBERT S.H — *Bounds for a class of linear functionals with applications to Hermite interpolation,* Numer. Math. 16 (1971), 362-369.

[2] BORIS J.P., BOOK D.L. — *Flux corrected Transport. SHASTA, A fluid Transport Algorithm that works,* J. Comput. Phys. II, 36-69, (1973)

[3] DAVIS Ph.J., RABINOWITZ Ph. — *Methods of Numerical Integration,* Académic Press (1975)

[4] LESAINT P. — *Sur la résolution des systèmes hyperboliques du premier ordre par des méthodes d'éléments finis,* Thèse Paris (1975)

[5] LESAINT P., RAVIART P.A. — A paraître

[6] THOMEE V., — *Stability of difference schemes in the maximum-norm.* Journal of differential equations, 1, 273-292 (1965)