

RAYMOND MARIE

**Réseaux de files d'attente à services exponentiels ; approximations  
relatives au calcul des probabilités d'état marginales**

*Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes*, 1976, fascicule 3

« Séminaire de probabilité II », , exp. n° 5, p. 1-19

[http://www.numdam.org/item?id=PSMIR\\_1976\\_\\_3\\_A5\\_0](http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1976__3_A5_0)

© Département de mathématiques et informatique, université de Rennes, 1976, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications mathématiques et informatiques de Rennes » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

RESEAUX DE FILES D'ATTENTE  
A SERVICES EXPONENTIELS ; APPROXIMATIONS RELATIVES  
AU CALCUL DES PROBABILITES D'ETAT MARGINALES.

par Raymond MARIE

A - INTRODUCTION

Soit R un réseau de files d'attente à services exponentiels tel que :

a) la matrice de passage  $\mathcal{P} = (p_{ij})$  ne dépend pas de l'état du réseau ; i.e. : la probabilité  $p_{ij}$  d'aller dans la station j en quittant la station i est indépendante de l'état du réseau.

b) la station i,  $i = 1, 2, \dots, M$  possède  $s_i$  guichets ;  $\mu_i(n_i)$  représente le taux de sortie de la station i lorsqu'il y a  $n_i$  clients dans cette station. Lorsque le temps de service de chaque guichet de la station sera indépendant de  $n_i$ , on aura :  $\mu_i(n_i) = (s_i \wedge n_i) \cdot \mu_i$  où  $\mu_i$  est le taux de service de chaque guichet de la station i.

c) la discipline d'attente est "premier arrivé, premier servi" (FIFO).

Pour un tel réseau, l'expression des distributions asymptotiques des états du système est connue exactement ([GON-67], [JAN-63]). De plus, des algorithmes permettent des calculs relativement rapides de la constante de normalisation (pour les réseaux fermés) et des probabilités marginales ([BUN-73], [MAE-75]).

Néanmoins, les méthodes approchées réduisant les temps de calcul conservent un intérêt, par exemple :

a) si les valeurs de N (nombre de clients) et de M (nombre de stations) sont relativement importantes. (voir au § C-3, le sens donné à N dans le cas d'un réseau ouvert).

b) ou si les calculs exécutés s'inscrivent dans un problème d'optimisation : certaines expressions, telles les probabilités d'état marginales étant utilisées dans une fonction d'objectif et devant être calculées pour différentes valeurs des variables de décision (telles que : le nombre de guichets  $s_i$ , le taux de service  $\mu_i \dots$ )

Par ailleurs, en régime transitoire, les méthodes exactes permettant d'obtenir les probabilités marginales  $p_i(n_i, t)$  sont inutilisables (eu égard au temps de calcul et à la taille mémoire actuellement nécessaires) pour des réseaux relativement modestes (ex :  $M = 5$ ,  $N = 40$ ).

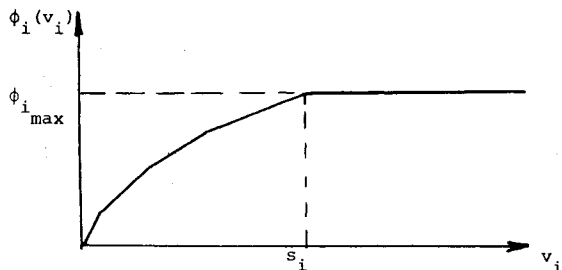
Le but principal de cette note est donc de fournir certaines méthodes de calcul approché pour l'étude du régime asymptotique, lorsque N et M sont relativement grands. On donne aussi une approximation du régime transitoire.

Le paragraphe B contient la description d'un modèle que nous appelons à "flux déterministe". C'est ce type de modélisation qui servira de base aux approximations présentées dans le paragraphe C. Le paragraphe D est réservé à la présentation d'exemples numériques.

## B - ETUDE DU MODELE dit à "FLUX DETERMINISTE"

### B-1. PRESENTATION DU MODELE

Soit un modèle dynamique composé de  $M$  blocs. Le système est défini par  $M$  variables d'état continues  $v_1, v_2, \dots, v_M$ . De chaque bloc  $i$  sort un flux  $\phi_i(v_i)$ ; le flux de sortie est une fonction déterministe continue ayant l'allure suivante :



On précisera ci-après (en B-2) deux types (1 et 2) de fonction  $\phi_i(v_i)$ .

Le flux sortant du bloc  $i$  entre dans le bloc  $j$  dans la proportion  $b_{ij}$ .

Par définition, le système est dit "fermé"

si :

$$\sum_{j=1}^M b_{ij} = 1 \quad i=1, \dots, M$$

ce qui implique :

$$\sum_{i=1}^M v_i = V = C^{ste}$$

**Remarque B1 :** Pour mieux appréhender le modèle, on peut considérer que chaque bloc est un réservoir contenant un certain volume  $v_i$  d'où sort un certain débit  $\phi_i(v_i)$ ; chaque réservoir débitant dans les différents réservoirs selon les coefficients  $b_{ij}$ . Sous les hypothèses (B1-1), le système évolue en circuit fermé et le volume total reste égal à  $V$  au cours du temps.

On peut étudier un système dit "ouvert" en introduisant, d'une part, une source extérieure fournissant un flux  $\phi_0(t)$  et, d'autre part, la possibilité de quitter le système par l'intermédiaire de coefficients  $b_{i0}$ ,  $i=1, \dots, M$ . On a alors :

$$\sum_{j=0}^M b_{ij} = 1, \quad i = 0, 1, \dots, M.$$

Le système fermé est donc un cas particulier du système ouvert pour  $\phi_0(t)=0$ ,  $b_{i0}=0 \quad \forall i$ .

Le système ainsi défini est un système linéaire par étapes, régi par le système différentiel :

$$\begin{cases} \dot{v}_i = \sum_{j=1}^M b_{ji} \phi_j(v_j) - \phi_i(v_i) + b_{0i} \phi_0 \\ \vdots \\ \dot{v}_M = \sum_{j=1}^M b_{jM} \phi_j(v_j) - \phi_M(v_M) + b_{0M} \phi_0 \end{cases} \quad (B1-2)$$

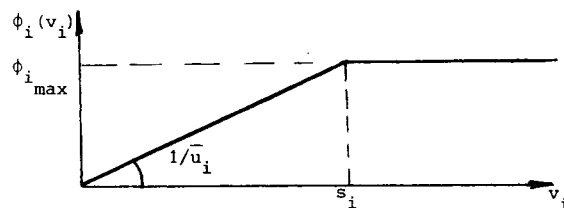
avec les conditions initiales  $v^0 = (v_1^0, v_2^0, \dots, v_M^0)$  et pour une fonction  $\phi_0 = \phi_0(t)$  donnée.

### B-2. DEFINITION DES FONCTIONS FLUX DE SORTIE

#### TYPE 1 ET TYPE 2.

#### B21. Définition du type 1

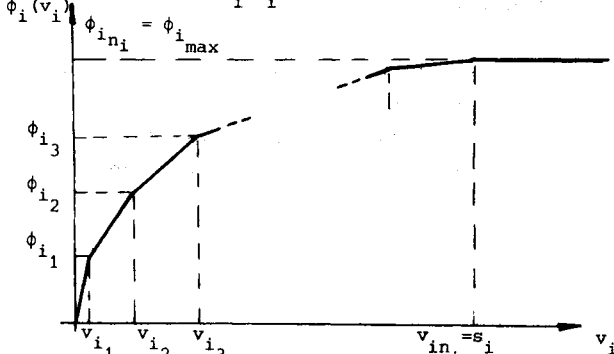
La fonction  $\phi_i(v_i)$  a l'allure suivante :



Ici, le flux de sortie est proportionnel à  $v_i$  jusqu'à la valeur de saturation  $s_i$ . La fonction  $\phi_i(v_i)$  de type 1, peut donc être définie par le couple  $(s_i, \bar{u}_i)$  ou le couple  $(s_i, \phi_{i_{max}})$ .

#### B22. Définition du type 2

La fonction  $\phi_i(v_i)$  a l'allure suivante :



La fonction, affine par morceaux, est définie par la suite finie :

$$\mathcal{Y}_i = \{v_{ik}, \phi_{ik}\}_{k=1, \dots, n_i}$$

On posera, par définition :

$$\bar{u}_i = \frac{s_i}{\phi_{i_{max}}}$$

Le type 1 est évidemment un cas particulier du type 2.

### B-3. RÉGIME TRANSITOIRE

La résolution mathématique du système différentiel (B1-2) permet d'obtenir la réponse transitoire des variables  $v_1, v_2, \dots, v_M$ . Un exemple numérique est donné planche I. Dans cet exemple, les fonctions de flux sont du type 1 et le système est fermé. Le programme de résolution numérique utilise une méthode multipas (prédicteur d'Adams-Moulton et correcteur d'Adams-Bashforth) initialisée par une méthode à un pas.

### B-4. RÉGIME PERMANENT

La méthode utilisée ci-dessus permet d'obtenir la réponse asymptotique du système ; mais, lorsqu'on ne s'intéresse pas à la réponse transitoire, il est préférable d'utiliser une méthode plus simple pour obtenir le régime d'équilibre.

On va développer la méthode d'abord dans le cas d'un système fermé puis ensuite dans le cas d'un système ouvert.

#### B41. Système fermé

Pour une valeur donnée  $V = \sum_{i=1}^M v_i$ , il existera en général un état d'équilibre (donc une valeur de  $v_i$ ,  $i=1, \dots, M$ ) correspondant au régime permanent. Sous réserve que la valeur asymptotique  $v_i$  ne dépende que de  $V$ , le problème est donc de trouver  $v_i(V)$ ,  $i=1, \dots, M$ .

Dans ce but, introduisons la matrice ligne  $X = (x_1, \dots, x_M)$ , à coefficients positifs, telle que  $\sum_{i=1}^M x_i = 1$ , et solution de l'équation matricielle  $XB = X$  ; où  $B = (b_{ij})$ ,  $i, j = 1, \dots, M$ .

Remarque B41. Au paragraphe C, la matrice  $B$  du modèle à flux déterministe sera la même que la matrice  $\Phi$  du réseau de files d'attente. Le but étant d'utiliser le modèle à flux déterministe pour approcher le comportement d'un réseau de files d'attente markovien ergodique, la solution  $X$  sera toujours unique pour les matrices  $B$  considérées.

Soit  $I = \{1, 2, \dots, M\}$  l'ensemble des indices des blocs du système.

A l'équilibre, on a toujours :

$$\phi_i = \sum_{j \in I} \phi_j b_{ji} \quad \forall i \in I$$

Il existe donc  $q$  tel que :

$$\phi_i = q x_i \quad \forall i \in I \quad (B4-1)$$

#### B411. Définition et proposition

Définition : En régime permanent, le bloc  $i$  est dit "saturé" si  $v_i(V) > s_i$

Proposition : Dans un système fermé, le nombre de blocs saturés est au plus égal à :

$$\text{Card} \left( \left\{ i : i \in I, \frac{s_i}{x_i \bar{u}_i} = a \right\} \right)$$

$$\text{où } a = \min_{k \in I} \left( \frac{s_k}{x_k \bar{u}_k} \right)$$

Démonstration : On rappelle que les blocs sont soit du type 1, soit du type 2 (le type 1 étant un cas particulier du type 2).

Il n'y aura pas saturation tant que :

$$v_i < s_i \quad \forall i \in I$$

ou encore :

$$\phi_i(v_i) \cdot \bar{u}_i < s_i \quad \forall i \in I$$

inégalité qui peut encore s'écrire :

$$q \cdot x_i \cdot \bar{u}_i < s_i \quad \forall i \in I$$

La saturation se produira pour

$$q = q_{\max} = \min_{i \in I} \left[ \frac{s_i}{x_i \cdot \bar{u}_i} \right]$$

$$\text{Posons } a = \min_{i \in I} \left[ \frac{s_i}{x_i \cdot \bar{u}_i} \right]$$

Appelons  $I^S$  l'indice ou l'ensemble d'indices qui réalise ce minimum :

$$I^S = \left\{ i : i \in I, \frac{s_i}{x_i \cdot \bar{u}_i} = a \right\}$$

A la valeur de saturation  $q_{\max} = a$ , il correspond un volume minimal de saturation  $V^S$ . Par conséquent :

- a) si  $V < V^S$ , aucun bloc n'est saturé.
- b) si  $V \geq V^S$ , les blocs d'indices appartenant à  $I^S$  sont saturés, mais compte tenu que l'égalité (B41) doit toujours être vérifiée, on a :

$$a \cdot x_i \cdot \bar{u}_i < s_i \quad \forall i \in \{I - I^S\}$$

ce qui entraîne

$$v_i < s_i \quad \forall i \in \{I - I^S\}$$

Donc, si  $V \geq V^S$ , le nombre de blocs saturés est égal à  $\text{Card}(I^S)$ .

Pour trouver les valeurs  $v_i(V)$  connaissant  $V$ , il est préférable d'utiliser deux méthodes numériques distinctes selon que les blocs sont tous du type 1 ou non.

#### B412. 1er cas : Blocs du type 1

Pour  $V < V^S$ , on a :

$$\phi_i(v_i) = v_i \times \frac{1}{u_i} = q \cdot x_i$$

$$\text{d'où } v = \sum_{i \in I} v_i = q \left( \sum_{i \in I} x_i \bar{u}_i \right)$$

La saturation se produisant pour  $q = a$ , il est possible de déterminer le volume de saturation.

$$V^S = a \left( \sum_{i \in I} x_i \bar{u}_i \right)$$

Donc, connaissant  $V$  :

a) si  $V \leq V^S$  :

$$v_i(V) = x_i \bar{u}_i q = x_i \bar{u}_i \times \frac{V}{\left( \sum_{i \in I} x_i \bar{u}_i \right)}$$

b) si  $V > V^S$  :

$$b_1) i \in \{I - I^S\} :$$

$$v_i(V) = x_i \bar{u}_i a \quad \forall i \in \{I - I^S\}$$

$$b_2) i \in I^S :$$

s'il n'y a qu'un bloc saturant (i.e. :

$\text{Card}(I^S) = 1$ ), alors :

$$v_{I^S}(V) = V - \sum_{j \in \{I - I^S\}} v_j(V)$$

Mais si le nombre de blocs saturés est supérieur à l'unité (i.e. :  $\text{card}(I^S) > 1$ ), alors, cette méthode ne permet pas de connaître  $v_i(V)$  pour  $i \in I^S$  car ces valeurs dépendent des conditions initiales ainsi que de la structure du système (par l'intermédiaire de régimes transitoires hypercritiques). On peut seulement affirmer que :

$$s_i \leq v_i(V) \leq V - \sum_{j \in \{I - I^S\}} v_j(V) - \sum_{k \in \{I^S - i\}} s_k \quad \forall i \in I^S$$

#### B413. 2ème cas : Blocs du type 2.

Dans ce cas, la relation linéaire

$$\phi_i(v_i) = v_i \times \frac{1}{u_i} \text{ n'existe plus ; mais on a toujours : } \phi_i = q x_i, \text{ avec } 0 \leq q \leq a.$$

En posant  $q_{ik} = \frac{\phi_{ik}}{x_i}$ , on définit à partir

de  $\mathcal{Y}_i$  la nouvelle suite :

$$\mathcal{Y}_i = \{v_{ik}, q_{ik}\}_{k=1, \dots, n_i}$$

A une valeur  $q < a$ , il correspond de façon biunivoque une valeur  $V'(q)$ . On trouve  $V'(q)$  en procédant de la façon suivante :

a) déterminer  $v_i(q)$  à l'aide de  $\phi_i$ ,  $i=1, \dots, M$

si on suppose  $q_{i,\ell} \leq q \leq q_{i,\ell+1}$

alors :

$$v_i(q) = v_{i\ell} + \frac{(v_{i,\ell+1} - v_{i\ell})}{(q_{i,\ell+1} - q_{i\ell})} \times (q - q_{i\ell})$$

b) écrire que  $V'(q) = \sum_{i \in I} v_i(q)$

Pour obtenir les valeurs  $v_i(V)$ , la méthode numérique consiste à chercher par approximations successives la bonne valeur de  $q$  telle que  $V'(q) = V$ .

On pourra débiter la méthode en choisissant  $q=a$  ; de cette façon, si  $V'(a) < V$ , on a immédiatement :

a)  $i \in \{I - I^S\} :$

$$v_i(V) = v_i(a)$$

b)  $i \in I^S :$

$b_1) \text{ si } \text{card}(I^S) = 1 :$

$$v_{I^S}(V) = V - \sum_{j \in \{I - I^S\}} v_j(V)$$

$b_2) \text{ si } \text{card}(I^S) > 1 :$

on a une indétermination, de la même façon qu'en B412.

$$s_i \leq v_i \leq V - \sum_{j \in \{I - I^S\}} v_j(V) - \sum_{k \in \{I^S - i\}} s_k \quad \forall i \in I^S$$

#### B.42. Flux de sortie d'un système complémentaire.

Cette notion de flux de sortie du système complémentaire à un bloc  $i$  sera utilisée pour étudier le régime permanent d'un système ouvert (§B43) et pour réaliser les approximations proprement dites (§C).

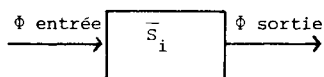
Soit  $J_i = \{1, 2, \dots, i-1, i+1, \dots, M\}$  l'ensemble des indices des blocs formant le système complémentaire par rapport au bloc  $i$  (dans un système fermé).

Appelons  $\bar{s}_i$  ce système. Cherchons le flux de sor-

tie de  $\bar{S}_i$  lorsque ce système est en équilibre, en fonction de  $\bar{V}_i$  où :

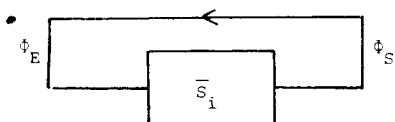
$$\sum_{j \in J_i} v_j = \bar{V}_i$$

Si le système  $\bar{S}_i$  est en équilibre, le flux d'entrée est égal au flux de sortie :



Cherchons les grandeurs  $v_j(\bar{V}_i)$ ,  $v_j \in J_i$ .

Un problème équivalent consiste à chercher les valeurs  $v_j(\bar{V}_i)$ ,  $v_j \in J_i$ , du système fermé :



Pour déterminer  $\phi_S = \phi_{S_i}(\bar{V}_i)$ , considérons encore deux cas, selon le type des blocs de  $\bar{S}_i$ .

1er cas : blocs de type 1.

Compte tenu des résultats précédents, on sait que :

$$\phi_j = \left\{ \left[ \frac{\bar{V}_i}{\left( \sum_{j \in J_i} x_j \bar{u}_j \right)} \right] \wedge \bar{a}_i \right\} x_j \quad v_j \in J_i$$

$$\text{où } \bar{a}_i = \min_{j \in J_i} \left[ \frac{s_j}{x_j \bar{u}_j} \right]$$

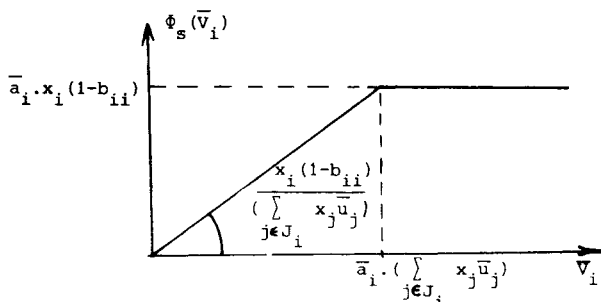
$$\text{Comme } \phi_{S_i} = \sum_{j \in J_i} \phi_j \cdot b_{ij}$$

$$\text{et que } \sum_{j \in J_i} x_j b_{ji} = x_i (1 - b_{ii})$$

on obtient :

$$\phi_{S_i}(\bar{V}_i) = \left\{ \left[ \frac{\bar{V}_i}{\left( \sum_{j \in J_i} x_j \bar{u}_j \right)} \right] \wedge \bar{a}_i \right\} x_i (1 - b_{ii})$$

Graphiquement, on a :



Remarque B42. En général  $b_{ii} = 0$

2ème cas : blocs de type 2.

On a toujours

$$\phi_j = q x_j \quad v_j \in J$$

et, par conséquent,

$$\phi_{S_i}(q) = q \cdot x_i (1 - b_{ii})$$

A chaque valeur  $q \in [0, \bar{a}_i]$ , il correspond (de façon biunivoque) une valeur  $\bar{V}_i$ .

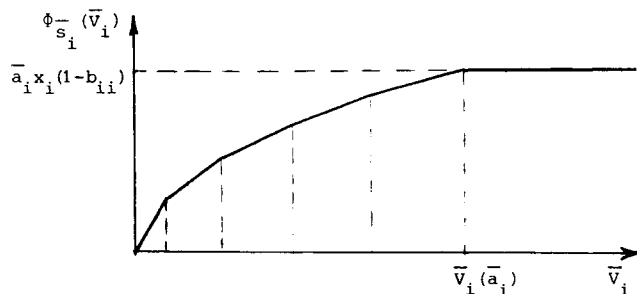
Pour trouver  $\bar{V}_i(q)$ , il faut, comme dans (§B-413), déterminer numériquement  $v_j(q)$  à l'aide de la suite  $\mathcal{J}'_j$  et écrire que :

$$\bar{V}_i(q) = \sum_{j \in J_i} v_j(q)$$

A une valeur  $q$  correspond donc un flux  $\phi_{S_i}(q)$  et un volume  $\bar{V}_i(q)$ . La saturation se produit pour  $\bar{V}_i \geq \bar{V}_i(\bar{a}_i)$ , auquel correspond le flux maximal.

$$\phi_{S_i}(\bar{a}_i) = \bar{a}_i \times x_i (1 - b_{ii})$$

Graphiquement, on obtient :



La fonction  $\phi_{S_i}(\bar{V}_i)$  est affine par morceaux.

Les points "singuliers" de  $\bar{V}_i$  correspondent à une suite finie de valeurs de  $q$ . Soit  $Q$  cette suite ; elle est formée de toutes les valeurs inférieures ou égales à " $\bar{a}_i$ " qui correspondent à des points "singuliers" dans les fonctions  $\phi_j(v_j)$  ; i.e. : les valeurs  $q_{jk}$  des suites  $\mathcal{J}'_j$ ,  $j \in J_i$ , telles que  $q_{jk} \leq \bar{a}_i$  et rangées par ordre croissant :

Donc :

$$Q = \{q_1, q_2, \dots, \bar{a}_i\}$$

$$\text{avec } q_k < q_{k+1} \quad v_k$$

On obtiendra donc le flux de sortie  $\phi_{S_i}(\bar{V}_i)$  par l'intermédiaire de la variable  $q$  à laquelle

on donnera successivement les valeurs de la suite  $Q$ .

#### B.43. Système ouvert

Pour que le problème garde un sens, il faut être dans l'un des deux cas suivants :

- a)  $\exists T : t > T \Rightarrow \phi_o(t) = \text{Cte non nulle}$   
et  $\exists j : b_{jo} \neq 0$
- b)  $\exists T : t > T \Rightarrow \phi_o(t) = 0$  et  $b_{io} = 0 \quad \forall i \in I$   
et  $\phi_o(t) \in \mathcal{L}^1$

Dans ce dernier cas, le régime d'équilibre est identique à celui obtenu en considérant le système fermé canonique ( $b_{oi} = 0 \quad \forall i \in I$ ) pour une valeur :

$$V = \sum_{i \in I} v_i^o + \int_0^T \phi_o(t) dt$$

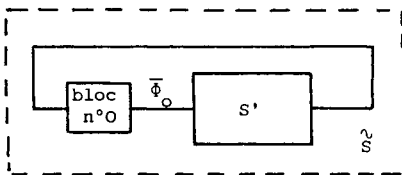
Donc dans la suite de ce paragraphe, nous supposons que :

$$\exists T : t > T \Rightarrow \phi_o(t) = \phi_o, \quad \phi_o \neq 0$$

$$\text{et, } \exists j : b_{jo} \neq 0$$

Considérons maintenant la matrice  $\hat{B} = (b_{ij})$   $i, j = 0, 1, \dots, M$  et introduisons la matrice ligne  $\hat{X} = (\hat{x}_0, \hat{x}_1, \dots, \hat{x}_M)$ , telle que  $\sum_{i=0}^M \hat{x}_i = 1$ , et solution de l'équation matricielle  $\hat{X}\hat{B} = \hat{X}$ .

Considérons le système fermé  $\hat{S}$  canoniquement associé au système ouvert  $S$  :



$S'$  a la même structure et les mêmes fonctions  $\phi_i$ ,  $i \in I$ , que  $S$ .

$$\text{Donc, } \phi_{\hat{S}}(V) = \phi_S(V) \quad \forall V$$

et chercher le régime permanent de  $S$  revient à chercher le régime permanent de  $S'$ .

Il suffit d'écrire que :

$$\phi_{S'} = \phi_{\hat{S}} = \phi_o = q \cdot \hat{x}_o$$

il faut, pour que la solution existe, que

$$\phi_o \leq \hat{a} \cdot \hat{x}_o$$

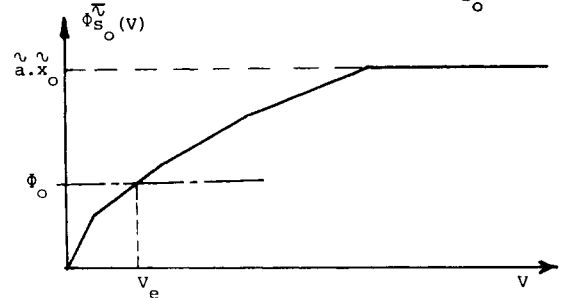
avec  $\hat{a} = \min_{i \in I} \left[ \frac{s_i}{\hat{x}_i \cdot u_i} \right]$

D'où :

$$q = \frac{\phi_o}{\hat{x}_o}$$

A partir de cette valeur  $q$ , on peut donc trouver les valeurs d'équilibre  $v_i(q)$  comme dans le cas du système fermé, en utilisant les coefficients  $\hat{x}_i$  au lieu des  $x_i$ .

Graphiquement, la grandeur d'équilibre  $v_e$  est obtenue de façon simple à partir de  $\phi_{\hat{S}}^{\pi}(V)$



On voit que le régime permanent n'existe que si  $\phi_o \leq \hat{a} \cdot \hat{x}_o$ . Sinon  $V(t)$  augmente indéfiniment par l'intermédiaire des blocs saturés. i.e. les blocs d'indice appartenant à  $I^s$  où :

$$I^s = \{ i : i \in I, \frac{s_i}{\hat{x}_i \cdot u_i} = \hat{a} \}$$

### C-1. Construction du modèle à "flux déterministe" associé

Soit R le modèle de réseau de files d'attente markovien ergodique tel qu'il a été présenté au § A. Le modèle à "flux déterministe" canoniquement associé au modèle probabiliste est obtenu de la façon suivante :

- 1) chaque "station" i est remplacée par un "bloc" i.
- 2) la fonction flux de sortie  $\phi_i(v_i)$  est construite à l'aide des valeurs  $\mu_i(n_i)$  en posant :

$$\phi_i = \{v_{ik}, \phi_{ik}\}_{k=1, \dots, (N_{\Lambda} s_i)} = \{n_i, \mu_i(n_i)\}_{n_i=1, \dots, (N_{\Lambda} s_i)}$$

où N est le nombre de clients si le réseau est fermé.

Si le temps de service de chaque guichet de la station i est indépendant de  $n_i$ , on obtient une fonction de type 1 en écrivant :

$$\phi_i(s_i) = \left( \frac{1}{s_i}, s_i \right)$$

- 3) la matrice B est choisie identique à la matrice  $\mathcal{P}$

### C-2. Approximation de la probabilité d'état marginale d'une station

#### C21. Réseau fermé

Si  $p(n_1, n_2, \dots, n_M, t)$  est la probabilité d'état du réseau précédemment défini, la probabilité d'état marginale de la station i s'écrit par définition :

$$p_i(k, t) = \sum_{\substack{\text{et } n_i=k \\ \text{et } n_j \neq k}} p(n_1, \dots, n_M, t)$$

où

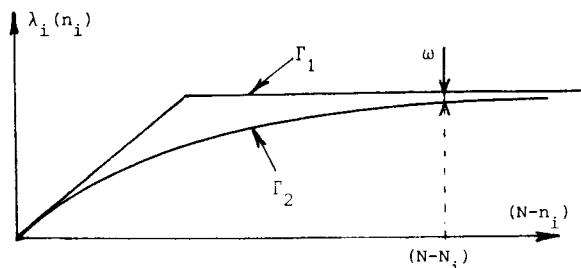
$$\mathcal{H} = \{(n_1, \dots, n_M) / \forall j \in \{1, 2, \dots, M\}, 0 \leq n_j \leq N, \sum_{j=1}^M n_j = N\}$$

A ces probabilités transitoires, correspondent les probabilités asymptotiques :  $p(n_1, \dots, n_M)$  et  $p_i(k)$ .

Les probabilités marginales de la station i sont approchées par les probabilités d'état d'une file d'attente unique de taux de service  $\mu_i(n_i)$  et de taux d'entrée  $\lambda_i(n_i)$  en choisissant :

$$\{\lambda_i(n_i)\}_{n_i=0,1,\dots,N} = \{\phi_{S_i}(N-v)\}_{v=0,1,\dots,N}$$

On discutera au § D de l'erreur introduite sur les probabilités marginales en régime transitoire par une telle approximation. En ce qui concerne le régime permanent, examinons à l'aide du graphique suivant en quoi consiste l'approximation faite : on montre en annexe que, si le flux approché à l'allure de  $\Gamma_1$  (voir § (B42)), l'allure du flux réel est donnée par la courbe  $\Gamma_2$ .



Une approximation intermédiaire peut d'ailleurs consister à prendre les valeurs réelles de  $\lambda_i(N-n_i)$  pour les valeurs  $N-N_i \leq n_i \leq N$  la valeur de  $n_i$  étant implicitement déterminée au cours des calculs à partir d'un écart  $\varepsilon$  donné.

#### C22. Réseau ouvert

Soit un réseau de files d'attente ouvert défini comme précédemment.

L'utilisation du modèle à "flux déterministe" conduit à étudier une file d'attente unique soumise à un flux d'entrée constant :

$$\lambda_i = \phi_o \times \frac{\tilde{x}_i}{\tilde{x}_o}$$

Mais, on sait [JAN-57] que, dans un tel réseau, les probabilités d'état marginales asymptotiques sont exactement celles qu'on obtiendrait en considérant une seule file d'attente soumise

$$\text{au flux } \lambda_i = \lambda_o \times \frac{\tilde{x}_i}{\tilde{x}_o}.$$

Cela provient du fait que, dans un tel réseau, les états  $n_1(t), \dots, n_M(t)$  sont asymptotiquement indépendants.

Donc l'approche par un modèle à "flux déterministe" n'apporte pas de nouveauté, dans le cas d'un réseau ouvert, au niveau du calcul des probabilités d'état marginales (on peut toutefois remarquer la cohérence du modèle).



### C-3. APPROXIMATION DE LA VALEUR MOYENNE DE L'ETAT D'UNE STATION

L'approximation faite ci-dessus en (C2) permet d'exprimer la valeur moyenne de l'état d'une station, tant en régime transitoire qu'en régime permanent :

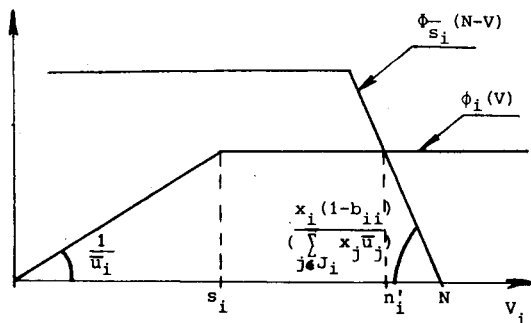
$$\bar{n}_i'(t) = \sum_{k=1}^N j \times p_i'(k,t) \quad (C3-1)$$

$$\text{ou } \bar{n}_i' = \sum_{k=1}^N j \times p_i'(k)$$

où  $p_i'(k,t)$  désigne la valeur approchée de  $p_i(k,t)$ .

On peut encore approcher la valeur  $\bar{n}_i(t)$  par la valeur  $v_i(t)$  du modèle à flux déterministe associé. Cette méthode s'applique tant aux réseaux fermés qu'aux réseaux ouverts. Elle est plus approchée que la méthode précédente, mais relativement d'autant plus rapide que le nombre de clients  $N$  est important. (Si le réseau est ouvert,  $N$  représente le nombre de clients qu'il faut introduire dans le réseau fermé canonique pour utiliser la formule (C3-1) avec une bonne approximation).

Si on ne s'intéresse qu'au régime permanent il existe une autre approximation très simple. En utilisant les résultats du paragraphe (B42), et en écrivant que  $\phi_i = \phi_{s_i}^-$ , on obtient, sachant  $V$ , la valeur de  $v_i(V)$ . Graphiquement, pour des stations telles que  $\mu_i(n_i) = (n_i \wedge s_i) \mu_i$ , on a, par exemple:

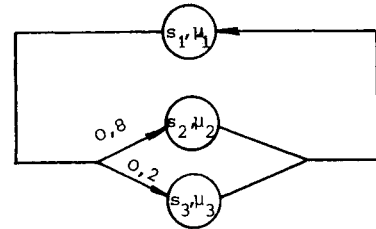


**Remarque C3.** Dans ce dernier cas, pour qu'il n'y ait pas d'indétermination, il est nécessaire que  $i$  n'appartienne pas à  $I_s$  si  $\text{Card } \{I_s\} > 1$ .

### C-4. RECHERCHE D'UNE SOLUTION INITIALE DANS UN PROBLEME D'OPTIMISATION

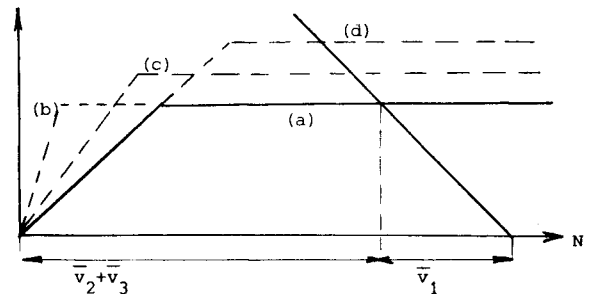
Le but de ce paragraphe est simplement de montrer, à l'aide d'un exemple, comment une étude

préalable du modèle à "flux déterministe" associé peut diminuer le nombre d'itérations dans un problème d'optimisation. Soit le réseau simple suivant :



On souhaite maximiser la valeur asymptotique moyenne de  $\bar{n}_1$  (sous une contrainte de coût d'investissement par exemple). Les variables de décision sont  $\mu_2, \mu_3, s_2, s_3$ .

Soit une solution admissible  $(\mu_2^0, \mu_3^0, s_2^0, s_3^0) = (10, 1, 2, 4)$  ; le modèle à "flux déterministe" associé conduisant au schéma suivant (courbe a) :



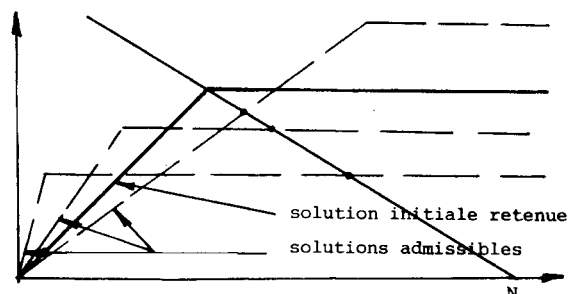
Si on augmente  $\mu_2$ , on obtient un flux complémentaire correspondant à la courbe (b).

Une augmentation de  $s_2$  laisse inchangé le flux complémentaire (on conserve la courbe (a)).

A une augmentation de  $\mu_3$  correspond la courbe (c) et à une augmentation de  $s_3$  correspond la courbe (d).

On constate donc qu'au niveau du modèle à flux déterministe, il est inutile d'augmenter  $\mu_2$  ou  $s_2$  (dans une telle situation où le bloc 3 est saturé). Le choix entre  $\mu_3$  et  $s_3$  se fera en fonction des coûts marginaux.

On voit donc qu'une bonne solution de départ (pour une optimisation en univers stochastique) sera une solution qui maximise la valeur  $\bar{v}_1(N)$  du modèle à flux déterministe :



On pourra ensuite soit chercher la solution qui maximise la valeur  $\bar{n}_1$  du modèle probabiliste simplifié (§C3), soit chercher la solution du modèle probabiliste exacte si l'enjeu économique le justifie.

## D - EXEMPLES NUMERIQUES

### D-1. REGIME TRANSITOIRE

Les probabilités d'état transitoire peuvent être approchées par le modèle markovien unidimensionnel ; la valeur moyenne de l'état pouvant être approchée à la fois par ce modèle et par le modèle à flux déterministe. Sur la planche II, figurent les résultats obtenus pour deux exemples numériques voisins mais avec un phénomène d'attente beaucoup plus marqué pour l'un ( $X = 2$ ) que pour l'autre ( $X = 6$ ). Les résultats des modèles approchés sont comparés aux résultats du modèle aléatoire exact donnant la moyenne ( $\bar{n}_{ae}$ ) et l'écart-type ( $\sigma_{ae}$ ) de la station 4. On constate que, pour le régime transitoire de cet exemple, la valeur moyenne ( $\bar{n}_{as}$ ) obtenue par le modèle aléatoire simplifié (système unidimensionnel) n'est pas meilleure que la valeur  $\bar{n}_f$  donnée par le modèle à flux déterministe.

L'écart-type de la distribution des probabilités d'état ne peut être approché que par le modèle aléatoire simplifié. On constate sur ces exemples que l'approximation obtenue est relativement bonne.

### D-2. REGIME PERMANENT

Bien que théoriquement asymptotique, l'état permanent est pratiquement atteint assez rapidement (cf. planche II).

A titre d'exemple, on a reproduit sur la planche III, pour un réseau donné et en fonction d'un taux de service variable, les différentes valeurs moyennes de la station à taux de service variable pour :

- le modèle à flux déterministe
- le modèle aléatoire simplifié
- le modèle aléatoire exact.

On peut distinguer trois zones. La zone A correspond à un système d'attente pratiquement "sans attente". Dans ce cas, tous les modèles donnent une valeur moyenne pratiquement identique. En effet, il est facile de montrer que la valeur moyenne  $\bar{n}_{ae}$ , lorsqu'il ne se produit aucun phénomène d'attente dans le réseau ( $r_j \geq N, \forall j$ ) est justement égale à ce qu'on appelle la disponibilité déterministe d'une station  $i$  :

$$\bar{N}_d = \frac{N \times \bar{u}_i}{\bar{u}_i + T}$$

où  $\bar{u}_i$  est le temps de service de la station  $i$  et où  $T$  est le temps de parcours dans le réseau complémentaire.

La zone B correspond à la situation où la nature aléatoire des phénomènes est la plus sensible.

Dans la zone C, le système est saturé et le système réel se comporte pratiquement comme un système à flux déterministe.

Dans les cas concrets, les critères économiques conduisent généralement à se placer dans la zone B (dans la zone A, l'infrastructure est relativement trop chère, dans la zone C, le nombre de "clients" en attente est relativement trop important).

Pour le même exemple numérique, le graphique de la planche IV donne l'écart relatif, par rapport à la valeur moyenne exacte des valeurs obtenues par :

- le modèle à flux déterministe
- le modèle aléatoire approché.

On peut remarquer que l'erreur relative maximale pour le modèle markovien unidimensionnel est voisine de 1 %. Bien sûr, la valeur élevée de  $N$  explique ce bon résultat. Dans le but d'illustrer la sensibilité de l'erreur par rapport à  $N$ , on reproduit planche V, la variation de l'erreur relative maximale en fonction de  $N$  pour un réseau de structure voisine du précédent. La planche VI montre l'écart des distributions de probabilité relatives à ces deux modèles, dans le cas le plus défavorable expérimenté ( $N=10$ ).

## REFERENCES

- [BUN-73] BUZEN J.P.  
*Computational Algorithms for Closed Queueing Networks with Exponential Servers.*  
(communications of the ACM. Vol.16, Number 9, pp. 527-531, Septembre 1973).
- [GON-67] GORDON W.J. and NEWEL G.F.  
*Closed Queueing Systems with exponentials servers.*  
(Oper. Res. 15.2 (1967), 254-265).
- [JAN-57] JACKSON J.R.  
*Networks of waiting-lines.*  
(J. ORSA, Vol.5, n°4, p.518 - août 57).
- [JAN-63] JACKSON J.R.  
*Job-Shop like queueing systems.*  
(Management Science, Vol.10, Oct. 1963, 131-142).
- [MAE-75] MARIE R.  
*Sur les réseaux de files d'attente fermés à services exponentiels.*  
(Séminaires de probabilités RENNES-1975.  
Rapport IRISA n° 33, pp. 5 à 23 - RENNES).

LIMITE DU FLUX DE SORTIE CONDITIONNEL

A-1. INTRODUCTION

$\lambda_i(n_i)$  est le flux d'entrée conditionnel dans la station  $i$  sachant que le sous-réseau complémentaire à cette station contient  $(N-n_i)$  clients.

$$\text{Posons } v(n) = v(N-n_i) = \lambda_i(n_i)$$

Il faut montrer que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} v(n) = \bar{a}_i \cdot x_i (1-p_{ii}) \quad \text{si } \bar{a}_i < +\infty$$

$$\text{où } \bar{a}_i = \min_{j \in J_i} \left( \frac{s_j}{x_j \cdot \mu_j} \right)$$

$$\text{avec } J_i = \{1, 2, \dots, i-1, i+1, \dots, M\}$$

Si  $\bar{a}_i = +\infty$ , on a évidemment :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} v(n) = +\infty$$

puisque, si toutes les stations du sous-réseau complémentaire  $R_i$  ont une infinité de serveurs, on a, en reprenant les résultats de [MAE-75] :

$$v(n) = x_i (1-p_{ii}) \times \frac{\beta(n-1)}{\beta(n)}$$

$$\text{où } \beta(n) = \frac{\left( \sum_{j \in J_i} x_j / \mu_j \right)^n}{n!}$$

$$\text{soit } v(n) = x_i (1-p_{ii}) \times \frac{n}{\left( \sum_{j \in J_i} x_j / \mu_j \right)}$$

Etudions d'abord la limite de  $v(n)$  pour un sous-réseau complémentaire  $R_i$  ne comportant que des stations ayant :

- soit un seul serveur ( $s_j = 1$ )
- soit une infinité de serveurs.

Pour résoudre ce premier problème, on utilise le théorème de décomposition en sous-réseaux donné dans [MAE-75]. Ce théorème permet d'étudier successivement le flux de sortie d'une suite de sous-réseaux. A l'étape  $n$ , on étudie le sous-réseau  $R^{(n)}$  formé du sous-réseau  $R^{(n-1)}$  auquel on ajoute une nouvelle station à un serveur. A la première étape,  $R^{(1)}$  est formé :

- soit de toutes les stations possédant une infinité de serveurs et d'une station à un serveur,
- soit de deux stations à un serveur si  $R_i$

ne contient pas de stations possédant une infinité de serveurs.

Le premier cas est traité dans le § A2, le second dans le § A3.

Le cas de  $R^{(n)}$  pour  $n > 1$  est étudié dans le § A4.

Le premier problème étant alors résolu, on traite le cas général dans le § A5.

Sans nuire à la généralité, on suppose dans la démonstration que :

$$\{I\} - \{J_i\} = \{M\}$$

et que, si elles existent, les  $y$  stations possédant une infinité de serveurs ont les indices  $\{1, 2, \dots, y\}$ .

A-2. ETUDE DE  $R^{(1)}$  LORSQU'IL EXISTE DES STATIONS POSSEDANT UNE INFINITE DE SERVEURS

$$\text{Posons } \alpha^{(1)} = \sum_{j \in I_{y+1}} x_j \cdot \left( \sum_{k \in \{I-I_{y+1}\}} p_{jk} \right)$$

$$\text{où } I_\ell = \{1, 2, \dots, \ell\}$$

On sait que le sous-réseau  $R^{(1)}$  formé par les stations d'indice  $j \in I_{y+1}$  est équivalent à une station unique ayant pour composante du vecteur  $X$  (cf. § B41) la valeur  $\alpha^{(1)}$  et pour flux de sortie conditionnel :

$$v^{(1)}(n) = \alpha^{(1)} \cdot \frac{\beta^{(1)}(n-1)}{\beta^{(1)}(n)}$$

$$\text{Posons } S = \sum_{j \in I_y} \frac{x_j}{\mu_j} = \sum_{j \in I_y} y_j \quad \text{où } y_j = \frac{x_j}{\mu_j}$$

On a (cf. [MAE-75]) :

$$\beta^{(1)}(n) = \sum_{k=0}^n y_{y+1}^k \cdot \frac{S^{n-k}}{(n-k)!}$$

D'où :

$$v^{(1)}(n) = \frac{\alpha^{(1)}}{y_{y+1}} \times \frac{\left[ \sum_{k=0}^{n-1} \left( \frac{S}{y_{y+1}} \right)^k \times \frac{1}{k!} \right]}{\left[ \sum_{k=0}^n \left( \frac{S}{y_{y+1}} \right)^k \times \frac{1}{k!} \right]}$$

soit encore :

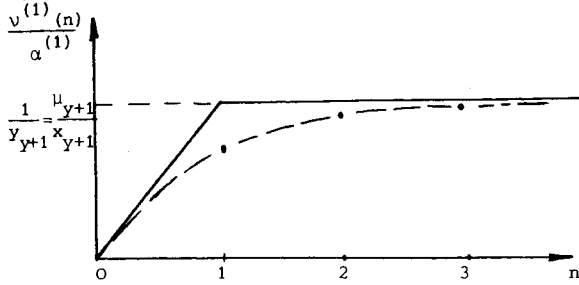
$$v^{(1)}(n) = \frac{\alpha^{(1)}}{y_{y+1}} \times \frac{\left[ e^{\frac{S}{y_{y+1}}} - \sum_{k=n}^{\infty} \left( \frac{S}{y_{y+1}} \right)^k \times \frac{1}{k!} \right]}{\left[ e^{\frac{S}{y_{y+1}}} - \sum_{k=n+1}^{\infty} \left( \frac{S}{y_{y+1}} \right)^k \times \frac{1}{k!} \right]} \quad \text{---(A2-1)}$$

On a donc :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} v^{(1)}(n) = \frac{\alpha^{(1)}}{y_{y+1}}$$

Remarque A2. D'après (A2-1), le flux de sortie

normalisé ( $\alpha^{(1)} = 1$ ) a l'allure suivante :



A-3. ETUDE DE  $R^{(1)}$  LORSQU'IL EST FORME DE DEUX STATIONS A SERVEUR UNIQUE

En posant  $y_j = \frac{x_j}{\mu_j}$   $j = 1, 2$

$$\text{et } \alpha^{(1)} = \sum_{j=1}^2 x_j \left( \sum_{k \in I_2} p_{jk} \right)$$

on a ici :

$$\beta^{(2)}(n) = \sum_{k=0}^n y_1^k \cdot y_2^{n-k} = \frac{y_1^{n+1} - y_2^{n+1}}{y_1 - y_2} \quad \text{si } y_1 \neq y_2$$

ce qui entraîne :

$$v^{(1)}(n) = \alpha^{(1)} \frac{\beta^{(2)}(n-1)}{\beta^{(2)}(n)} = \alpha^{(1)} \frac{(y_1^n - y_2^n)}{(y_1^{n+1} - y_2^{n+1})} \quad \text{si } y_1 \neq y_2$$

1er cas : Si  $y_2 > y_1$  :

$$v^{(1)}(n) = \frac{\alpha^{(1)}}{y_2} \frac{\left[ \left( \frac{y_1}{y_2} \right)^n - 1 \right]}{\left[ \left( \frac{y_1}{y_2} \right)^{n+1} - 1 \right]} \quad \text{---(A3-1)}$$

Donc :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} v^{(1)}(n) = \frac{\alpha^{(1)}}{y_2} \quad \text{si } y_2 > y_1$$

2ème cas : si  $y_1 > y_2$ , on trouve de la même façon :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} v^{(1)}(n) = \frac{\alpha^{(1)}}{y_1} \quad \text{si } y_1 > y_2$$

3ème cas :  $y_1 = y_2$

$$\text{alors } \beta^{(2)}(n) = \sum_{k=0}^n y_1^k = (n+1) \cdot y_1^n$$

$$\text{d'où } v^{(1)}(n) = \frac{\alpha^{(1)}}{y_1} \times \frac{n}{(n+1)} \quad \text{---(A3-2)}$$

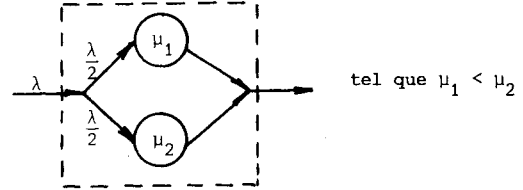
donc :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} v^{(1)}(n) = \frac{\alpha^{(1)}}{y_1} = \frac{\alpha^{(1)}}{y_2} \quad \text{si } y_1 = y_2$$

Conclusion :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} v^{(1)}(n) = \alpha^{(1)} \min\left(\frac{1}{y_1}, \frac{1}{y_2}\right) \quad \text{---(A3-3)}$$

Remarque A3-1 : Un examen heuristique trop rapide du sous-réseau suivant :



conduirait peut-être à écrire que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} v(n) = \mu_1 + \mu_2$$

En fait, il n'en est rien, le résultat précédent nous apprend que :

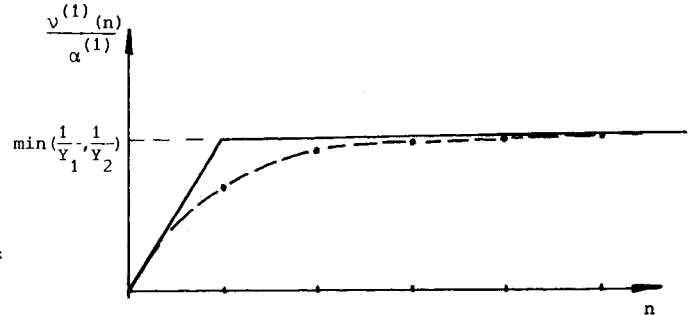
$$\lim_{n \rightarrow \infty} v(n) = 2\mu_1.$$

On peut retrouver la bonne justification heuristique de cette limite en considérant le modèle à flux déterministe où on voit clairement que :

$$\Phi(V) = \alpha \cdot \bar{a} = \alpha \times \min_{i=1,2} \left( \frac{\mu_i}{\frac{\alpha}{2}} \right) \quad \text{pour } V > V_s$$

$$= 2\mu_1$$

Remarque A3-2 : Compte-tenu de (A3-1) et de (A3-2), le flux de sortie normalisé ( $\alpha^{(1)}=1$ ) a encore l'allure suivante :



A-4. ETUDE DE  $R^{(k)}$

Désignons par  $S^{(1)}$  le réseau initial modifié par la réunion de  $[(y+1)V2]$  stations de  $R^{(1)}$  en une seule station d'indice  $[(y+1)V2]$ .  $S^{(1)}$  a donc  $M - [yV1]$  stations d'indice :

$$I^{(1)} = \{[(y+1)V2], [(y+1)V3], \dots, M\}$$

On désigne par  $I_\ell^{(1)}$  l'ensemble de  $\ell$  premiers

indices de  $I^{(1)}$ .

On définit de la même façon  $S^{(k)}$ ,  $I^{(k)}$  et  $I_\ell^{(k)}$ .

Pour simplifier la notation des indices, on pose :

$$(k, \ell) = \begin{cases} = \{I_1^{(k)}\} & \text{si } \ell = 1 \\ = \{I_\ell^{(k)}\} - I_{\ell-1}^{(k)} & \text{si } \ell > 1 \end{cases}$$

La valeur de la limite du flux de sortie normalisé  $\frac{v^{(k)}(n)}{\alpha^{(k)}}$  va être déterminée à l'aide d'un

raisonnement par récurrence ; le paragraphe suivant est consacré à l'étude de

$$\frac{v^{(2)}(n)}{\alpha^{(2)}}.$$

#### A41. Flux de sortie de $R^{(2)}$

Soit  $P^{(1)} = (p_{ij}^{(1)})$  la matrice de transition du réseau  $S^{(1)}$  et  $X^{(1)}$  le vecteur, solution de  $X^{(1)} P^{(1)} = X^{(1)}$ , tel que :

$$\begin{aligned} x_{(1,1)}^{(1)} &= \alpha^{(1)} \\ x_{(1,j)}^{(1)} &= x_j \quad \forall j \in \{I - I_1^{(1)}\} \end{aligned}$$

Afin de réduire les difficultés indicielles, la détermination de  $P^{(1)}$  et de  $X^{(1)}$  ne sera précisée qu'au paragraphe suivant.

Posons :

$$\alpha^{(2)} = \sum_{j \in I_2^{(1)}} x_j^{(1)} \left( \sum_{k \in \{I - I_2^{(1)}\}} p_{jk}^{(1)} \right)$$

Le sous-réseau  $R^{(2)}$  de  $S^{(1)}$  se réduit en une station unique dans  $S^{(2)}$  telle que  $x_{(2,1)}^{(2)} = \alpha^{(2)}$  ayant un flux de sortie conditionnel égal, par définition, à :

$$v^{(2)}(n) = \alpha^{(2)} \frac{\beta^{(2)}(n-1)}{\beta^{(2)}(n)}$$

$$\text{où } \beta^{(2)}(i) = \sum_{k=0}^i y_{(1,2)}^{i-k} \left[ \frac{\alpha^{(1)}}{v^{(1)}(k)} \right]^k$$

avec :

$$y_{(1,2)} = \frac{x_{(1,2)}^{(1)}}{\mu_{(1,2)}}$$

Considérons la station d'indice (1,1) formée

par  $R^{(1)}$  et posons :

$$y_{(1,1)}^{(k)} = \frac{\alpha^{(1)}}{v^{(1)}(k)}$$

$$y_{1f} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\alpha^{(1)}}{v^{(1)}(k)}$$

Compte-tenu de l'allure de  $\frac{v^{(1)}(k)}{\alpha^{(1)}}$ , il existe une suite positive, monotone décroissante telle que :

$$\frac{1}{y_{(1,1)}^{(k)}} = \frac{1}{y_{1f}} [1 - \varepsilon(k)] \quad \text{avec } 0 < \varepsilon(k) < 1 \quad \forall k > 0$$

ou :

$$y_{(1,1)}^{(k)} = \frac{y_{1f}}{[1 - \varepsilon(k)]}$$

On peut donc écrire :

$$\beta^{(2)}(i) = \sum_{k=0}^i y_{(1,2)}^{i-k} \left[ \frac{y_{1f}}{1 - \varepsilon(k)} \right]^k$$

1er cas :  $y_{(1,2)} > y_{1f}$

On a :

$$\beta^{(2)}(i) = y_{(1,2)}^i \left[ \sum_{k=0}^i \left( \frac{y_{1f}}{y_{(1,2)}} \right)^k \times \frac{1}{1 - \varepsilon(k)} \right]$$

Soit  $\gamma$  tel que :  $\frac{y_{(1,2)}}{y_{1f}} > \gamma > 1$

Soit  $n_0$  tel que :  $\gamma y_{1f} < y_{(1,2)} \cdot [1 - \varepsilon(n_0)]$

On a donc, pour  $n > n_0$

$$v^{(2)}(n) = \frac{\alpha^{(2)}}{y_{(1,2)}} \times \frac{\left[ \sum_{k=0}^{n_0} [F(k)]^k + \sum_{k=n_0+1}^n [F(k)]^k - [F(n)]^n \right]}{\left[ \sum_{k=0}^{n_0} [F(k)]^k + \sum_{k=n_0+1}^n [F(k)]^k \right]} \quad (A4-1)$$

où

$$F(j) = \left[ \frac{y_{1f}}{y_{(1,2)} [1 - \varepsilon(j)]} \right]$$

$$\text{Comme } \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{y_{1f}}{y_{(1,2)} [1 - \varepsilon(n)]} \right]^n = 0$$

On a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} v^{(2)}(n) = \frac{\alpha^{(2)}}{y_{(1,2)}} \quad \text{si } y_{(1,2)} > y_{1f}$$

2ème cas :  $y_{f_1} > y_{(1,2)}$

On trouve de la même façon :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} v^{(2)}(n) = \frac{\alpha^{(2)}}{y_{f_1}} \quad \text{si } y_{f_1} > y_{(1,2)}$$

3ème cas :  $y_{f_1} = y_{1,2}$

On a :

$$\beta^{(2)}(i) = y_{f_1}^i \left[ \sum_{k=0}^i \left( \frac{1}{1-\varepsilon(k)} \right)^k \right]$$

D'où

$$v^{(2)}(n) = \frac{\alpha^{(2)}}{y_{f_1}} \times \frac{\sum_{k=0}^n \left[ \frac{1}{1-\varepsilon(k)} \right]^k - \left[ \frac{1}{1-\varepsilon(n)} \right]^n}{\sum_{k=0}^n \left[ \frac{1}{1-\varepsilon(k)} \right]^k} \quad (A4-2)$$

Comme

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \left[ \frac{1}{1-\varepsilon(k)} \right]^k = +\infty$$

et que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{1-\varepsilon(n)} \right]^n = 1$$

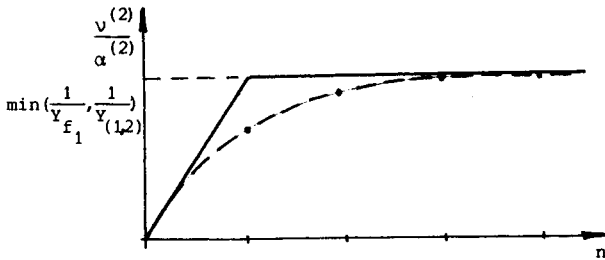
on a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} v^{(2)}(n) = \frac{\alpha^{(2)}}{y_{f_1}} = \frac{\alpha^{(2)}}{y_{(1,2)}} \quad \text{si } y_{f_1} = y_{(1,2)}$$

Conclusion :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} v^{(2)}(n) = \alpha^{(2)} \min \left( \frac{1}{y_{(1,2)}}, \frac{1}{y_{f_1}} \right) \quad (A4-3)$$

Compte-tenu des formules (A4-1), (A4-2) et (A4-3), le flux de sortie normalisé a encore l'allure suivante :



Le flux de sortie normalisé  $\frac{v^{(2)}(n)}{\alpha^{(2)}}$  de  $R^{(2)}$

a donc la même allure que  $\frac{v^{(1)}(n)}{\alpha^{(1)}}$ .

#### A42. Flux de sortie de $R^{(k)}$

Supposons que  $\frac{v^{(k-1)}(n)}{\alpha^{(k-1)}}$  ait l'allure de

$$\frac{v^{(2)}(n)}{v^{(2)}(n)}, \text{ avec pour limite : } \min \left( \frac{1}{y_{f_{k-2}}}, \frac{1}{y_{(k-2,2)}} \right).$$

Alors, une démonstration identique à la précédente permet d'affirmer que  $\frac{v^{(k)}(n)}{\alpha^{(k)}}$  a l'allure

de  $\frac{v^{(k-1)}(n)}{\alpha^{(k-1)}}$  avec pour limite :

$$\min \left( \frac{1}{y_{f_{k-1}}}, \frac{1}{y_{(k-1,2)}} \right).$$

Si  $d = (M - [2 y_{(y+1)}])$ ,  $S^{(d)}$  est le réseau

formé uniquement de deux stations. On a :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} v^{(d)}(n) &= \alpha^{(d)} \min \left( \frac{1}{y_{f_{d-1}}}, \frac{1}{y_{(d-1,2)}} \right) \\ &= \alpha^{(d)} \min \left( \frac{1}{y_{f_{d-2}}}, \frac{1}{y_{(d-1,2)}}, \frac{1}{y_{(d-1,2)}} \right) \\ &= \alpha^{(d)} \min_{j \in J_i} \left( \frac{\mu_j}{x_j} \right) \end{aligned}$$

Il reste à vérifier que

$$\alpha^{(d)} = \sum_{j=1}^{M-1} x_j p_{jM} = x_M (1 - p_{MM})$$

Afin de simplifier l'écriture au niveau des indices, cette vérification est faite sur un réseau  $R$  ne comportant que des stations saturantes (à un serveur) ; la démonstration relative à un réseau comportant des stations non saturantes reprenant le même principe.

On a vu que, par définition :

$$\alpha^{(1)} = x_1 (1 - p_{11} - p_{12}) + x_2 (1 - p_{22} - p_{21})$$

Le vecteur  $x^{(1)} = (x_1, x_2, \dots, x_M)$  de  $S^{(1)}$

est solution de  $x^{(1)} P^{(1)} = x^{(1)}$  où  $P^{(1)}$  est une matrice carrée d'ordre  $(M-1)$  ayant les coefficients :

$$p_{ij}^{(1)} = p_{ij} \quad \text{si } i, j = 3, \dots, M$$

$$p_{j2}^{(1)} = p_{j1} + p_{j2} \quad \text{si } j = 3, \dots, M$$

$$p_{2j}^{(1)} = \frac{x_1 p_{1j} + x_2 p_{2j}}{\alpha^{(1)}} \quad \text{si } j = 3, \dots, M$$

$$p_{22}^{(1)} = 0$$

Par définition, on a :

$$\begin{aligned}\alpha^{(2)} &= \alpha^{(1)} [1 - p_{23}^{(1)}] + x_3 [1 - p_{33}^{(1)} - p_{32}^{(1)}] \\ &= \alpha^{(1)} - x_1 p_{13} - x_2 p_{23} + x_3 [1 - p_{33} - p_{31} - p_{32}] \\ &= x_1 (1 - p_{11} - p_{12} - p_{13}) + x_2 (1 - p_{22} - p_{21} - p_{23}) \\ &\quad + x_3 (1 - p_{33} - p_{31} - p_{32})\end{aligned}$$

De la même façon, on construit la matrice  $P^{(2)}$  correspondant au niveau  $S^{(2)}$

$$\begin{aligned}X^{(2)} &= (\alpha^{(2)}, x_4, \dots, x_M) \text{ est solution de} \\ X^{(2)} P^{(2)} &= X^{(2)}.\end{aligned}$$

Par définition, on a :

$$\alpha^{(3)} = \alpha^{(2)} [1 - p_{34}^{(2)}] + x_4 [1 - p_{44}^{(2)} - p_{43}^{(2)}]$$

D'où

$$\begin{aligned}\alpha^{(3)} &= \alpha^{(2)} - \alpha^{(1)} p_{24}^{(1)} - x_3 p_{34}^{(1)} \\ &\quad + x_4 [1 - p_{44}^{(1)} - p_{43}^{(1)} - p_{42}^{(1)}]\end{aligned}$$

Soit, en utilisant les résultats précédents :

$$\begin{aligned}\alpha^{(3)} &= x_1 (1 - p_{11} - p_{12} - p_{13}) + x_2 (1 - p_{22} - p_{21} - p_{23}) \\ &\quad + x_3 (1 - p_{33} - p_{31} - p_{32}) - x_1 p_{14} - x_2 p_{24} - x_3 p_{34} \\ &\quad - x_4 [1 - p_{44} - p_{43} - p_{41} - p_{42}]\end{aligned}$$

ou

$$\alpha^{(3)} = \sum_{j=1}^4 x_j (1 - \sum_{k=1}^4 p_{jk})$$

On démontre ainsi par récurrence :

$$\begin{aligned}\alpha^{(M-2)} &= \sum_{j=1}^{M-1} x_j (1 - \sum_{k=1}^{M-1} p_{jk}) \\ &= \sum_{j=1}^{M-1} x_j p_{jM} = x_M (1 - p_{MM})\end{aligned}$$

#### A.5. CAS GENERAL

Il faut montrer que le résultat précédent reste exact pour un réseau comportant des stations à plusieurs serveurs ou, plus généralement, des stations à taux de service dépendants définis par les suites  $\{\mu_i(k)\}_{k=0, \dots, s_i}$ .

Montrons d'abord que, si  $Q'$  est un sous-réseau formé de deux stations à taux de service dépendant, la limite de son flux de sortie conditionnel  $v'(n)$  est identique à celle du sous-réseau  $Q$  formé de deux stations à serveur unique telles que :  $\mu_1 = \mu_1'(s_1)$  et  $\mu_2 = \mu_2'(s_2)$  si  $\{\mu_1'(k)\}$  et  $\{\mu_2'(k)\}$  définissent les deux stations de  $Q'$ .

Pour le sous-réseau  $Q$ , on a, par définition :

$$v(n) = \frac{\sum_{e \in \mathcal{H}_n} \rho(e) \cdot P(e)}{\sum_{e \in \mathcal{H}_n} P(e)}$$

où

$$\mathcal{H}_n = \{(n_1, n_2) / \forall i \in \{1, 2\}, 0 \leq n_i \leq n, n_1 + n_2 = n\}$$

$$e = (n_1, n_2)$$

$$P(e) = y_1^{n_1} \times y_2^{n_2} \quad \text{avec } y_i = \frac{x_i}{\mu_i}$$

$$\rho(e) = [(1 \wedge n_1) \mu_1 + (1 \wedge n_2) \mu_2]$$

De même, pour le sous-réseau  $Q'$ , on a :

$$v'(n) = \frac{\sum_{e \in \mathcal{H}_n} \rho'(e) \cdot P'(e)}{\sum_{e \in \mathcal{H}_n} P'(e)}$$

où

$$P'(e) = \frac{y_1^{n_1}}{A_1'(n_1)} \times \frac{y_2^{n_2}}{A_2'(n_2)} \quad \text{avec } y_i = \frac{x_i}{\mu_i'(s_i)} = \mu_i$$

$$\rho'(e) = [\mu_1'(n_1) + \mu_2'(n_2)]$$

Pour  $n > s_1 + s_2$ , on peut décomposer l'ensemble  $\mathcal{H}_n$  tel que :

$$\mathcal{H}_n = \mathcal{H}_n^0 + \mathcal{H}_n^1$$

$$\text{où : } \mathcal{H}_n^0 = \{(n_1, n_2) / (n_1, n_2) \in \mathcal{H}_n\}$$

$$\exists i \in \{1, 2\} : 0 \leq n_i \leq s_i$$

On remarque, pour  $e \in \mathcal{H}_n^1$ ,  $\rho'(e) = \rho(e)$  et

$$P'(e) = P(e) / A_1'(s_1) \times A_2'(s_2)$$

On peut donc écrire pour  $n > s_1 + s_2$  :



$$v'(n) = \frac{\sum_{\mathcal{H}_n^1} \rho(e) \left( \frac{P(e)}{A_1'(s_1) \cdot A_2'(s_2)} \right) + \sum_{\mathcal{H}_n^0} \rho'(e) \cdot P'(e)}{\sum_{\mathcal{H}_n^1} \frac{P(e)}{A_1'(s_1) A_2'(s_2)} + \sum_{\mathcal{H}_n^0} \rho'(e) \cdot P'(e)}$$

ou encore :

$$v'(n) = \frac{\sum_{\mathcal{H}_n} \rho(e) \cdot P(e) + \sum_{\mathcal{H}_n^0} E_1(e, s_1, s_2) P'(e)}{\sum_{\mathcal{H}_n} P(e) + \sum_{\mathcal{H}_n^0} E_2(e, s_1, s_2) P'(e)}$$

où

$$E_1(e, s_1, s_2) = [\rho'(e) \cdot A_1'(s_1) \cdot A_2'(s_2) - \rho(e) \cdot A_1'(n_1) \cdot A_2'(n_2)]$$

et

$$\text{où } E_2(e, s_1, s_2) = [A_1'(s_1) A_2'(s_2) - A_1'(n_1) A_2'(n_2)]$$

et donc :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} v'(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{\mathcal{H}_n} \rho(e) \cdot P(e)}{\sum_{\mathcal{H}_n} P(e)} = \lim_{n \rightarrow \infty} v(n)$$

Ce résultat est évident si  $Y_i < 1$ ,  $i=1,2$  ;

Dans le cas où  $\max_{i=1,2} (Y_i) \geq 1$ , il suffit de diviser

numérateur et dénominateur par  $[\max_{i=1,2} (Y_i)]^n$  pour

obtenir le même résultat.

Il est évident qu'on a le même résultat pour les sous-réseaux  $R^{(1)}, \dots, R^{(k)}$  ..., en prenant, dans le cas où seule la station 2 possède un taux de service dépendant, le sous-ensemble  $\mathcal{H}_n^0$  tel que :

$$\mathcal{H}_n^0 = \{(n_1, n_2) / (n_1, n_2) \in \mathcal{H}_n, n_2 \leq s_2\}$$

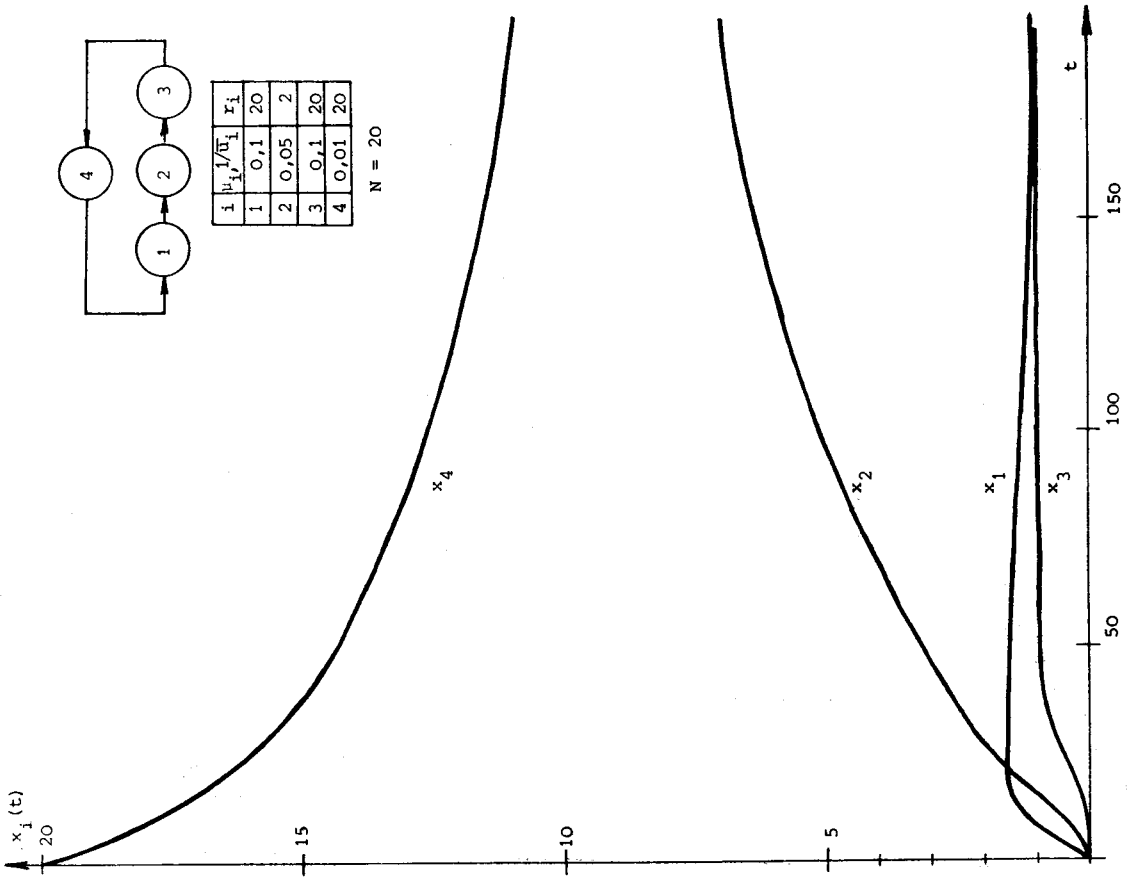


PLANCHE I

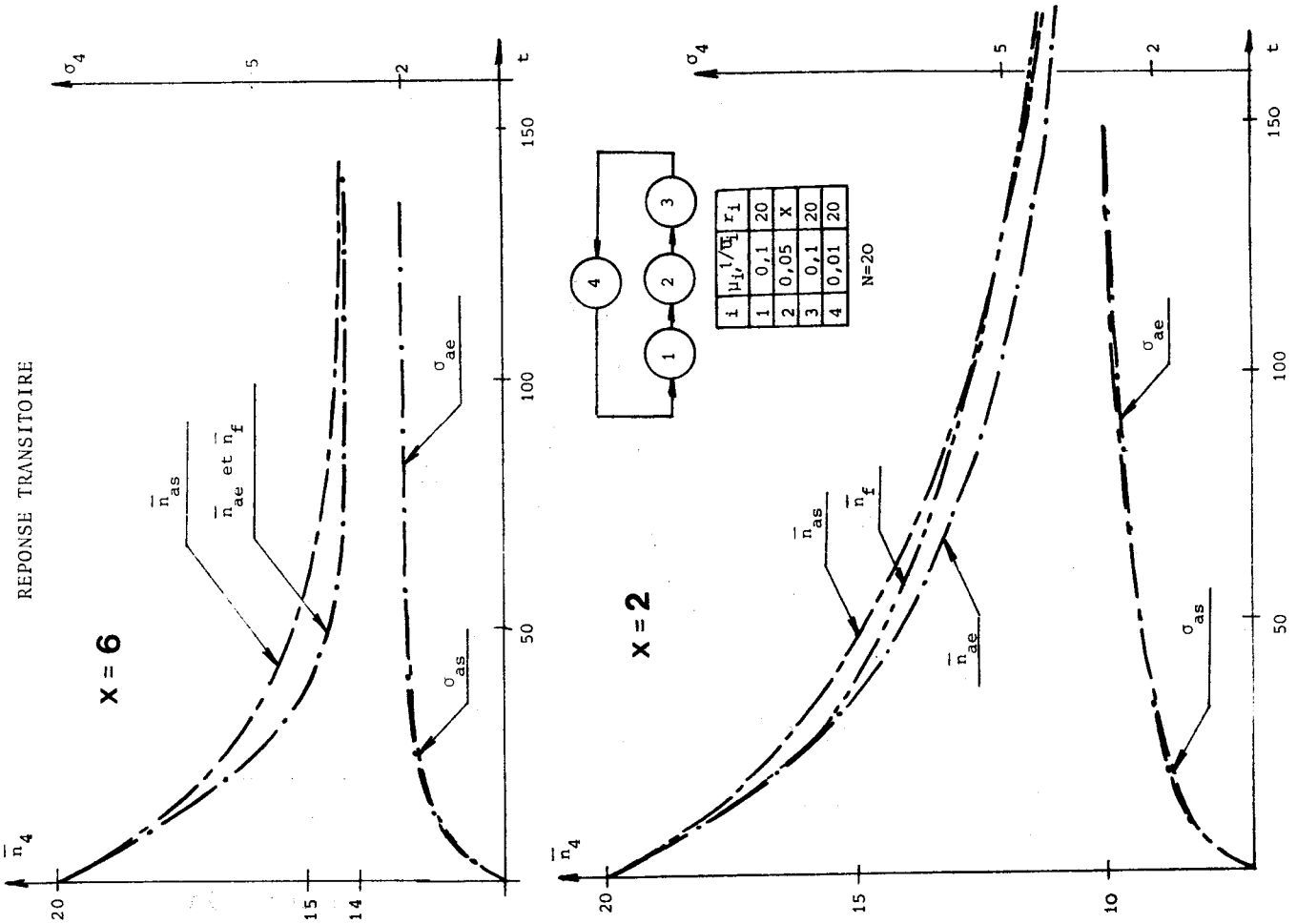


PLANCHE II

| 1 | $\mu_f$     | $1/\bar{u}_1$ | $r_1$ |
|---|-------------|---------------|-------|
| 1 | 1           | 1             | 200   |
| 2 | 0,4         | 3             | 3     |
| 3 | 1           | 200           | 200   |
| 4 | 1           | 200           | 200   |
| 5 | 0,17        | 3             | 3     |
| 6 | 0,25        | 200           | 200   |
| 7 | $\lambda_e$ | 200           | 200   |

N = 200

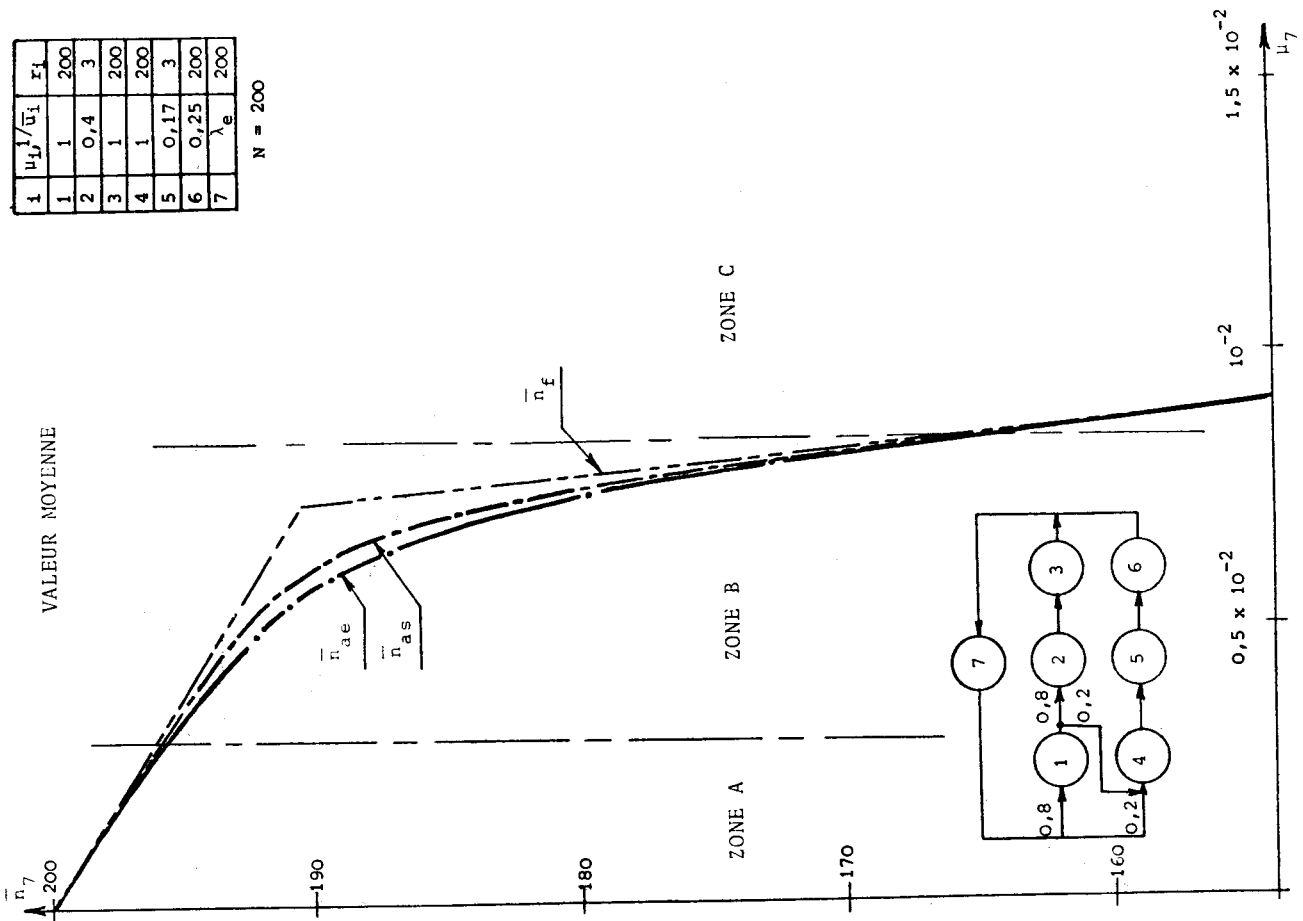


PLANCHE III

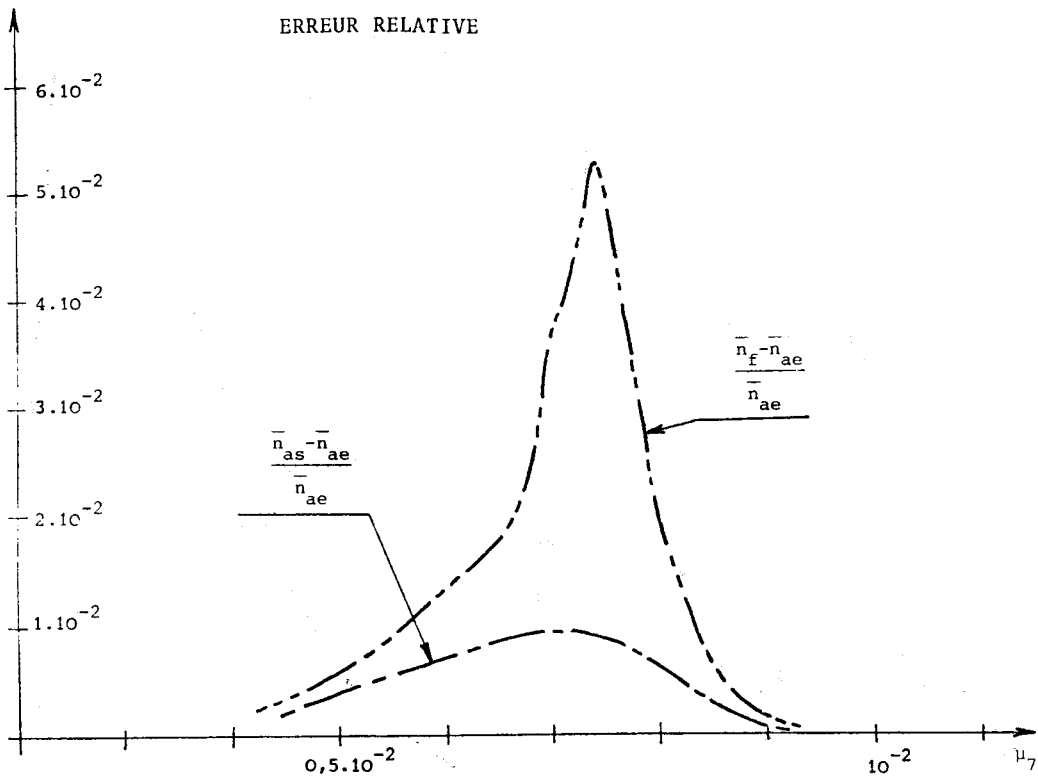


PLANCHE IV

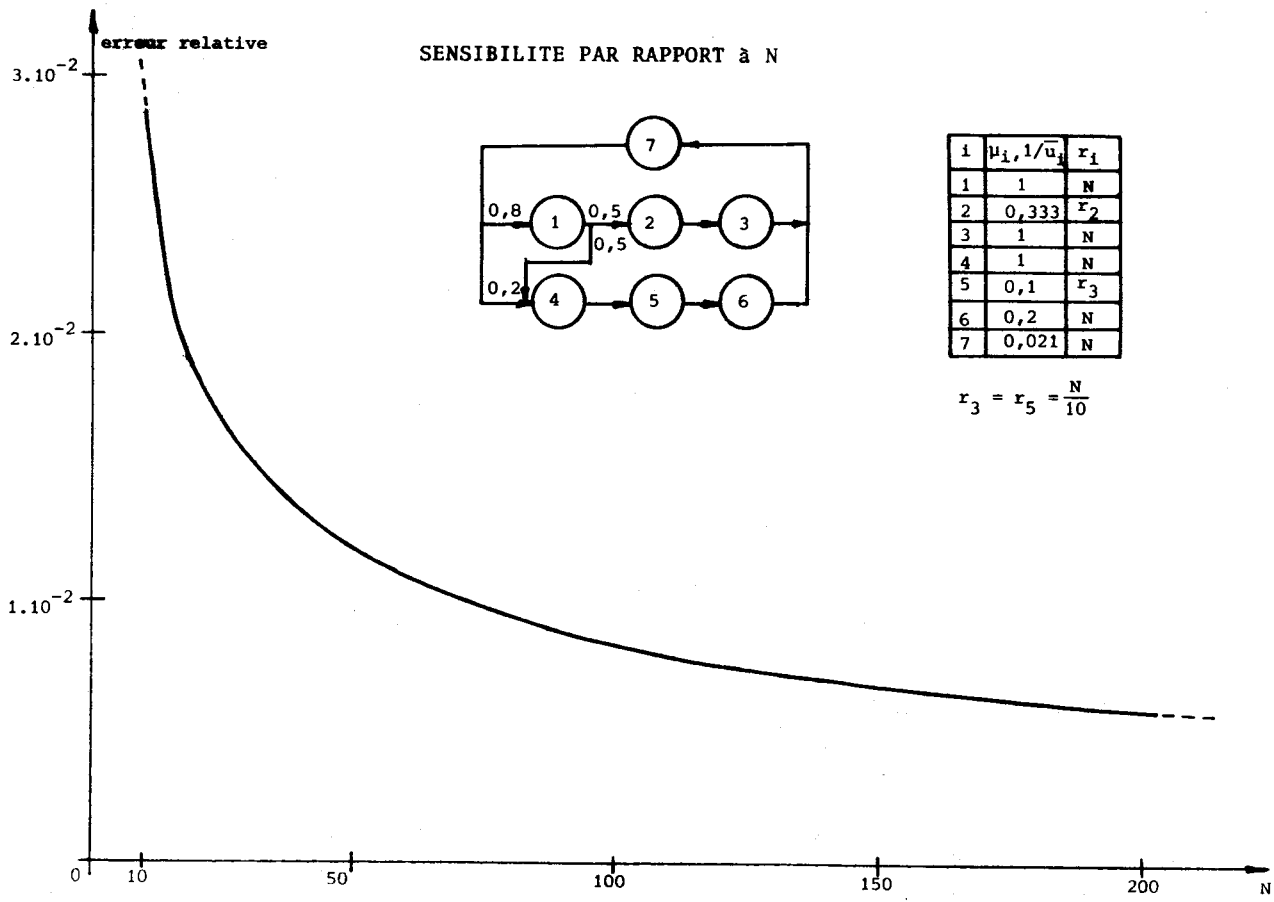


PLANCHE V

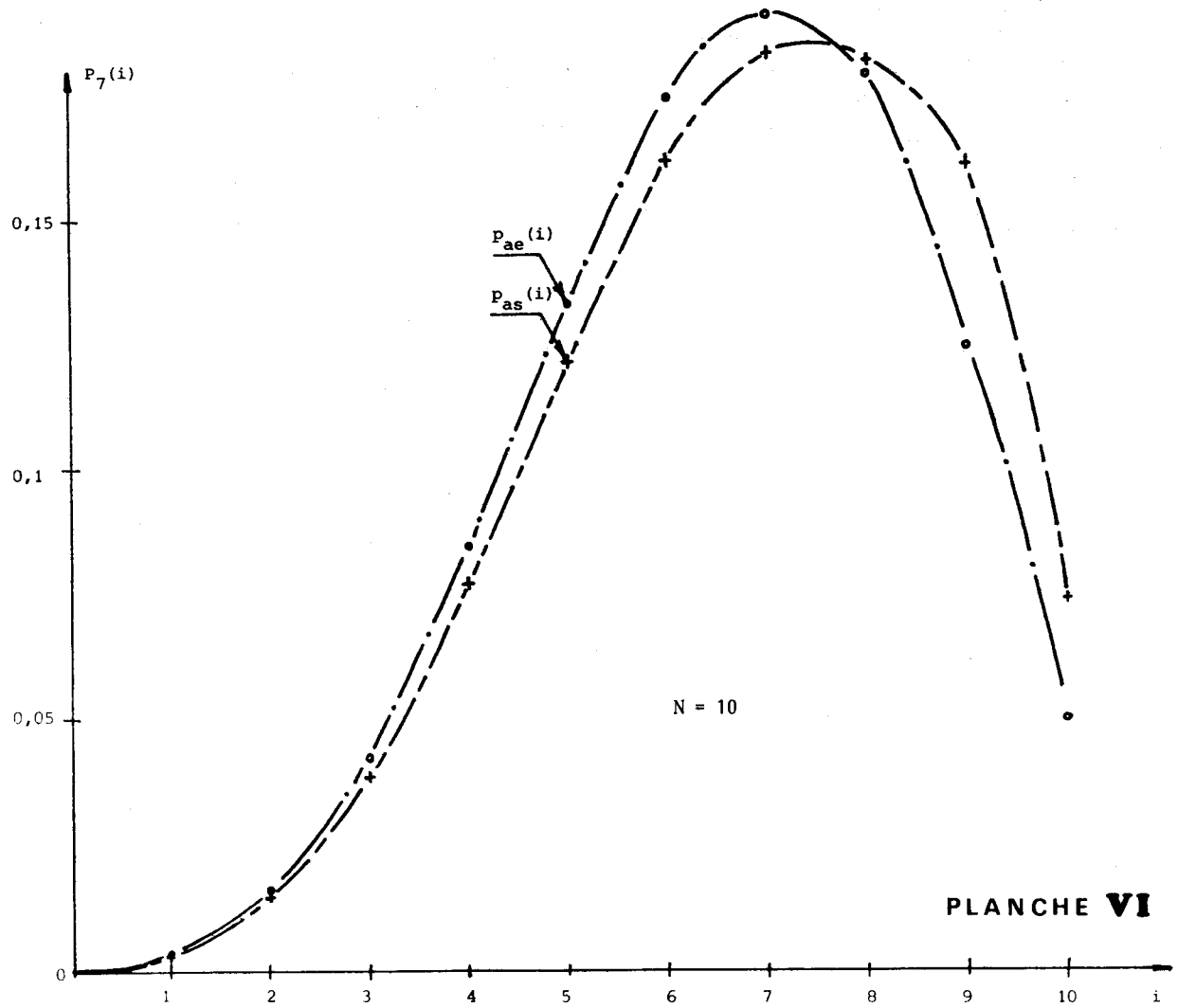


PLANCHE VI