PUBLICATIONS MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUES DE RENNES

RAYMOND MARIE

Sur les réseaux de files d'attente à service de type K

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1976, fascicule 3
« Séminaire de probabilité II », , exp. n° 6, p. 20-40

<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1976___3_A6_0>

© Département de mathématiques et informatique, université de Rennes, 1976, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications mathématiques et informatiques de Rennes » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

SUR LES RESEAUX DE FILES D'ATTENTE A SERVICE DE TYPE K

par Raymond MARIE

A - INTRODUCTION

D'une façon générale on ne sait actuellement étudier analytiquement de façon exacte des réseaux de files d'attente (non triviaux) que :

a) si les lois de services des stations sont exponentielles (ou si les serveurs sont supérieurs en nombre aux clients potentiels) ; ceci pour une discipline d'attente "premier arrivé", permier servi".

b) ou si la discipline d'attente est telle que le système se comporte comme si les lois de services étaient exponentielles.

Ainsi, les probabilités asymptotiques des états du système ne sont connues exactement que si le réseau satisfait à certaines conditions parfois appelées conditions d'équilibre local [BAT-75].

L'objet de cette note est de présenter plusieurs méthodes itératives de résolution approchée de réseaux de files d'attente lorsque ces derniers satisfont aux hypothèses suivantes :

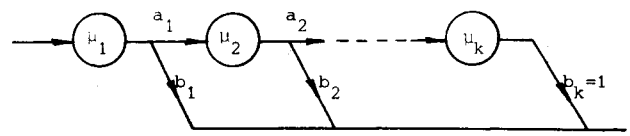
a) la matrice de passage $\mathcal{P} = (p_{ij})$ ne dépend pas de l'état du réseau ; i.e. : la probabilité p_{ij} d'aller dans la station j en quittant la station i est indépendante de l'état du réseau.

b) les stations possèdent des lois de service telles que leur transformée de Laplace est rationnelle. Pour reprendre la nomenclature de Kendall, une telle loi de distribution est symbolisée par la lettre K. Plus précisément, on se restreint souvent aux lois de distribution exponentielle, hyperexponentielle et d'Erlang symbolisées respectivement par les lettres M,H et E. Chaque station a un serveur unique, sauf indication contraire, et, dans ce dernier cas, la loi de service doit être exponentielle. La moyenne de la loi de service à la station i est $\bar{u}_i$, $0 < \bar{u}_i < +\infty$.

c) la discipline d'attente est "premier arrivé-premier servi".

La difficulté vient uniquement du fait que certaines stations possèdant des lois de service non exponentielles ont un nombre de serveurs inférieur au nombre total de clients N. Dans le cas d'un réseau ouvert, l'étude est réalisée sur le réseau fermé canoniquement associé au réseau initial ; N est alors le nombre de clients considérés dans le réseau fermé canonique ; ce nombre étant choisi suffisamment grand pour que la probabilité "d'oisiveté" de la station source soit négligeable.

On sait que les états d'une file d'attente M/K/1 ne sont pas régis globalement par un processus markovien ; néanmoins, ce système peut s'étudier comme un processus séquentiel à états fictifs ; les durées de séjour dans chacun des états fictifs ayant alors des fonctions densité exponentielles. Cette décomposition [COX-55] conduisant à la schématisation suivante :



Dans le paragraphe C, on introduit la notion de flux de sortie conditionnel d'une file d'attente $\lambda(i)/K/1$; puis on démontre une relation entre ce flux et le flux d'entrée $\lambda(i)$. Cette relation étant utilisée dans plusieurs méthodes présentées par la suite. De même, l'étude du cas particulier de la loi d'Erlang (§B), constitue aussi une introduction aux paragraphes suivants.

Pour le type de réseaux présenté ci-dessus, Chandy, Herzog et Woo [CHY-75b] ont proposé une méthode itérative qui permet d'évaluer les performances du système par l'intermédiaire des distributions asymptotiques marginales. Cette méthode ne converge pas vers la solution exacte mais donne néanmoins des résultats satisfaisants.

Après un rappel de la méthode précitée, on présente au paragraphe D, une modification de celle-ci qui permet généralement de diminuer le nombre d'itérations.

Au paragraphe E, on développe une troisième méthode reposant sur des considérations différentes ; cette dernière ne converge pas non plus vers la solution exacte mais les exemples numériques présentés dans le dernier paragraphe montrent qu'elle est compétitive par rapport à la première méthode.

Le paragraphe F est consacré à une méthode spécifique aux réseaux ne comportant que des stations d'Erlang.

Enfin, une cinquième méthode, qui fait l'objet du paragraphe G, fournit des résultats qui nous semblent intéressants.

Par la suite, les cinq méthodes seront identifiées de la façon suivante :

- méthode CHW : méthode de Chandy, Herzog et Woo,
- méthode CHW-m : méthode obtenue par modification de la précédente,
- méthode M3 : troisième méthode
- méthode M4 : méthode spécifique aux réseaux à stations d'Erlang
- méthode M5 : cinquième méthode.

B - ETUDE DE L'ETAT STATIONNAIRE DE LA STATION $\lambda(i)/E_k/1$

B-1. DESCRIPTION DU PROCESSUS MARKOVIEN NATURELLEMENT ASSOCIE - NOTATIONS

Une station d'Erlang d'ordre k à serveur unique peut s'étudier par l'intermédiaire d'un graphe markovien à états fictifs schématisé de la façon suivante :

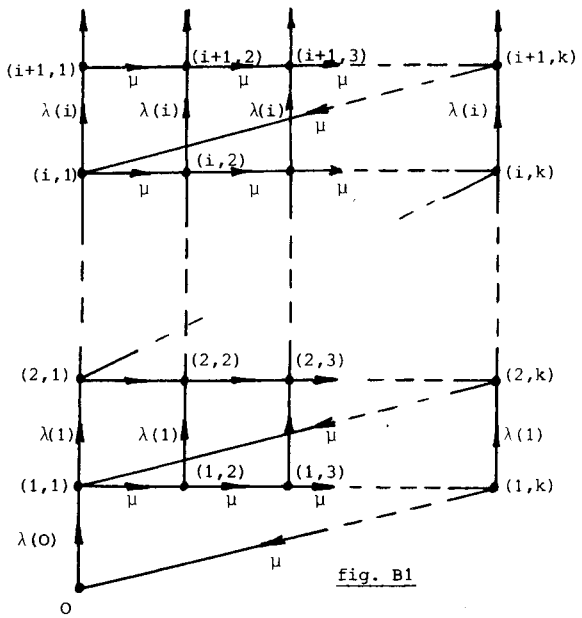


fig. B1

Le système est dans l'état (i,j) lorsqu'il contient i clients et que celui faisant l'objet du service se trouve dans la phase j.

Le processus des arrivées possède un taux d'arrivée dépendant de i, soit $\lambda(i)$.

La moyenne de la loi de service étant $\bar{u}$, on a : $\mu = \frac{k}{\bar{u}}$.

Si le régime stationnaire existe, c'est-à-dire s'il n'y a pas saturation, correspond à l'état (i,j) une probabilité asymptotique p(i,j).

On pose :

$$\lambda_i = \lambda(i)$$

$$\phi_i = \frac{\lambda_i}{\mu}$$

$$s_i = 1 + \phi_i$$

$$c_{i,j} = \frac{p(i,j)}{p(0)}$$

Soit E_i l'ensemble des états (i,j),j = 1,...,k du système markovien précédemment défini. Notons P(i) la probabilité asymptotique de E_i ; on a :

$$P(i) = \sum_{j=1}^{k} p(i,j)$$

On définit le taux de sortie conditionnel $\nu(i)$ de la station d'Erlang sachant qu'il y a i clients dans cette dernière comme étant le taux de transition, à l'intérieur du processus markovien, de l'ensemble E_i dans l'ensemble E_{i-1} sachant que l'on est dans l'ensemble E_i. On a donc par définition :

$$\nu(i) = \frac{\mu.p(i,k)}{\sum_{j=1}^{k} p(i,j)} = \frac{\mu.p(i,k)}{P(i)} \qquad \text{(B2-1)}$$

B-2. MISE EN EVIDENCE DE LA RELATION $\lambda(i-1).P(i-1) = \nu(i).P(i)$

En régime asymptotique, l'étude du graphe markovien de la figure B.1. permet d'écrire les équations

a) i = 1

$$\mu.c_{1,k} = \lambda_o c_o \qquad \text{(B2-2)}$$

$$c_{1,j} = S_1\, c_{1,j+1} \qquad j=1,\ldots,(k-1) \qquad \text{(B2-3)}$$

b) i > 1

$$c_{i,j} = S_i c_{i,j+1} - \phi_{i-1}\, c_{i-1,j+1}$$

$$j=1,\ldots,(k-1) \qquad \text{(B2-4)}$$

$$c_{i,k} = S_{i-1}.c_{i-1,1} - \phi_{i-2}\, c_{i-2,1} \qquad \text{(B2-5)}$$

Pour démontrer la relation :

$$\lambda(i-1).P(i-1) = \nu(i).P(i) \qquad \text{(B2-6)}$$

Il suffit de montrer par récurrence que :

$$p(i,k) = \phi_{i-1} \times P(i-1) \qquad \text{(B2-7)}$$

Grâce à l'équation (B2-2), on a immédiatement

$$p(1,k) = \phi_o.P(0)$$

en remarquant que $c_o = 1$ par définition :

Les équations (B2-5), (B2-3) et (B2-2) entraînent que :

$$c_{2,k} = S_1 \times c_{1,1} - \phi_o = \phi_o S_1^K - \phi_o = \phi_o(S_1^K - 1)$$

ainsi que :

$$P(1) = \sum_{j=1}^{k} p(1,j) = P(0) \times \sum_{j=1}^{k} c_{1,j} = P(0)\, \frac{\phi_1(S_1^K-1)}{\phi_1}$$

d'où :

$$c_{2,k} = \phi_1 \frac{P(1)}{P(0)}$$

soit : $p(2,k) = \phi_1 P(1)$. Supposons vérifié,

$$p(i,k) = \phi_{i-1}.P(i-1)$$

ce qui s'écrit encore :

$$c(i,k) = \phi_{i-1} \left(\sum_{j=1}^{k} c_{i-1,j} \right) \qquad \text{(B2-8)}$$

D'après l'équation (B2-4) qui s'écrit encore :

$$\phi_i c_{i,j+1} = c_{i,j} - c_{i,j+1} + \phi_{i-1} c_{i-1,j+1}$$

On a :

$$\phi_i \left(\sum_{j=1}^{k-1} c_{i',j+1} \right) = c_{i,1} - c_{i,k} + \phi_{i-1} \left(\sum_{j=1}^{k-1} c_{i-1,j+1} \right)$$

Soit encore :

$$\phi_i \left(\sum_{j=1}^{k-1} c_{i,j+1} \right) + \phi_i c_{i,1} = c_{i,1}(1+\phi_i) - c_{i,k} + \phi_{i-1} \left(\sum_{j=1}^{k-1} c_{i-1,j+1} \right)$$

Et, en utilisant (B2-8) :

$$\phi_i \left(\sum_{j=1}^{k} c_{i,j} \right) = S_i c_{i,1} - \phi_{i-1}.c_{i-1,1}$$

qui s'écrit, grâce à (B2-5)

$$\phi_i \left(\sum_{j=1}^{k} c_{i,j} \right) = c_{i+1,k}$$

d'où :

$$p(i,k) = \phi_i.P(i)$$

Ce qui démontre (B2-7) et par conséquent, (B2-6).

B-3. ELABORATION DE LA SUITE $\{\nu(i)\}$

Dans ce paragraphe, on met en évidence une relation de récurrence entre les éléments de la suite $\{\nu(i)\}$ permettant d'élaborer cette dernière. En effet, l'utilisation de cette dernière et de la relation (B2-6) fournit une méthode rapide pour trouver les probabilités asymptotiques P(i) de la station d'Erlang.

On exprime d'abord les coefficients $c_{i,j}$ en fonction des coefficients $c_{u,k}$ $u=i, i-1,\ldots,(i+1-k)$

Grâce à (B2-4), on a, pour $i > k$:

$$c_{i,k} = c_{i,k}$$

$$c_{i,k-1} = S_i c_{i,k} - \phi_{i-1}.c_{i-1,k}$$

$$c_{i,k-2} = S_i^2 c_{i,k} - \phi_{i-1} c_{i-1,k}(S_i + S_{i-1}) + \phi_{i-1}.\phi_{i-2} c_{i-2,k}$$

et, en posant :

$$S^*_{i,j}(u) = \sum_{\mathcal{H}_{(j-u)}} \left(\prod_{k=i-u}^{i} S_k^{v_k} \right)$$

où

$$\mathcal{H}_{j-u} = \{(v_i, v_{i-1}, \ldots, v_{i-u}) / v_k \in \{i,\ldots,i-u\},$$
$$0 \leq v_k \leq j-u, \ \sum_{k=i}^{i-u} v_k = j-u\}$$

on obtient :

$$c_{i,k-j} = S^*_{i,j}(0) c_{i,k} - \phi_{i-1} S^*_{i,j}(1).c_{i-1,k}$$
$$+\ldots+ (-1)^{\ell} \left(\prod_{m=1}^{\ell} \phi_{i-m} \right).S^*_{i,j}(\ell)\ c_{i-\ell,k}$$
$$+\ldots+(-1)^{j} \left(\prod_{m=1}^{j} \phi_{i-m} \right).S^*_{i,j}(j).c_{i-j,k}$$

Soit, en prenant la somme sur E_i :

$$\sum_{j=0}^{k-1} c_{i,k-j} = \left(\sum_{j=0}^{k-1} S^*_{i,j}(0) \right) c_{i,k}$$
$$+\ldots+(-1)^{\ell} \left(\prod_{m=1}^{\ell} \phi_{i-m} \right) \left(\sum_{j=\ell}^{k-1} S^*_{i,j}(\ell) \right) c_{i-,k} +$$
$$+\ldots+(-1)^{k-1} \left(\prod_{m=1}^{k-1} \phi_{i-m} \right).S^*_{i,k-1}(k-1) c_{i-k+1,k}$$

En posant :

$$E_i(p) = \sum_{j=p}^{k-1} S^*_j(p)$$

et compte-tenu que : $c_{i,k} = \phi_{i-1}.\frac{P(i-1)}{P(0)}$

on obtient :

$$P(i) = E_i(0).\phi_{i-1}.P(i-1)+\ldots+(-1)^{\ell} \left(\prod_{m=1}^{\ell+1} \phi_{i-m} \right).E_i(\ell).$$
$$P(i-\ell-1)+\ldots+(-1^{k-1} \left(\prod_{m=1}^{k} \phi_{i-m} \right) E_i(k-1).P(i-k)$$

En divisant cette expression par P(i) :

$$1 = E_i(0).\frac{\nu(i)}{\mu}+\ldots+(-1)^{\ell} \left(\prod_{m=0}^{\ell} \right) \frac{\nu(i-m)}{\mu})$$
$$+\ldots+ (-1)^{k-1} \left(\prod_{m=0}^{k-1} \frac{\nu(i-m)}{\mu} \right)$$

et en posant :

$$\eta(p) = \frac{\nu(p)}{\mu}$$

on obtient, si $i > k$, la formule de récurrence :

$$\eta(i) = \frac{1}{E_i(0) + \sum_{\ell=1}^{k-1} (-1)^{\ell} E_i(\ell) \left(\prod_{m=1}^{\ell} \eta(i-m) \right)} \qquad (B3\text{-}1)$$

De la même façon, si $i \leq k$, on a :

$$\eta(i) = \frac{1}{E_i(0) + \sum_{\ell=1}^{i-1} (-1)^{\ell} . E_i(\ell) . \left(\prod_{m=1}^{\ell} \eta(i-m) \right)}$$

Ainsi, la suite $\{\nu(i)\}$ se calcule relativement bien compte tenu que :

$$\begin{cases} S^*_{i,j}(u) = \sum_{k=0}^{j-u} S^k_{i-u} \times S^*_{i,j-k-1}(u-1) \\ S^*_{i,j}(0) = S^j_i \end{cases}$$

B-4. PROBABILITES D'ETAT ASYMPTOTIQUES DANS LE CAS OU LE NOMBRE DE CLIENTS EST LIMITE.

Ce cas correspond, soit à une file d'attente limitée, i.e :

$\lambda(i) = 0$ pour $i > N$

soit à un système fermé composé d'une station E_k et d'une station M en série de taux de service $\mu(i) = \lambda(N-i)$ si le réseau contient N clients.

En écrivant que :

$$\sum_{i=0}^{N} P(i) = 1$$

et en utilisant (B2-6) et (B3-1), on a :

$$P(i) = \frac{\lambda(i-1)}{\nu(i)} \times P(i-1) = \frac{\Omega(i-1)}{\Gamma(i)} P(0) =$$

$$= \frac{\Omega(i-1)}{\Gamma(i)} \times \frac{1}{\left(\sum_{j=0}^{N} \frac{\Omega(j-1)}{\Gamma(j)} \right)} \qquad (B4\text{-}1)$$

Les fonctions $\Omega(.)$, $\Gamma(.)$ étant définies par :

$$\begin{cases} \Omega(-1) = 1 \\ \Omega(j) = \Omega(j-1).\lambda(j) \qquad j=0,\ldots,N-1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Gamma(0) = 1 \\ \Gamma(j) = \Gamma(j-1).\nu(j) \qquad j=1,\ldots,N \end{cases}$$

Remarque B4. L'expression des probabilités d'état asymptotiques d'une station E_k avec taux d'arrivée dépendant $\lambda(i)$ n'est donc possible ici que si on suppose le nombre de clients limité ; ceci, soit par hypothèse, soit par approximation. On va voir dans le paragraphe suivant que si le taux d'arrivée est indépendant ($\lambda(i) = \lambda$, $\forall i$), il n'est plus nécessaire de faire cette restriction.

B-5. CAS PARTICULIER DE LA FILE $M/E_k/1$ AVEC λ = Cte.

B51. Simplification des résultats précédents.

Dans ce cas, en utilisant les notations :

$$\phi = \frac{\lambda}{\mu}, \quad S = 1 + \phi$$

Les résultats des paragraphes précédents se simplifient ; on obtient :

$$\nu(i)\, P(i) = \lambda . P(i-1)$$

et

$$P(i) = A(0).\phi.P(i-1) + \ldots + (-1)^{\ell} \phi^{\ell+1} A(\ell).P(i-\ell-1) +$$

$$+ \ldots + (-1)^{k-1} \phi^{k} A(k-1).P(i-k) \qquad (B51\text{-}1)$$

avec

$$A(p) = \sum_{j=p}^{k-1} C_j^p \, S^{j-p}$$

d'où

$$\eta(i) = \frac{1}{A(0) + \sum_{\ell=1}^{y-1} (-1)^{\ell} . A(\ell) \left(\prod_{m=1}^{\ell} \eta(i-\ell) \right)} \qquad (B51\text{-}1)$$

avec $y = \min(i,k)$

Si la file d'attente est limitée, la formule (B4-1) permet encore de donner les probabilités d'état asymptotiques. Dans le cas où le nombre de clients est illimité, il faut déterminer P(0) par une autre méthode ; c'est l'objet du paragraphe suivant.

B52. Expression de P(0)

En posant :

$f(n) = P(n)$

$a_i = f(i) \qquad i=0,\ldots,k-1$

$B_p = A(p).\phi^{p+1}$

La relation(B51-1) s'écrit :

$$f(n+k) - B_0 f(n+k-1) + \ldots + (-1)^{k-\ell} B_{k-1-\ell} f(n+\ell)$$

$$+ \ldots + (-1)^{k} B_{k-1} f(n) = 0$$

En utilisant la fonction génératrice

$$f^*(Z) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n).Z^n$$

on obtient la relation :

$$\frac{f^*(Z)-a_o-a_1z-\ldots-a_{k-1}z^{k-1}}{z^k} - \frac{B_o\left[f^*(Z)-a_o-\ldots-a_{k-2}z^{k-2}\right]}{z^{k-1}} + \ldots + (-1)^k B_{k-1} f^*(Z) = 0$$

ou encore

$$f^*(Z)\left[1-B_oZ+B_1Z^2+\ldots(-1)^kB_{k-1}Z^k\right] = a_o + (a_1-a_oB_o)Z+$$

$$+(a_2-a_1B_o+a_oB_1)Z^2+\ldots+(a_{k-1}-a_{k-2}B_o+a_{k-3}B_1+\ldots+$$

$$+(-1)^{k-1}a_oB_{k-1})Z^{k-1}$$

En posant

$$\alpha_\ell = \sum_{j=0}^{\ell} a_j B_{\ell-1-j} \qquad \text{avec } B_{-1} = 1$$

et en utilisant l'expression (B51-1) lorsque $i < k$, on a :

$$\alpha_\ell = 0 \qquad \ell = 1,\ldots,k-3.$$

On obtient alors :

$$f^*(Z) = \frac{a_o}{\left[1 - B_oZ + B_1Z^2 +\ldots (-1)^kB_{k-1}Z^k\right]} \qquad \text{(B52-1)}$$

En utilisant les propriétés suivantes des fonctions génératrices :

a) $\lim_{n\to\infty} F(n) = \lim_{Z=1} (1-Z)\, F^*(Z)$

si $\lim_{n\uparrow\infty}.F(n)$ existe et si les pôles de $F^*(Z)$ sont tels que $|Z| \geq 1$

b) $F(n) = \sum_{i=0}^{n} f(i) \iff F^*(Z) = \frac{f^*(Z)}{(1-Z)}$

on obtient :

$$\lim_{n\uparrow\infty} \left(\sum_{i=1}^{n} f(i)\right) = \lim_{Z=1} f^*(Z)$$

Or : $\sum_{o}^{\infty} f(i) = 1$ par hypothèse ; donc :

$$1 = \frac{a_o}{(1 - B_o + B_1+\ldots+ (-1)^kB_{k-1})}$$

d'où

$$P(O) = 1-A(O).\phi+A(1)\phi^2+\ldots+(-1)^kA(k-1).\phi^k$$

$$= 1 - \sum_{j=0}^{k-1} c_j^o S^j.\phi+\ldots+(-1)^k \sum_{k-1}^{k-1} c_{k-1}^{k-1}\, S^o\, \phi^k$$

$$= 1 -\phi\left[+ 1-(\phi-S)+(\phi-S)^2+\ldots+(-1)^{k-1}(\phi-S)^{k-1}\right.$$

mais par définition $S = 1 + \phi$; donc :

$$P(O) = 1 - k\phi \qquad \text{(B52-2)}$$

ce qui redonne le résultat de KENDALL [KEL-51] .

B53. Probabilités d'états asymptotiques

A partir des expressions (B52-1) et (B52-2), on a :

$$f^*(Z) = \frac{1-k\phi}{\left[1 - B_oZ+B_1Z^2+\ldots(-1)^kB_{k-1}Z^k\right]} \qquad \text{(B53-1)}$$

La décomposition de cette expression en éléments simples puis l'utilisation des transformées inverses permet d'obtenir les probabilités P(n). Mais, sauf peut-être pour le cas d'une loi d'ordre k=2, il ne semble pas que cette méthode soit plus rapide que l'utilisation de la suite $\{\nu(i)\}$ par l'intermédiaire des formules :

$$P(O) = 1 - k.\phi$$
$$p(i) = \frac{\lambda}{\nu(i)}\, p(i-1) \qquad i=1,2,\ldots$$

Pour k=2, l'expression (B53-1) s'écrit :

$$f^*(Z) = \frac{1 - 2\phi}{\left|1-B_oZ+B_1Z^2\right|}$$

Le dénominateur ayant pour racines :

$$\begin{cases} c_o = \dfrac{B_o + \sqrt{B_o^2 - 4B_1}}{2} \\ c_1 = \dfrac{B_o - \sqrt{B_o^2 - 4B_1}}{2} \end{cases}$$

On peut exprimer $f^*(Z)$ en éléments simples :

$$f^*(Z) = \frac{(1-2\phi)}{(c_o-c_1)}\left\{\frac{c_o}{(1-c_oZ)} - \frac{c_1}{(1-c_1Z)}\right\}$$

D'où, d'après les transformées inverses :

$$P(n) = \frac{(1-2\phi)}{c_o-c_1}\left\{c_o^{n+1} - c_1^{n+1}\right\} \qquad \text{(B53-1)}$$

Remarque B53. Dans [KEL-51], KENDALL avait considéré la chaîne markovienne $N(t_{B,i}+O)$ où $t_{B,i}$ est

l'instant de la ième sortie ; $N(t_{B,i}+O)$ désigne donc le nombre de clients immédiatement après $t_{B,i}$. Ayant posé pour le régime permanent :

$$q_n = Pr\ \{N(t_{B,i} + O) = n\}$$

KENDALL a trouvé pour expression des q(n) un résultat identique à (B53-1). Ce qui est conforme au théorème de KHINTCHINE qui affirme que P(n) = q(n) pour tout système M/G/1.

B54. Nombre moyen d'unités dans le système

En reprenant les notations du paragraphe précédent et en utilisant les propriétés des fonctions génératrices, on a :

$$\bar{n} = \lim_{m\uparrow\infty} \left(\sum_{i=0}^{m} i.f(i) \right) = \lim_{Z=1} Z.\ \frac{d}{dZ}\ f^*(Z)$$

Appliquons ce résultat classique au système $M/E_k/1$ considéré ici. En utilisant (B53-1), on a :

$$\bar{n} = \frac{(1-k\phi)}{(1-k\phi)^2} \left[B_o - 2B_1 + \ldots + (-1)^{k-1}.k.B_{k-1}\right]$$

On pose

$$C_k = B_o - 2B_1 + \ldots + (-1)^{k-1}.k.B_{k-1}$$

et on rappelle que :

$$B_p = \phi^{p+1} \left(\sum_{j=p}^{k-1} C_j^p\ S^{j-p} \right)$$

où $S = 1 + \phi$

On a donc :

$$C_k = \sum_{p=0}^{k-1} (-1)^p.(p+1).\phi^{p+1} \left(\sum_{j=p}^{k-1} C_j^p \left(\sum_{u=0}^{j-p} C_{j-p}^u \phi^u \right) \right) \quad (B54\text{-}1)$$

ou

$$C_k = \gamma_1.\phi + \gamma_2\phi^2 + \ldots + \gamma_k\phi^k$$

avec

$$\gamma_\ell = \sum_{p=0}^{\ell-1} (-1)^p (p+1) \left(\sum_{j=\ell-1}^{k-1} C_j^p . C_{j-p}^{\ell-1-p} \right)$$

ce coefficient γ_ℓ pouvant encore s'écrire :

$$\gamma_\ell = \sum_{p=0}^{\ell-1} (-1)^p.(p+1) \left(\sum_{j=\ell-1}^{k-1} \frac{j!}{p!\,(j-p)!} \times \frac{(j-p)!}{(\ell-1-p)!\,(j-p-\ell+1-p)!} \right)$$

$$= \sum_{p=0}^{\ell-1} \frac{(-1)^p.(p+1)}{p!\,(\ell-1-p)!} \left(\sum_{j-\ell-1}^{k-1} \frac{j!}{(j-\ell+1)!} \right)$$

$$= \omega_\ell \times K_\ell$$

où : $$\omega_\ell = \sum_{p=0}^{\ell-1} \frac{(-1)^p(p+1)}{p!\,(\ell-1-p)!}$$

$$K_\ell = \sum_{j=\ell-1}^{k-1} \frac{j!}{(j-\ell+1)!}$$

le coefficient ω_ℓ s'écrit encore :

$$\omega_\ell = \sum_{p=0}^{\ell-1} \frac{(-1)^p}{p!\,(\ell-1-p)!} + \sum_{p=0}^{\ell-1} \frac{(-1)^p.p}{p!\,(\ell-1-p)!}$$

$$= \frac{1}{(\ell-1)!} \sum_{p=0}^{\ell-1} \frac{(-1)^p(\ell-1)!}{p!\,(\ell-1-p)!} - \frac{1}{(\ell-2)!} \sum_{v=0}^{\ell-2} \frac{(-1)^v(\ell-2)!}{v!\,(\ell-2-v)!} \qquad \text{si } \ell > 2$$

Soit

$$\omega_\ell = 0 \qquad \text{pour } \ell > 2$$

Donc :

$$\gamma_1 = k$$

$$\gamma_2 = -\frac{k(k-1)}{2}$$

$$\gamma_\ell = 0 \qquad \text{pour } \ell > 2$$

ce qui entraîne

$$C_k = k\phi - \frac{k(k-1)}{2}\ \phi^2$$

et donc :

$$\bar{n} = \frac{k\phi - \frac{k(k-1)\phi^2}{2}}{2}$$

En posant :

$$\psi = \lambda.\bar{u}$$

on a encore :

$$\bar{n} = \frac{\psi}{1-\psi} - \frac{\psi^2\left(\frac{k-1}{2k}\right)}{1-\psi} \qquad (B54\text{-}2)$$

On remarque que la différence entre cette valeur et celle qui serait donnée par une loi exponentielle de même moyenne $\bar{u}$ est de :

$$\frac{-\psi^2\left(\frac{k-1}{2k}\right)}{1-\psi}$$

En particulier, si $k \to \infty$, on obtient le nombre moyen d'unités pour une loi constante :

$$\bar{n}_{cst} = \frac{\psi}{1-\psi}\left(1 - \frac{\psi}{2}\right)$$

On remarque que l'approximation d'une loi constante par une loi E_k entraîne une erreur relative sur $\bar{n}$ qui s'écrit :

$$\frac{\bar{n}_k - \bar{n}_{cst}}{\bar{n}_{cst}} = \frac{\psi^2}{k.(2-\psi)}$$

et qui tend vers la valeur maximale $\frac{1}{k}$ lorsque ψ tend vers 1.

B55. Limite de la suite $\{\eta(i)\}_{i=0,1,\ldots,\infty}$

B551. Etude expérimentale

Les relations (B2-2) à (B2-5) appliquées à une file $M/E_k/1$ permettent de calculer numériquement les probabilités $p(i,j)$ et donc le flux de sortie conditionnel

$$\nu(i) = \frac{\mu . p(i,j)}{\sum_{j=1}^{k} p(i,j)}$$

La planche I illustre plusieurs exemples numériques. On constate que $\eta(i) = \nu(i) \times \frac{u}{k}$ tend vers une limite. De plus, comme prévu, $\eta(i)$ ne dépend que des variables ϕ et k. (ou de ψ et de k puisque $\psi = k\phi$).

B552. Limite de $\eta(i)$ pour une loi d'Erlang d'ordre 2.

Pour k=2, on a :

$$\begin{cases} \eta(0) = 0 \\ \eta(i) = \dfrac{1}{A_0 - \eta(i-1)} \qquad \text{pour } i > 0 \end{cases}$$

Donc la limite $\tilde{\eta}$ est solution de :

$$\tilde{\eta} = \frac{1}{A_0 - \tilde{\eta}} \qquad \text{avec } A_0 = S+1 = (2+\phi)$$

D'où

$$\tilde{\eta} = \left(\frac{\phi+2}{2}\right) \pm \frac{\sqrt{\phi(\phi+4)}}{2}$$

L'étude graphique du système

$$\begin{cases} y = x \\ y = \dfrac{1}{A_0 - x} \end{cases}$$

permet (cf. planche II) compte tenu de la valeur initiale de $\eta(i)$ de retenir la solution :

$$\tilde{\eta} = \frac{\phi+2}{2} - \frac{\sqrt{\phi(\phi+4)}}{2}$$

ce qui est conforme aux résultats expérimentaux de la planche I.

B553. Limite de $\eta(i)$

Compte-tenu de la formule (B51-2), la limite peut s'étudier à l'aide du système :

$$\begin{cases} y = x \\ y = \dfrac{1}{\sum_{p=0}^{k-1} (-1)^p . A_p . x^p} \end{cases}$$

où $A_p = \sum_{j=p}^{k-1} \frac{j!}{p!(j-p)!} S^{j-p}$

avec $S = 1+\phi$

On pose :

$$D = \sum_{p=0}^{k-1} (-1)^p A_p x^p$$

et

$$f(S) = \sum_{j=0}^{k-1} S^j$$

Si $f^{\ell}(S)$ est la dérivée en S d'ordre ℓ de f(S), on a :

$$f^{\ell}(S) = 0 \qquad \text{si } \ell \geq k$$

et

$$D = \sum_{p=0}^{k-1} (-1)^p \frac{x^p}{p!} f^p(S)$$

et donc, d'après la formule de Taylor :

$$D = f(S-x)$$

La limite $\tilde{\eta}$ est donc solution de l'équation :

$$\sum_{j=0}^{k=1} (S-\tilde{\eta})^j = \frac{1}{\tilde{\eta}}$$

L'étude graphique du système :

$$\begin{cases} y = x \\ y = \dfrac{1}{\sum_{j=0}^{k-1} (S-x)^j} \end{cases}$$

permet, compte-tenu des valeurs initiales de la suite de retenir la racine $\tilde{\eta}$ telle que :

$$\frac{1}{k} \leq \tilde{\eta} \leq 1$$

Graphiquement, il est préférable d'étudier le système :

$$\begin{cases} y = S - X \\ y = \dfrac{1}{\sum_{j=0}^{k-1} X^j} \end{cases}$$

Cette méthode graphique est illustrée planche III ; on y vérifie les valeurs limites de $\tilde{\eta}$ relatives aux exemples numériques de la phanche I, lorsque k = 4. A noter que la donnée S est toujours comprise entre 1 et $(1 + \frac{1}{k})$ puisque $\psi \leq 1 \Longrightarrow \phi \leq \frac{1}{k}$.

Remarques : La limite du flux de sortie conditionnel d'une station E_k est supérieure ou égale au flux de sortie conditionnel d'une station exponentielle ayant la même moyenne de loi de service. On n'a l'égalité que pour le cas limite où $\psi = 1$. De plus, on constate une différence essentielle entre les modes de fonctionnement des systèmes exponentiel et Erlang k, (k > 1) ; Alors que pour une loi exponen-

tielle le flux de sortie conditionnel était indépendant du flux d'entrée λ, le flux de sortie conditionnel d'une loi E_k, ($k > 1$) dépend de façon majeure du flux d'entrée λ.

C - ETUDE DE L'ETAT STATIONNAIRE DE LA STATION $\lambda(i)/K/1$

C1. DESCRIPTION DU PROCESSUS MARKOVIEN NATURELLEMENT ASSOCIE

Une station de loi générale à transformées de Laplace rationnelles peut s'étudier par l'intermédiaire d'un graphe markovien à états fictifs. Le graphe markovien associé à la file $\lambda(i)/K/1$ est représenté planche IV. On définit ainsi les probabilités asymptotiques $p(i,j)$ correspondant aux états fictifs (i,j).

On peut ainsi, en régime asymptotique, définir le flux de sortie d'une telle station sachant qu'elle contient i clients :

$$\nu(i) = \frac{\sum_{j=1}^{k} b_j \mu_j p(i,j)}{\sum_{j=1}^{k} p(i,j)} = \frac{\sum_{j=1}^{k} b_j \mu_j p(i,j)}{P(i)} \qquad \text{(C1-1)}$$

où $\quad P(i) = \sum_{j=1}^{k} p(i,j)$

C2. MISE EN EVIDENCE DE LA RELATION $\lambda(i-1).P(i-1)=\nu(i).P(i)$

L'étude, en régime stationnaire, du graphe markovien de la planche IV, permet d'écrire les équations :

a) $i = 1$

$$\lambda(0).p(0) = \sum_{j=1}^{k} b_j \mu_j p(1,j) = \nu(1).P(1) \qquad \text{(C2-1)}$$

b) $i > 1$

$$\lambda(i-1).p(i-1,1) + \sum_{j=1}^{k} b_j \mu_j p(i+1,j) = \lambda(i)p(i,1) + \mu_1 p(i,1) \qquad \text{(C2-2)}$$

$$\lambda(i-1).p(i-1,j) + a_{j-1}\mu_{j-1}p(i,j-1) = \lambda(i).p(i,j) + \mu_j p(i,j) \qquad j=2,\ldots,k \qquad \text{(C2-3)}$$

En additionnant l'équation (C2-2) à (k-1) fois l'équation (C2-3) on obtient :

$$\sum_{j=1}^{k} \lambda(i-1)p(i-1,j) + \sum_{j=1}^{k} b_j \mu_j p(i+1,j) = \sum_{j=1}^{k} \lambda(i).p(i,j) + \sum_{j=1}^{k} \mu_j b_j p(i,j)$$

Soit, compte-tenu de (C1-1) :

$$\lambda(i-1).P(i-1) + \nu(i+1).P(i+1) = \lambda(i).P(i) + \nu(i).P(i) \qquad \text{(C2-4)}$$

Pour i=1, on obtient, compte-tenu de (C2-1) :

$$\nu(2).P(2) = \lambda(1).P(1)$$

Supposons vérifiée la relation :

$$\lambda(i-2).P(i-2) = \nu(i-1).P(i-1)$$

On obtient immédiatement, compte-tenu de (C2-4):

$$\lambda(i-1).P(i-1) = \nu(i).P(i) \qquad \text{(C2.5)}$$

Ce qui achève la démonstration.

D - METHODE CHW-m

D-1. RAPPEL DE LA METHODE CHW

Soit R un réseau conforme à la définition donnée en introduction ; ce réseau fermé comporte N clients et M stations.

Soit S un réseau de type exponentiel canoniquement associé à R ; i.e. : de même structure (même matrice $\mathcal{P}$, même nombre de stations), avec un même nombre de clients. Soit $\mu = (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_M)$ le vecteur formé à l'aide des taux de service de chaque station, avec $\mu_i = (\bar{u}_i)^{-1}$.

Pour un tel réseau S, on peut utiliser les théorèmes de Jackson, Gordon et Newel ([JAN-63], [GON-67]) donnant les probabilités aymptotiques du réseau :

$$p(n_1,\ldots,n_M) = \frac{\prod_{j=1}^{j=M} \left(\frac{x_j^{n_j}}{A_j(n_j)}\right)}{C(N)}$$

où :

a) X_j est une solution de :

$$\mu_j . X_j = \sum_{i=1}^{i=M} \mu_i . X_i . p_{ij}$$

b) $A_j(n_j)$ est définie de la façon suivante :

$$\begin{cases} A_j(0) = 1 \\ A_j(n_j) = A_j(n_j-1) . \dfrac{\mu_j(n_j)}{\mu_j} \end{cases}$$

$\mu_j(n_j)$ représentant le taux de sortie de la station j dans l'état n_j.

c) C(N) est la constante de normalisation :

$$C(N) = \sum_{\mathcal{H}_N} \prod_{j=1}^{j=M} \left(\frac{x_j^{n_j}}{A_j(n_j)}\right)$$

où

$$\mathcal{H}_N = \{(n_1,\ldots,n_M) / \forall_j \in \{1,\ldots,M\}, 0 \leq n_j \leq N, \sum_{j=1}^{j=M} n_j = N\}$$

De plus, ce réseau S est décomposable en sous-réseaux et on peut entre autres étudier les probabilités marginales asymptotiques d'une station i par l'intermédiaire d'une station complémentaire déduite du sous-réseau "$S_{\bar{i}}$" complémentaire à la station i par rapport à S ([CHY-75a], [MAE-75]).

On sait donc calculer le flux de sortie $\nu_{\bar{i}}(N-n_i)$ du sous-réseau $S_{\bar{i}}$ sachant qu'il y a $(N-n_i)$ clients à l'intérieur de ce dernier. Ainsi, si $\lambda_i(n_i)$ est le flux d'entrée dans la station i sachant qu'elle détient n_i clients, on a : $\lambda_i(n_i) = \nu_{\bar{i}}(N-i)$.

Dans la méthode CHW, on considère à la $k^{ième}$ itération un réseau $S^{(k)}$ différent du réseau $S^{(k-1)}$ par l'intermédiaire du vecteur $\mu^{(k)}$. Ainsi, à chaque itération, le vecteur $\mu^{(k)}$ de $S^{(k)}$ est modifié en fonction de tests effectués sur le réseau R ; on mesure en effet la somme des longueurs de files et les flux moyens de toutes les stations.

Plus précisément, l'algorithme de la méthode peut se résumer ainsi :

INITIALISATION :

i) k = 0

ii) initialisation de $\mu^{(0)} = (\bar{u}_1^{-1}, \bar{u}_2^{-1}, \ldots, \bar{u}_M^{-1})$

PAS A :

i) calculer $\nu_{\bar{i}}(N-n_i)$ dans $S^{(k)}$

ii) déterminer les distributions de la longueur de la file d'attente d'une part et des temps d'attente d'autre part, pour la station i de R en la supposant soumise au flux d'entrée $\lambda_i(n_i) = \nu_{\bar{i}}(N-n_i)$.

PAS B :

Réaliser un test sur la somme des longueurs moyennes des files d'attente et sur le flux moyen de chaque station du réseau R.
Si le test est positif : fin des itérations.
Sinon : aller en C.

PAS C :

i) construire le vecteur $\mu^{(k+1)}$ à partir de $\mu^{(k)}$ et en fonction des résultats de la $k^{ième}$ itération comme indiqué plus loin.

ii) k : k+1

iii) : aller en A.

Avant de détailler les pas B et C, introduisons le vecteur $x = (x_1,\ldots,x_M)$ solution de l'équation matricielle $x\mathcal{P} = x$; le réseau S étant supposé ergodique, la solution est unique à un coefficient près.

Le pas A de l'algorithme permet de calculer, à partir des probabilités d'état marginales $\tilde{P}_i(n_i)$, les quantités :

$\sum_{i=1}^{M} \bar{n}_i = \sum_{i=1}^{M} \left(\sum_{n_i=1}^{N} n_i . \tilde{P}_i(n_i) \right)$: nombre de clients calculés dans R ;

$t_i = \sum_{n_i=0}^{N} \lambda_i(n_i).\tilde{P}_i(n_i)$: flux traversant la station i.

Les deux conditions testées au pas B, (avec une certaine tolérance) sont ;

a) $\sum_{i=1}^{M} \bar{n}_i \stackrel{?}{=} N$

b) $\sum_{i=1}^{M} t_i.p_{ij} \stackrel{?}{=} t_j \qquad j = 1,\ldots,M$

En posant $t'_i = \frac{t_i}{x_i}$, la condition b) s'écrit :

$$\sum_{i=1}^{M} t'_i\, x_i\, p_{ij} \stackrel{?}{=} t'_j\, x_j \qquad j = 1,\ldots,M$$

ce qui revient à tester :

$$t'_1 \stackrel{?}{=} t'_2 \stackrel{?}{=} \ldots \stackrel{?}{=} t'_M$$

On pose $t' = \sum_{i=1}^{M} t'_i/M$

et $I = \{1,2,\ldots,M\}$

Une tolérance ε (e.g : 1 %) étant fixée, on détermine) :

a) pour l'ensemble du réseau :

- une longueur excessive si :

$$\frac{\sum_{i=1}^{M} \bar{n}_i - N}{N} > \varepsilon$$

- une longueur insuffisante si :

$$\frac{N - \sum_{i=1}^{M} \bar{n}_i}{N} > \varepsilon$$

b) les stations ayant :

- un flux excessif :

$$I_{\rho+} = \{i : i \in I, \quad \frac{t'_i - t'}{t'} > \varepsilon\}$$

- un flux insuffisant :

$$I_{\rho-} = \{i : i \in I, \quad \frac{t' - t'_i}{t} > \varepsilon\}$$

S'il n'y a pas d'erreur de longueur et si $I_{\rho+} = I_{\rho-} = \phi$, alors les résultats de la $k^{ième}$ itération sont satisfaisants (fin des itérations)

Sinon le vecteur $\mu^{(k+1)}$ est obtenu à partir de $\mu^{(k)}$ en faisant les modifications déduites du tableau suivant :

	$I_{\rho+} = I_{\rho-} = \emptyset$	$I_{\rho+} \neq \emptyset$, $I_{\rho-} \neq \emptyset$
longueur admissible	fin des itérations	$\mu_i^{(k-1)} = \mu_i^{(k)} \times (\frac{t'_i}{t'})$ Vi $\in$ I
longueur excessive	$\mu_i^{(k+1)} = \mu_i^{(k)} \times \frac{N}{\sum \bar{n}_i}$ Vi $\in$ I	$\mu_i^{(k+1)} = \mu_i^{(k)} \times (\frac{t'_i}{t'})$ Vi $\in I_{\rho-}$
longueur insuffisante		$\mu_i^{(k+1)} = \mu_i^{(k)} \times (\frac{t'_i}{t'})$ Vi $\in I_{\rho+}$

D-2. MODIFICATIONS

La méthode CHW-m possède le même algorithme général que celui de la méthode CHW ; le vecteur $\mu^{(k+1)}$ est toujours obtenu à partir de $\mu^{(k)}$ mais les formules de modifications sont différentes. Ces dernières dépendent de la nature de la loi de service de chaque station.

Afin d'expliciter ces modifications, on considère une suite décroissante $\{\lambda(i)\}_{i=0,\ldots,N}$, telle que $\lambda(N) = 0$, représentant les taux d'entrée d'une station à l'intérieur d'un réseau fermé.

Le flux moyen traversant la station s'écrit par définition :

$$\rho = \sum_{i=0}^{N-1} \lambda(i).P(i)$$

En utilisant la relation (C2-5), on a encore :

$$\rho = \sum_{i=0}^{N-1} \frac{\Omega(i)}{\Gamma(i)} \times \frac{1}{\left[\sum_{i=0} \frac{\Omega(i-1)}{\Gamma(i)}\right]} \qquad (D2\text{-}1)$$

où les fonctions $\Omega(.)$ et $\Gamma(.)$ sont définies par :

$$\begin{cases} \Gamma(0) = 1 \\ \Gamma(j) = \Gamma(j-1).\nu(j) & 0 < j \leq N \end{cases} \qquad (D2\text{-}2)$$

$$\begin{cases} \Omega(-1) = 1 \\ \Omega(j) = \Omega(j-1.\lambda(j) & 0 \leq j \leq N \end{cases} \qquad (D2\text{-}3)$$

Soit deux suites décroissantes $\{\lambda_1(j)\}$ et $\{\lambda_2(j)\}$ telles que :

$$\lambda_2(j) < \lambda_1(j) \qquad 0 \leq j < N$$

Si la station considérée est exponentielle, quel que soit le taux d'entrée, on a toujours :

$$\Gamma_2(j) = \Gamma_1(j) = \left(\frac{1}{u}\right)^j \qquad \text{(D2-4)}$$

Par contre, si la station obéit à une loi d'Erlang, on a :

$$\Gamma_2(j) > \Gamma_1(j) \qquad j > 0 \qquad \text{(D2-5)}$$

On appelle ρ_a le flux moyen d'une station qui conserve la relation (D2-4) (comportement d'une station exponentielle) et ρ_b le flux moyen d'une station de type Erlang qui entraîne (D2-5).

On a, lorsque la station est soumise au flux d'entrée $\lambda_2(i)$:

$$\rho_a = \sum_{i=0}^{N-1} \lambda_2(i) \cdot \frac{\Omega_2(i-1)}{\Gamma_1(i)} \times \frac{1}{\left[\sum_{i=0}^{N} \frac{\Omega_2(i-1)}{\Gamma_1(i)}\right]}$$

$$\text{et } \rho_b = \sum_{i=0}^{N-i} \lambda_2(i) \times \frac{\Omega_2(i-1)}{\Gamma_2(i)} \times \frac{1}{\left[\sum_{i=0}^{N} \frac{\Omega_2(i-1)}{\Gamma_2(i)}\right]}$$

Supposons que la suite $\left\{\frac{\Omega(i-1)}{\Gamma_1(i)}\right\}_{i=0,\ldots,N}$ ait l'allure de la courbe (a) de la figure suivante :

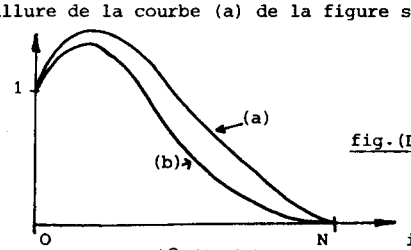


fig. (D2-1)

alors, la suite $\left\{\frac{\Omega_2(i-1)}{\Gamma_2(i)}\right\}_{i=0,\ldots,N}$ a l'allure de la courbe (b).

On en déduit que :

$$\sum_{i=0}^{N} \frac{\Omega_2(i-1)}{\Gamma_2(i)} < \sum_{i=0}^{N} \frac{\Omega_2(i-1)}{\Gamma_1(i)}$$

ou $\qquad P_b(0) > P_a(0)$

Donc, les distributions de probabilités $P_a(i)$ et $P_b(i)$ qui s'écrivent :

$$P_a(i) = \frac{\Omega_2(i-1}{\Gamma_1(i)} \quad P_a(0)$$

$$P_b(i) = \frac{\Omega_2(i-1)}{\Gamma_2(i)} \quad P_b(0)$$

ont les allures suivantes :

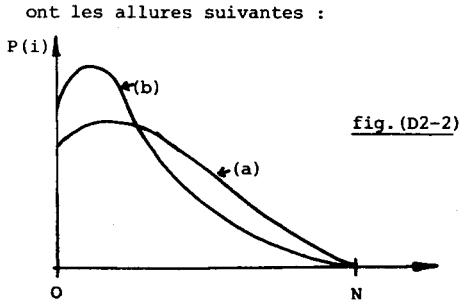


fig. (D2-2)

ce qui implique, compte tenu que $\{\lambda(i)\}_{i=0,\ldots,N}$ est une suite décroissante, que $\rho_b > \rho_a$.

Un raisonnement rigoureusement identique avec une suite $\left\{\frac{\Omega_2(i-1)}{\Gamma_1(i)}\right\}$ monotone décroissante (cf. fig. (D2-1)) conduit à la même conclusion.

On en déduit donc que pour avoir une même variation de flux moyen, il faut diminuer plus fortement le flux d'entrée si la station est de type Erlang que si elle est de type exponentiel.

Considérons maintenant la variation de l'espérance mathématique $\bar{n}$ de la variable aléatoire "nombre de clients dans la station". D'après ce qui précède, on a :

$$\bar{n}_a = \sum_{i=1}^{N} i.\ P_a(i)$$

$$\bar{n}_b = \sum_{i=1}^{N} i.\ P_b(i)$$

Compte-tenu de la figure (D2-2), on a immédiatement :

$$\bar{n}_b < \bar{n}_a$$

La station d'Erlang est donc, vis à vis de $\bar{n}$, plus sensible que la station exponentielle à une variation du flux d'entrée.

Par ailleurs, il faut remarquer que les corrections du vecteur $\mu^{(k+1)}$ n'ont pour conséquence que de modifier la suite $\{\lambda_j(i)\}$ du flux d'entrée conditionnel dans la station j, j=1,...,M.

Le principe de la modification apportée dans la méthode CHW-m consiste donc à corriger le vecteur $\mu^{(k+1)}$ d'après des formules telles que :

$$\frac{\mu_j(k+1)}{\mu_j(k)} = \left(\frac{N}{\sum_j n_j}\right)^Y \quad \text{et} \quad \frac{\mu_j(k+1)}{\mu_j(k)} = \left(\frac{t_j'}{t'}\right)^V$$

avec, pour une loi d'Erlang (k ≥ 2) :

$$V > 1, \quad Y < 1$$

Ainsi, on accentue la correction due à une erreur sur les flux et on diminue celle induite par une erreur de longueur seule.

En l'absence d'une étude plus approfondie, la méthode consiste à prendre :

$$V = \frac{1}{Y}$$

avec :

Y =1 si le carré de variation K^2 (=variance/(moyenne)^2) de la loi de service est égal à 1 (loi exponentielle).

$Y = \frac{1}{2}$ si $K^2 < 1$ (e.g. : loi d'Erlang)

$Y = 2$ si $K^2 > 1$ (e.g. : loi hyperexponentielle).

Pour cette méthode, le tableau de correction du vecteur μ est alors :

	$I_{\rho+} = I_{\rho-} = \emptyset$	$I_{\rho+} \neq \emptyset$, $I_{\rho-} = \emptyset$
longueur admissible	fin des itérations	$\mu_i^{(k+1)} = \mu_i^{(k)} \times (\frac{t'_i}{t'})^{1/y}$ $\forall i \in I$
longueur excessive	$\mu_i^{(k+1)} = \mu_i^{(k)} \times (\frac{N}{\sum_i n_i})^y$ $\forall i \in I$	$\mu_i^{(k+1)} = \mu_i^{(k)} \times (\frac{t'_i}{t'})^{1/y}$ $\forall i \in I_{\rho-}$
longueur insuffisante		$\mu_i^{(k+1)} = \mu_i^{(k)} \times (\frac{t'_i}{t'})^{1/y}$ $\forall i \in I_{\rho+}$

E - METHODE M3

E-1. PRINCIPE

Considérons à nouveau un réseau R et définissons les vecteurs :

$$\lambda = (\lambda_1(0), \lambda_1(1), \ldots, \lambda_1(N), \lambda_2(0), \ldots\ldots, \lambda_M(N))$$

$$\lambda_j = (\lambda_j(0), \lambda_j(1), \ldots, \lambda_j(N))$$

$$V = (\nu_1(0), \nu_1(1), \ldots, \nu_1(N), \nu_2(0), \ldots\ldots, \nu_M(N))$$

$$V_j = (\nu_j(0), \nu_j(1), \ldots, \nu_j(N))$$

qui caractérisent les flux d'entrée et de sortie conditionnels des stations.

La méthode M3 n'utilise pas de réseau $S^{(k)}$ hormis S^o ; on cherche ici à calculer le vecteur $V_{\overline{i}}$ (flux de sortie conditionnel du réseau complémentaire à la station i par rapport à R) directement à l'aide du réseau R. Avec cette approche, on s'interdit l'utilisation d'une propriété très forte des réseaux de type exponentiel S ; à savoir : le flux de sortie conditionnel d'un réseau (ou sous-réseau) exponentiel est indépendant du vecteur d'entrée λ.

Pour le réseau R, on a :

$$V_{\overline{i}} = f(\lambda, V) \qquad i \in I \qquad \text{(E1-1)}$$

Les vecteurs $V_{\overline{i}}$ sont calculés par une formule approchée ; puis on pose :

$$\lambda_i(n_i) = \nu_{\overline{i}}(N-n_i) \qquad n_i = 0, \ldots, N \qquad \text{(E1-2)}$$

Comme on ne connaît pas à priori le vecteur λ, cette méthode procède par itérations successives. L'initialisation se fait en calculant les vecteurs $V_{\overline{i}}$ du réseau S^o.

E-2. RESUME DE L'ALGORITHME

L'algorithme de la méthode peut se résumer ainsi :

INITIALISATION :

i) $k = 0$

ii) calcul de V^o et de $V^o_{\overline{i}}$, $i = 1, \ldots, M$ à l'aide de S^o.

iii) calcul de λ^o à partir de $V^o_{\overline{i}}$ (application de la relation (E1-2).

PAS A :

i) $k = k+1$

ii) calcul de $V_i^{(k)}$ en fonction de $V^{(k-1)}$ et de $\lambda^{(k-1)}$ comme indiqué dans le paragraphe suivant.

iii) calcul de $\lambda^{(k)}$ à partir de $V_i^{(k)}$ (application de la relation (E1-2)).

iv) calcul des probabilités d'état asymptotiques marginales $\tilde{P}_i(n_i)$ $n_i=0,\ldots,N$, $\forall i \in I$ (en utilisant, comme dans les méthodes précédentes, un graphe markovien à états fictifs pour chaque station i).

v) calcul de $V^{(k)}$ (application de la relation (C2-5)).

vi) calcul de t_i' et de $\bar{n}_i$, $\forall i \in I$.

PAS B :

Tester la somme des longueurs moyennes et le flux moyen normalisé de chaque station du réseau R.

Si le test est positif : fin des itérations ; sinon, aller en A.

E-3. CALCUL APPROCHE DE $V_i^{(k)}$.

On introduit :

- le vecteur $e = (n_1,\ldots,n_M)$; ce vecteur représente donc un état du réseau R défini par $\mathcal{H}_N$.

- et $p(e) = p(n_1,n_2,\ldots,n_M)$, la probabilité de l'état e.

On écrit que le flux de sortie du réseau complémentaire à la station i, lorsque le réseau R est dans l'état e, est égal à :

$$\rho_{\bar{i}}(e) = \sum_{j \in \{I \setminus i\}} \nu_j(n_j).p_{ji}$$

On a donc :

$$\nu_{\bar{i}}(N-\ell) = \frac{\sum_{\substack{e \in \mathcal{H}_N \\ \text{et } n_i=\ell}} {}^{i}(e).p(e)}{\sum_{\substack{e \in \mathcal{H}_N \\ \text{et } n_i=\ell}}}, \quad \ell = 0,1,\ldots,N$$

Pour un tel réseau R, on ne connaît généralement pas la probabilité $p(e)=p(n_1,\ldots,n_M)$. On fait l'approximation suivante :

$$p(e) = \frac{\tilde{P}_1(n_1).\tilde{P}_2(n_2)\ldots\tilde{P}_M(n_M)}{\sum_{N} (\tilde{P}_1(n_1).\tilde{P}_2(n_2)\ldots\tilde{P}_M(n_M))}$$

Bien que l'énoncé d'une telle affirmation ne soit pas formellement permis, même pour un réseau de type exponentiel, les expériences réalisées conduisent à penser que cette approximation est raisonnable.

Compte-tenu de la relation (C2-5), on a :

$$\tilde{P}_j^{(k)}(n_j) = \frac{\prod_{\ell=1}^{\ell=n_j-1} \lambda_j^{(k-1)}(\ell)}{\prod_{\ell=1}^{\ell=n_j} \nu_j^{(k-1)}(\ell)} \times \tilde{P}_i(0), \quad n_j=0,1,\ldots,N$$

On peut donc calculer les valeurs $\nu_{\bar{i}}^{(k)}(N-n_i)$; l'algorithme de ce calcul est le suivant :

a) les fonctions $\Gamma(.)$ et $\Omega(.)$ étant définies en (D2-2) et (D2-3), calcul de la fonction $B^{\bar{i}}(j)$, $j=0,\ldots,N$, (relative au sous-réseau $R_{\bar{i}}$ complémentaire de la station i par rapport à R) telle que :

$$B^{\bar{i}}(j) = \sum_{\substack{e \in \mathcal{H}_N \\ \text{et } n_i=N-j}} \left(\prod_{\substack{u=1 \\ u \neq i}}^{M} \frac{\Omega_u(n_u-1)}{\Gamma_u(n_u)} \right)$$

Cette fonction s'obtient en définissant une fonction auxiliaire $b_{v_k}(j)$ de la façon suivante :

$$\begin{cases} \{v_1,v_2,\ldots,v_{M-1}\} = \{1,\ldots,i-1,i+1,\ldots,M\} \\ b_{v_{M-1}}(j) = \dfrac{\Omega_{v_{M-k}}(u-1)}{\Gamma_{v_{M-1}}(j)} \\ b_{v_{M-k}}(j) = \sum_{u=0}^{j} \dfrac{\Omega_{v_{M-k}}(u-1)}{\Gamma_{v_{M-k}}(u)} \times b_{v_{M-k+1}}(j-u) \end{cases}$$

pour $k=2,\ldots,M-1$

On a alors : $B^{\bar{i}}(j) = b_{v_1}(j)$

b) calcul des fonctions $d_{v_k}^{\bar{i}}(j)$, $j=0,\ldots,N$, $k=1,\ldots,M-1$, telles que :

$$D_{v_k}^{\bar{i}}(j) = \begin{cases} \sum_{u=0}^{j} p_{v_k i} \dfrac{\Omega_{v_k}(u-1)}{\Gamma_{v_k}(u-1)} \times b_{v_{k+1}}(i-u) & \text{si } p_{v_k i} \neq 0 \\ 0 \text{ si } p_{v_k i} = 0 \end{cases}$$

avec $D_{v_k}^{\bar{i}}(0) = 0$, $D_{v_{M-1}}^{\bar{i}}(j) = p_{v_{M-1}1} \times \dfrac{\Omega_{v_{M-1}}(j-1)}{\Gamma_{v_{M-1}}(j-1)}$

c) calcul de la fonction $T^{\bar{i}}(j)$, $j = 0,\ldots,N$ telle que :

$$T^{\bar{i}}(j) = t_{v_1}(j)$$

où $t_{v_1}(j)$ est une fonction auxiliaire obtenue de la façon suivante :

$$\begin{cases} t_{v_a}(j) = \bar{D}^{i}_{v_a}(j) \quad \text{où} \quad a = \max\{v_k : p_{v_k i} \neq 0\} \\ t_{v_k}(j) = \bar{D}^{i}_{v_k}(j) + \sum_{u=0}^{j} \frac{\Omega_{v_k}(u-1)}{\Gamma_{v_k}(u)} \times t_{v_{k+1}}(j-u) \end{cases}$$

$$v_k = 1, \ldots, v_{a-1}$$

d) calcul de $\nu_i^{(k)}(N-n_i)$ tel que :

$$\nu_i^{(k)}(N-n_i) = \frac{\bar{T}^{i}(N-n_i)}{\bar{B}^{i}(N-n_i)}$$

F - METHODE M4

F-1. PRINCIPE DE LA METHODE

Soit Q un réseau de type exponentiel canoniquement associé à R mais différent de S par les flux de sortie $\mu_i(n_j)$. Rappelons que le réseau S est tel que pour chaque station :

$$\begin{cases} A_j(0) = 1 \\ A_j(n_j) = A_j(n_j-1) \times (r \wedge n_j) \end{cases} \quad \text{si la station j de R a r serveurs}$$

(si r > 1, cette station ne peut être que de type M).

La seule différence entre $S^{(k)}$ et $S^{(k+1)}$ provient de la différence entre les vecteurs $\mu^{(k)}$ et $\mu^{(k+1)}$.

Pour le réseau $Q^{(k)}$, la fonction $A_j(n_j)$ est définie de la façon suivante :

$$\begin{cases} A_j(0) = 1 \\ A_j(n_j) = A_j(n_j-1) \times \frac{\nu_j^{(k)}(n_j)}{\mu_j^{(k)}} \end{cases}$$

La relation (B3-1) permettant de calculer directement le vecteur $V^{(k)}$ en fonction du vecteur $\lambda^{(k-1)}$, on peut calculer les vecteurs $V_i^{(k)}$ à l'aide du réseau $Q^{(k)}$.

Par ailleurs, les probabilités d'état marginales $\tilde{P}_i(n_i)$ du réseau R sont calculées directement grâce à la relation (C2-5) et en posant :

$$\sum_{n_i=0}^{N} \tilde{P}_i(n_i) = 1 \qquad \text{(F1-1)}$$

Les tests effectués et les corrections du vecteur $\mu^{(k)}$ sont identiques à ceux de la méthode CHW-m.

Remarque F1 : C'est l'utilisation de la relation (B3-1) qui restreint cette méthode aux réseaux de type Erlang k ($k \geq 1$). Il serait possible de donner un caractère polyvalent à cette méthode en rendant optionnelle l'utilisation de la relation (B3-1) ; la méthode du "graphe markovien" (bien plus longue), restant applicable pour obtenir les probabilités marginales $\tilde{P}_i(n_i)$.

F-2. RESUME DE L'ALGORITHME

INITIALISATION :

i) k = 0

ii) initialisation $\mu^{(0)}=\mu^{(1)}=(\bar{u}_1^{-1}, \bar{u}_2^{-2},\ldots,\bar{u}_M^{-1})$

iii) calcul de $V_i^{(0)}$ à l'aide de $S^{(0)}$

iv) calcul de $\lambda^{(0)}$ à partir de $V_i^{(0)}$ (application de la relation (E1-2).

PAS A :

i) k = k+1

ii) calcul de $V^{(k)}$ à partir de $\lambda^{(k-1)}$ (application de la relation (B3-1)).

iii) calcul de $V_i^{(k)}$ dans $Q^{(k)}$.

iv) calcul de $\lambda^{(k)}$ à partir de $V_i^{(k)}$ (application de la relation (E1-2)

v) calcul des probabilités d'état marginales $\tilde{P}_i(n_i)$ (application des relations (C et (F1-1)).

vi) calcul de t_i' et de $\bar{n}_i$ $\forall i \in I$

PAS B :

Test identique à celui des méthodes précédentes.

PAS C :

i) construction du vecteur $\mu^{(k+1)}$ de façon identique à la méthode CHW-m.

ii) aller en A.

Le principe de cette méthode est voisin de celui de la méthode M3. Il en diffère uniquement dans le calcul $V_i^{(k)}$ en fonction de $V^{(k-1)}$ et de $\lambda^{(k-1)}$. Ici, on fait une nouvelle hypothèse sur l'expression des probabilités d'état asymptotiques ; on suppose que :

$$p(e) = \frac{\prod_{i=1}^{M} \left(\frac{x_i^{n_i}}{\Gamma_i(n_i)}\right)}{\sum_{e \in \mathcal{E}_N} \left(\prod_{i=1}^{M} \left(\frac{x_i^{n_i}}{\Gamma_i(n_i)}\right)\right)}$$

où $\Gamma_i(.)$, définie pour toute station de type K, s'écrit (comme en D2-2) :

$$\begin{cases} \Gamma_i(0) = 1 \\ \Gamma_i(j) = \Gamma_i(j-1).\nu_j(j) \end{cases}$$

Selon cette hypothèse, on considère qu'un réseau non exponentiel conforme à la définition du §A obéit, en système asymptotique, à une "formule du produit" généralisée. Cela revient à considérer que pour un vecteur d'entrée λ_j et station de type K donnés, il existe un processus asymptotiquement markovien définissant le vecteur de sortie V_j.

Le résumé de l'algorithme est donc identique à celui de la méthode M3(§E-2) sauf en ce qui concerne le calcul de $V_i^{(k)}$ (Pas A, ii)) ; l'algorithme de ce calcul étant le suivant :

a) calcul de la fonction $\bar{\beta}^i(j)$ $j=0,\ldots,N$, telle que

$$\bar{\beta}^i(j) = \sum_{\substack{e \in \mathcal{E}_N \\ \text{et } n_i=N-j}} \left(\prod_{\substack{u=1 \\ u\neq i}}^{M} \frac{x_u}{\Gamma_u(n_u)}\right)$$

cette fonction s'obtient en définissant une fonction auxiliaire $b_{v_k}(j)$ de la façon suivante :

$$\begin{cases} \{v_1, v_2, \ldots, v_{M-1}\} = \{1,\ldots,i-1,i+1,\ldots,M\} \\ b_{v_{M-1}}(j) = \frac{\Omega_{v_{M-1}}(j-1)}{\Gamma_{v_{M-1}}(j)} \\ b_{v_{M-k}}(j) = \sum_{u=0}^{j} \frac{\Omega_{v_{M-k}}(u-1)}{\Gamma_{v_{M-k}}(u)} \times b_{v_{M-k+1}}(j-u) \\ \qquad \text{pour } k=2,\ldots,M-1 \end{cases}$$

On a alors $\bar{\beta}^i(j) = b_{v_1}(j)$

b) calcul de $\nu_i^{(k)}(N-n_i)$ tel que :

$$\nu_i^{(k)} = x_i(1-p_{ii}) \times \frac{\bar{\beta}^i(N-n_i-1)}{\bar{\beta}^i(N-n_i)}$$

H - EXEMPLES NUMERIQUES

Certains exemples numériques présentés dans ce paragraphe ont été réalisés par Claire BIGUEREAU et Bruno GARAGNON dans le cadre de [BIU-76].

H-1. VITESSE DE CONVERGENCE

H11. Comparaison de CHW avec CHW-m :

Ces deux méthodes convergent pratiquement vers les mêmes valeurs ; par contre, la vitesse de convergence est différente.

Dans tous les cas étudiés, on a constaté une diminution du nombre d'itérations nécessaires. La méthode CHW-m augmente le "gain" de la boucle de correction relative aux erreurs de longueur de file ; ce qui a aussi supprimé les oscillations qui se constataient pour la méthode CHW au niveau de la variable "longueur de file".

Un exemple de la différence d'évolution de cette variable est donné planche V.

H12. Vitesse de convergence de M3

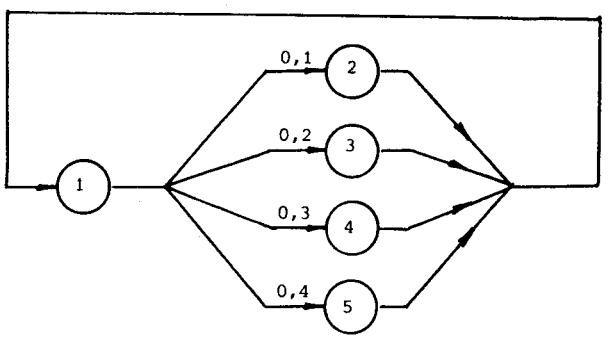
Du point de vue du nombre d'itérations, cette méthode donne des résultats voisins de la méthode CHW. On constate les tendances suivantes :

- pour un réseau R dont les stations sont voisines de stations de type M (i.e. écart-type de la loi voisin de la moyenne), la méthode CHW est plus rapide que la méthode M3.
- pour un réseau R dont les stations sont éloignées de stations de type M (i.e. écart-type de la loi éloigné de la moyenne), la méthode M3 est plus rapide que la méthode CHW.

H13. Vitesse de convergence de M4

D'une façon générale, la méthode spécifique M4 converge plus vite que les méthodes CHW et CHW-m. La différence est d'autant plus importante que l'ordre k des lois d'Erlang est élevé (donc qu'on "s'éloigne" du cas exponentiel).

Par exemple, soit le réseau dit "à serveur central" :



comportant 4 clients et 5 stations identiques. Le nombre d'itérations en fonction de l'ordre k des lois d'Erlang a été le suivant :

méthode \ k	2	6	10
CHW-m	3	4	5
M4	1	1	1

$\varepsilon = 1\%$

Pour cette méthode M4, les calculs des flux de sortie du réseau complémentaire sont plus compliqués puisque les fonctions $A_i(n_i)$ sont établies à l'aide de la relation (B3-1). Mais cet inconvénient est compensé par le fait que, dans cette méthode, on n'utilise pas les graphes à états fictifs pour calculer les probabilités marginales.

H14. Vitesse de convergence de M5

Dans tous les cas étudiés, le nombre d'itérations de M5 a été inférieur ou égal à celui des autres méthodes. Par ailleurs, il semble que cette méthode permette de prendre des valeurs de tolérance ε plus faibles. Ainsi, pour un réseau type serveur central (5 stations Erlang d'ordre 10), en prenant $\varepsilon = 10^{-3}$, on constate qu'aucune des quatre premières méthodes n'a convergé au bout de 20 itérations, alors que la méthode M5 converge en 3 itérations.

H-2. PRECISION DES RESULTATS

D'une façon générale, en comparant les résultats des quatre premières méthodes aux résultats de la simulation, on a pu constater :

a) des résultats pratiquement identiques pour les méthodes CHW et CHW-m.

b) des résultats plus proches de ceux de la simulation pour la méthode M4, (lorsqu'elle

était applicable).

c) des résultats de M3 qui n'étaient bons (relativement) que pour des réseaux "éloignés" des réseaux exponentiels ; la précison augmentant avec le nombre de clients.

La planche VI donne les résultats des quatre premières méthodes (pour un réseau type serveur central dont les stations possèdent des lois d'Erlang k) comparativement aux résultats de simulation, lorsqu'on fait varier l'ordre k des lois de service.

Quant à la méthode M5, l'utilisation du programme de résolution des systèmes markoviens MARCA ([STT-76]) a permis de vérifier que cette méthode donne des résultats exacts pour des réseaux type "serveur central" lorsque ce serveur central suit une loi exponentielle.

La planche VII illustre les résultats obtenus sur le taux d'occupation d'une station dans le cas d'un réseau simple formé de deux stations successivement : Exponentielle et Hyperexponentielle d'ordre 2 (fig. a), Erlang-10 et Hyperexponentielle-2 (fig. b), Erlang-10 et Exponentielle (fig. c). Ce qui a permis de comparer les résultats des méthodes CHW, CHW-m, M3 et M5 au résultat exact. Pour la station Hyperexponentielle, le coefficient de variation, qui se définit par :

$$K^2 = \text{variance}/(\text{moyenne})^2$$

a la valeur 10.

REFERENCES

[BAT-75] BASKETT F.,CHANDY K.M.,MUNTZ R.R., PALACIOS F.G.
Open, Closed, and Mixed Networks of Queues with Different Classes of Customers.
(J.ACM. Vol 22, n°2, April 1975, pp. 248-260).

[BIU-76] BIGUEREAU C., GARAGNON B.
Approximation de Réseaux de Files d'attentes.
(Projet de 5ème année informatique. INSA de RENNES - 1975-76).

[CHY-75a] CHANDY K.M., HERZOG U., WOO L.
Parametric Analysis of Queuing Networks.
(IBM J. Res. Develop. - Jan.75 - pp. 36-42).

[CHY 75-b] CHANDY K.M., HERZOG U., WOO L.
Approximate Analysis of General Queuing Networks.
(IBM J. Res. Develop. - Jan.75 - pp. 43-49)

[COX-55] COX D.R.
A Use of Complex Probabilities in the Theory of Stochastic Processes.
(Proc. Cam. Phil. Soc., 51 (1955) - pp. 313-319).

[GON-67] GORDON W.J., NEWEL G.F.
Closed Queuing Systems with exponentials servers.
(Oper. Res. 15.2 (1967), 254-265).

[JAN-63] JACKSON J.R.
Job-Shop like queuing systems.
(Management Science, Vol.10, Oct. 1963, pp. 131-142)

[KEL-51] KENDALL D.G.
Some problems in the theory of queues.
(J. Roy. Stat. Soc., B13, n°2, pp. 151-173 - (1951)

[MAE-75] MARIE R.
Sur les réseaux de files d'attente fermés à services exponentiels.
(Séminaires de probabilités RENNES 1975 - rapport IRISA n°33 - pp. 5 à 23 pp. 5 à 23 - RENNES)

[STT-76] STEWART W.J.
Marca : Markov Chain Analyser.
(Rapport IRISA. Publication interne n°45 - RENNES - Juin 1976).

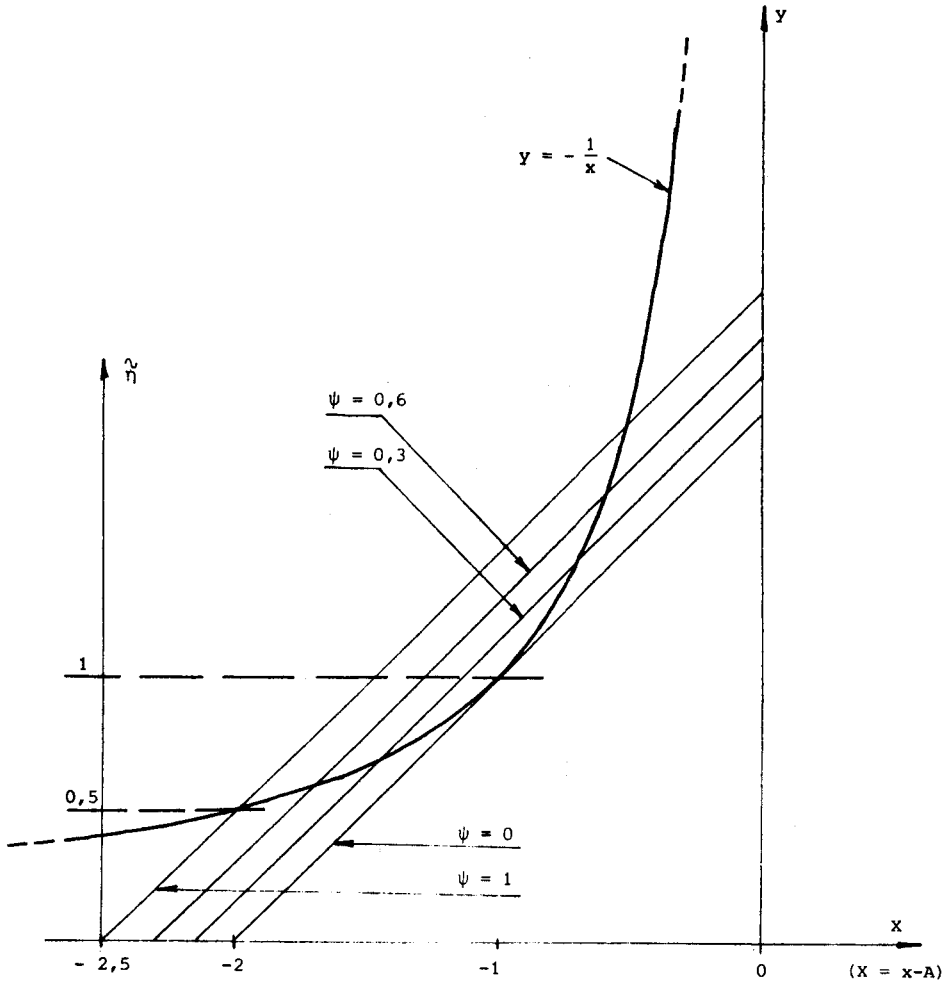


PLANCHE II

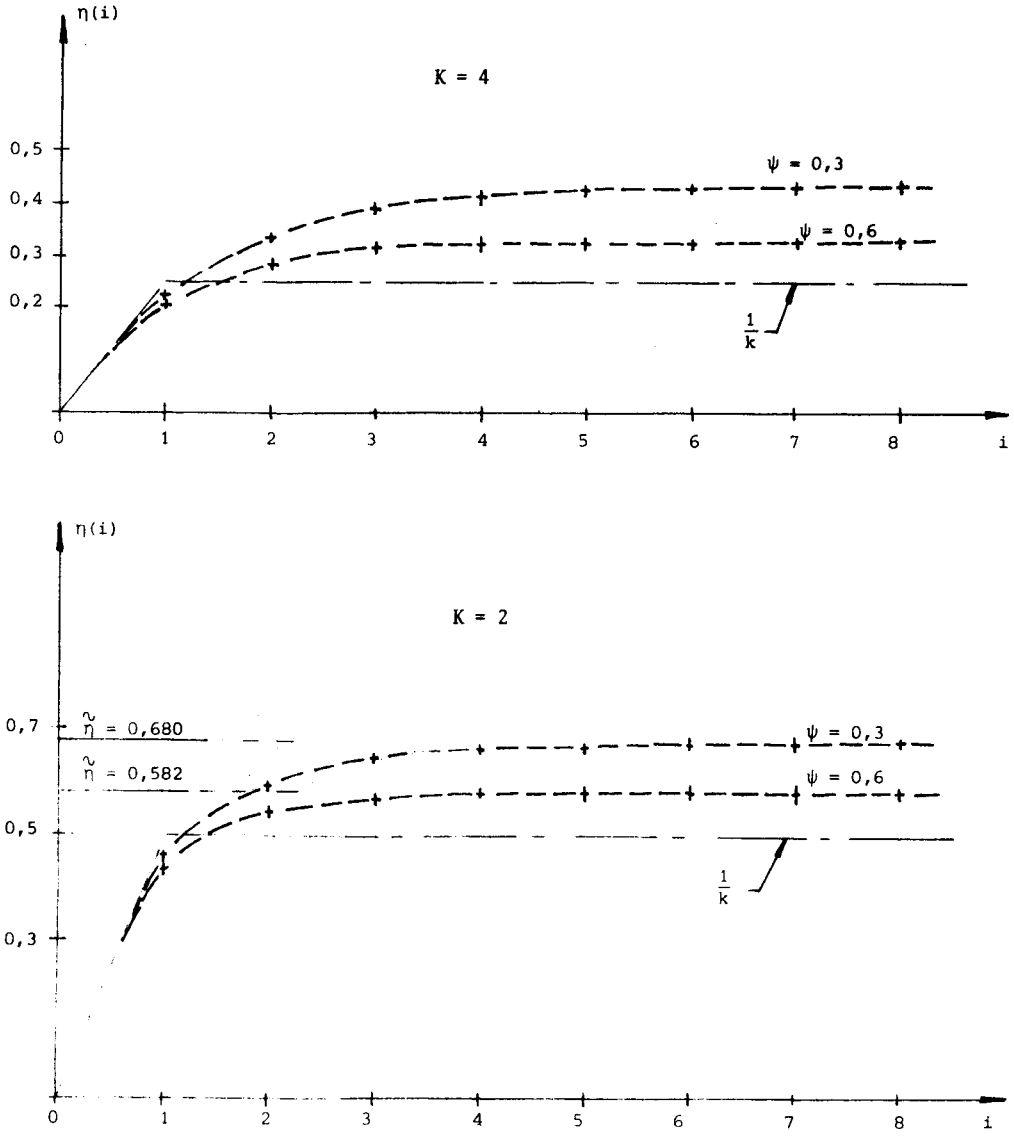


PLANCHE I

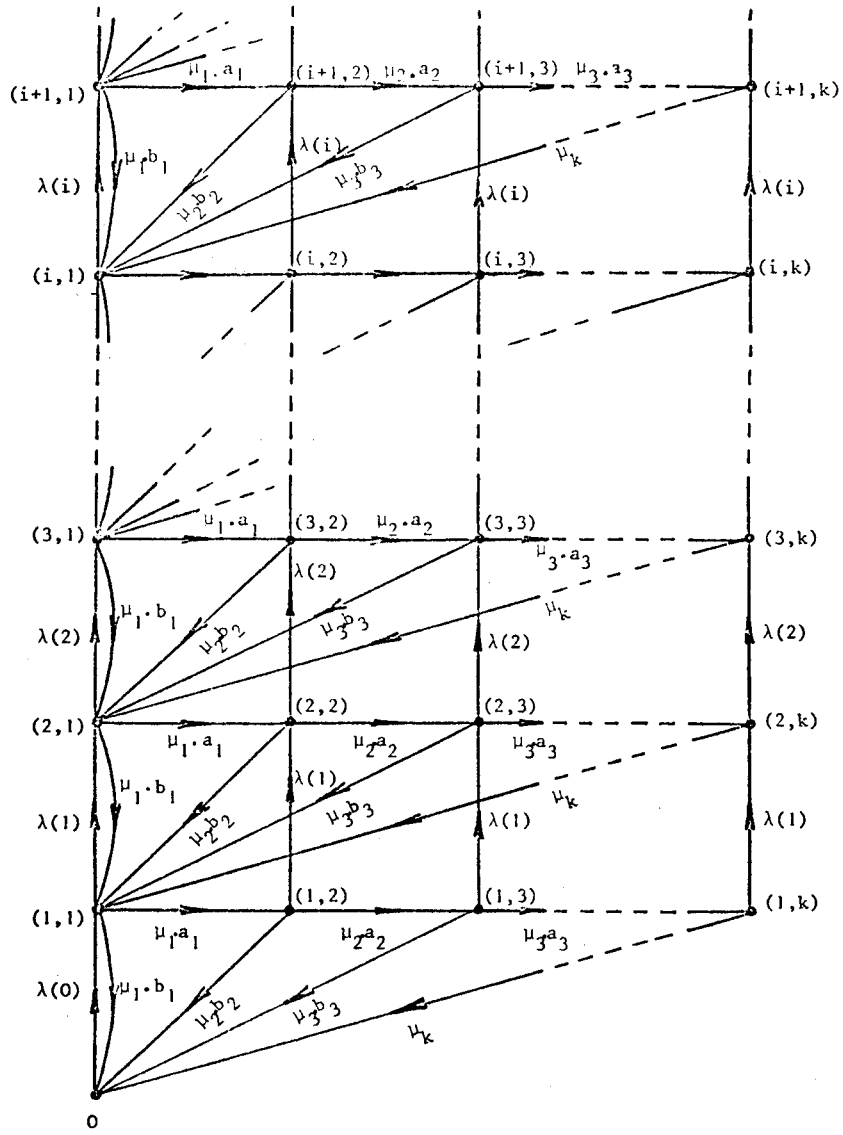


PLANCHE **IV**

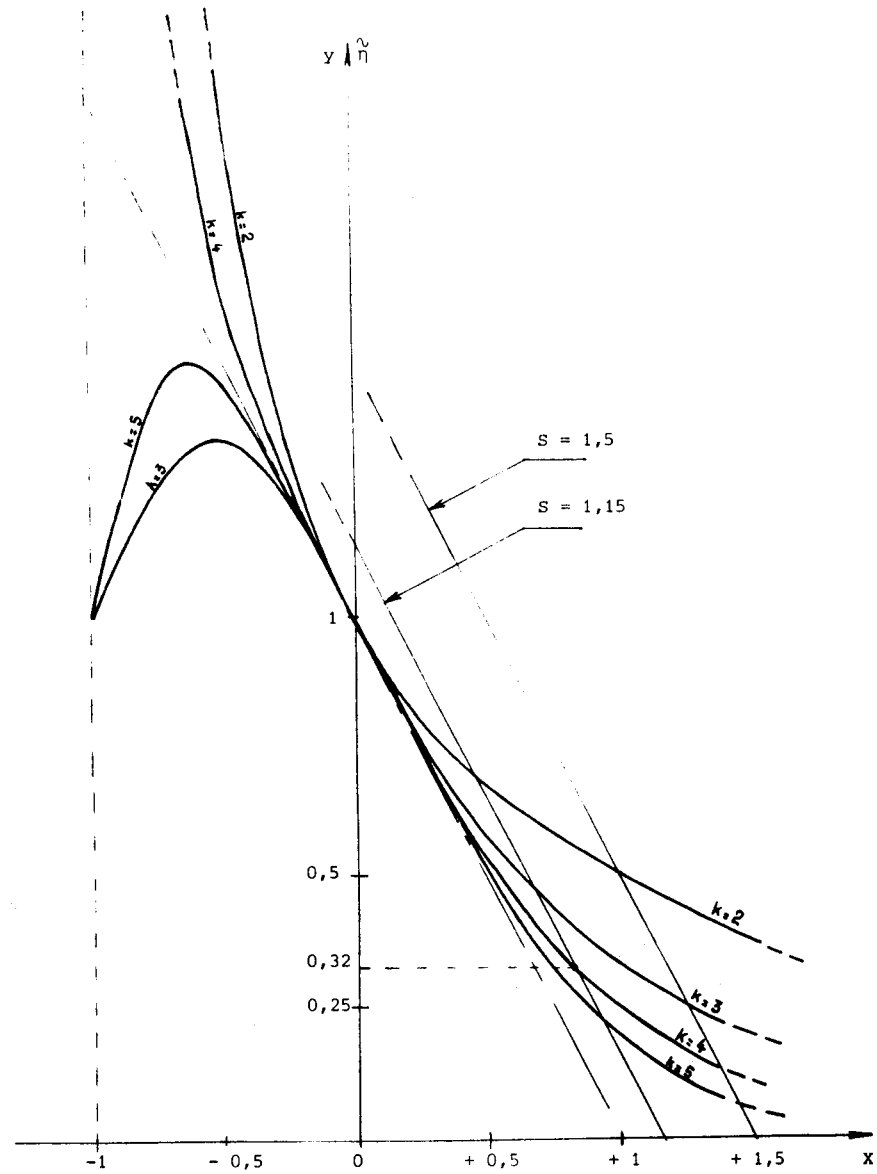


PLANCHE **III**

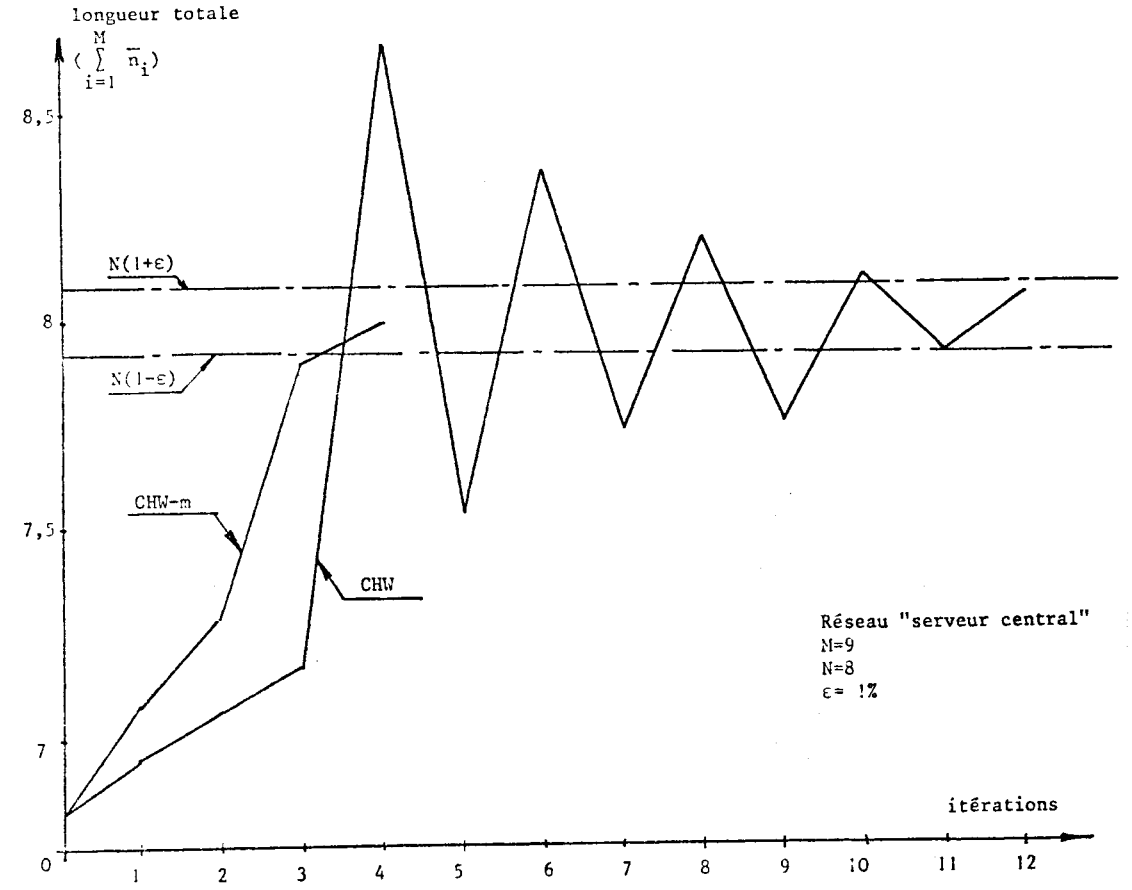


PLANCHE V

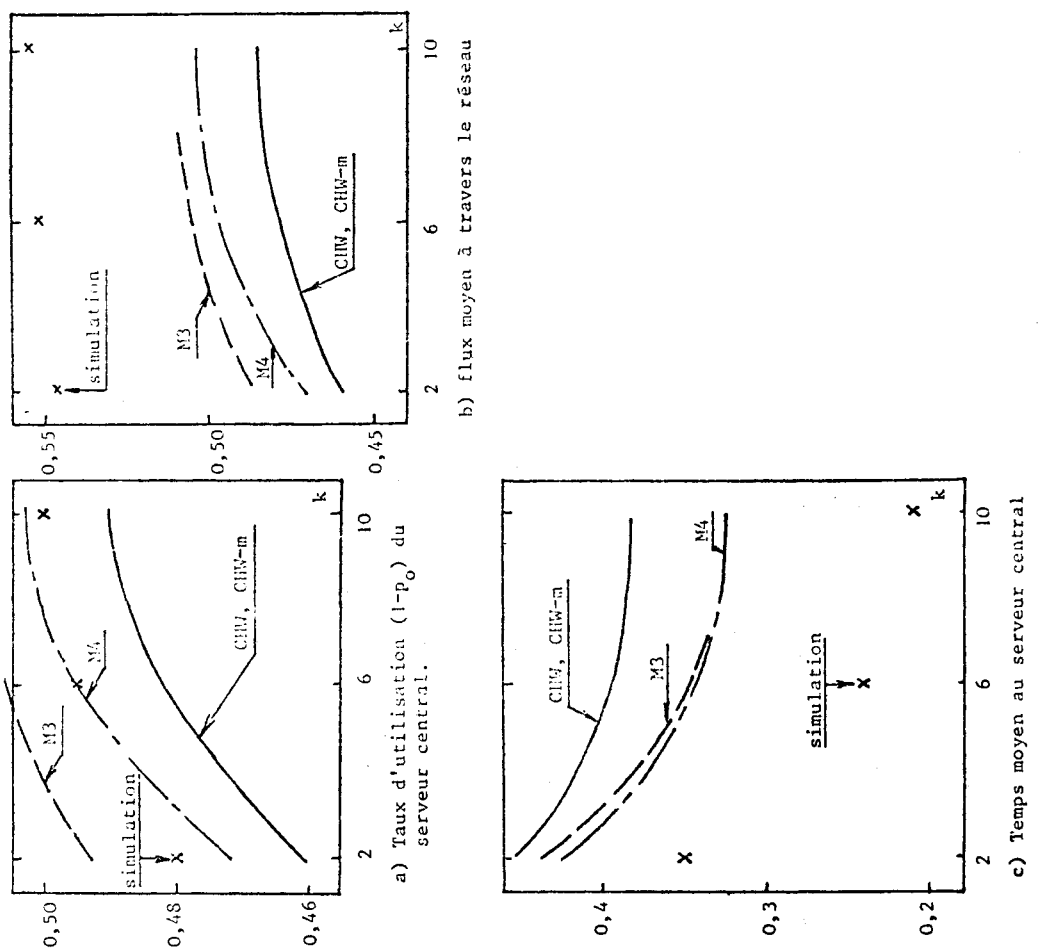


PLANCHE VI

figures / paramètres	a	b	c
Type loi 1	M	E_{10}	E_{10}
Type loi 2	H_2	M	H_2
Moyenne $\bar{u}_1$	1	1	1
Moyenne $\bar{u}_2$	0,8	0,8	0,8
Coeff. K^2 loi 1	1	0,1	0,1
Coeff. K^2 loi 2	10	1	10

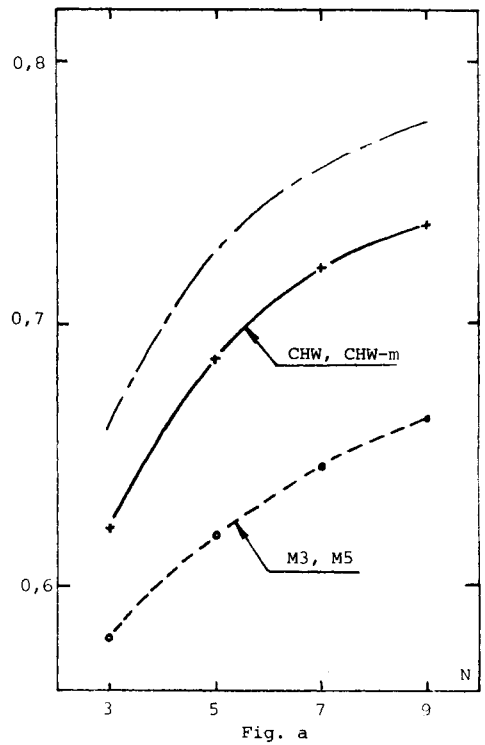


Fig. a

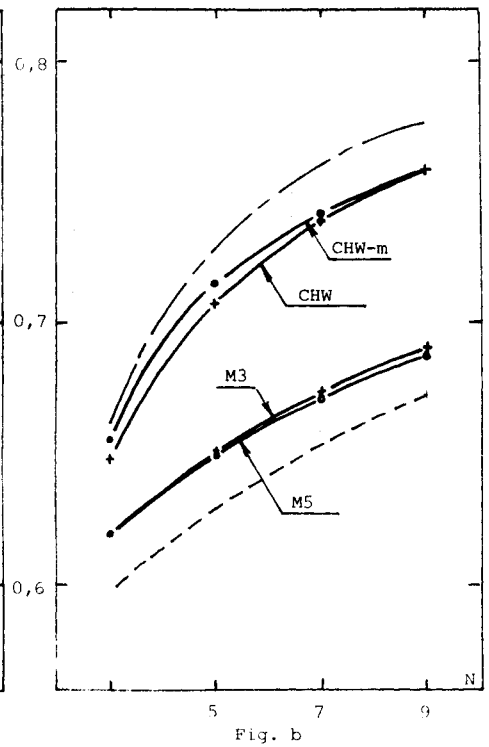


Fig. b

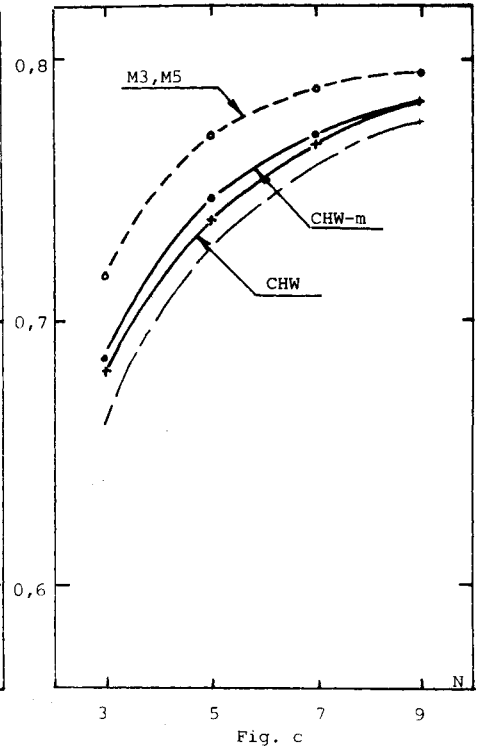
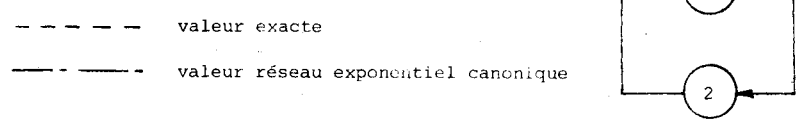


Fig. c



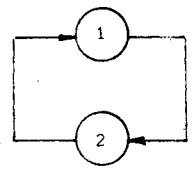


PLANCHE **VII**