PUBLICATIONS MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUES DE RENNES

B. PETIT

Endomorphismes du tore, g-mesures et schémas de Bernoulli

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1976, fascicule 2
« Séminaire de probabilité I », , exp. n° 11, p. 1-15
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1976___2_A11_0>

ENDOMORPHISMES DU TORE, g-MESURES ET SCHEMAS DE BERNOULLI

par

B. PETIT

INTRODUCTION

Rappelons tout d'abord brièvement la définition d'une g-mesure ([3]), sur un espace métrique compact muni de sa tribu de Borel $(X,\mathcal{B})$. Soit, sur $(X,\mathcal{B})$, une transformation T vérifiant les conditions suivantes :

T.1 Il existe un entier $a > 1$, tel que, pour tout $x \in X$, on ait :

$$\text{Card } T^{-1}\{x\} = a$$

T.2 T est un homéomorphisme local.

T.3 Il existe $\delta_o > o$, et $\rho > 1$ tels que : Pour tout couple $(x,y) \in X^2$, $d(x,y) < \delta_o$ implique $d(Tx, Ty) \geqslant \rho d(x,y)$ (On dira alors que l'endomorphisme T est dilatant)

T.4 Pour tout $\varepsilon > o$, il existe $N(\varepsilon) \in N^*$, tel que : pour tout entier $n \geqslant N(\varepsilon)$, tout couple $(x,y) \in X^2$, il existe $z \in T^{-n}\{y\}$, tel que $d(x,z) < \varepsilon$. (On dira que les ensembles $\overset{+\infty}{\underset{o}{V}} T^{-n}\{y\}$ sont uniformément partout denses).

Donnons-nous alors, sur X, une fonction numérique g satisfaisant à :

G.1 g est strictement positive sur X ;

G.2 g est lipschitzienne d'ordre α, $0 < \alpha \leqslant 1$, sur X ; i.e. : il existe $L \in R_+^*$, tel que pour tout couple $(x,y) \in X^2$:

$$|g(x) - g(y)| \leqslant Ld(x,y)^{\alpha}.$$

G.3. Pour tout x de X, $\sum_{z \in T^{-1}\{x\}} g(z) = 1$

La fonction g nous permet de considérer sur l'espace des fonctions numériques continues sur X, muni de la norme de la convergence uniforme, $\|\quad\|_u$, la contraction φ_g définie par :

$$\varphi_g f(x) = \sum_{z \in T^{-1}\{x\}} g(z)\ f(z) \quad .$$

On sait alors, ([3] ,[6]) qu'il existe une mesure de probabilité unique , notée μ_g , vérifiant :

<u>M.1</u> Pour tout $f \in \mathcal{C}(X)$, $\lim_{n \to \infty} \| \mu_g(f) - \varphi_g^n f \|_u = 0$.

<u>M.2</u> μ_g est <u>T-invariante</u> (i.e. : pour tout $B \in \mathcal{B}$ $\mu_g(T^{-1}B) = \mu_g(B)$) .

<u>M.3</u> μ_g est <u>fortement mélangeante</u> (et par conséquent ergodique) :

Pour tout couple, $(f_1, f_2) \in \mathcal{C}(X)^2$, on a :

$$\lim_{m \to \infty} \mu_g(T^m f_1 . f_2) = \mu_g(f_1).\mu_g(f_2) \quad .$$

On définit ainsi un <u>système dynamique</u>, $(X, \mathcal{B}, \mu_g, T)$.

On pourra dans différents articles, en particulier ([2] et[6]) voir quelques cas particuliers, pour lesquels, <u>l'extension naturelle</u> ([7]) du système ainsi défini est isomorphe à un <u>schéma de Bernoulli</u> .

Dans le cas général, exposé ci-dessus, il est immédiat que :

T est un endomorphisme exact ; $(X, \mathcal{B}, \mu_g, T)$ a une extension naturelle isomorphe à un K-système.

(Voir principalement[7]) .

En fait, à la lumière des travaux de R. Bowen, F. Ledrappier et P. Walters, (voir par exemple [9]), on peut dire que l'extension naturelle du système $(X, \mathcal{B}, \mu_g, T)$ est un schéma de Bernoulli.

Nous nous proposons ici, seulement, d'établir cet isomorphisme dans certains cas d'espèce. A notre avis, cette démonstration met bien en évidence les utilisations des structures de X et T . Enonçons donc le résultat :

Théorème : *Soient* $X = \mathbf{T}^n$, $\mathcal{B}$ *la tribu de Borel sur* X , *et* T *un endomorphisme induit par une matrice carrée* A *d'ordre* n, *à coefficients entiers telle que :*

i) $|\det A| = a > 1$.

ii) Toutes les valeurs propres de A *sont, en module, strictement supérieures à* 1 .

Soit g *une fonction satisfaisant* G.1 *à* G.3 , *alors :*

1° - Il existe une seule g *- mesure* μ_g *; elle vérifie* M.1 *à* M.3

2° - L'extension naturelle du système $(X, \mathcal{B}, \mu_g, T)$ *est isomorphe à un schéma de Bernoulli*

3° - L'entropie h *du système est donnée par* $h = -\int \log g \, d\mu_g$.

Naturellement, la première préoccupation sera de comparer T avec les propriétés T.1 à T.4 .

L'isomorphisme sera, bien entendu, établi grâce aux puissants résultats de D.S. Ornstein ([4], [5]) qui ont déjà servi dans [2] et [6], et dont on pourra trouver les énoncés dans [1].

Pour en finir, notons les résultats suivants, que nous utiliserons dans la suite.

M.4 Pour toute $f \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{B}, \mu_g)$, $\lim\limits_{m \to \infty} \| \varphi_g^m f - \int f d\mu_g \|_1 = 0$

M.5 Pour tout couple (f_1, f_2) de fonctions mesurables positives ou nulles : $\int T^m f_1 . f_2 d\mu_g = \int f_1 . \varphi_g^m f_2 d\mu_g$.

M.6 Pour toute $f \in \mathcal{C}(X)$, $\varphi_g^m f(x) = \sum\limits_{z \in T^{-m}\{x\}} \prod\limits_1^m g(T^{m-i} z) f(z)$.

Nous nous plaçons maintenant dans les hypothèses du théorème.

ENDOMORPHISMES DILATANTS

Remarquons avant tout, que la distance sur $\mathbb{T}^n$ peut s'exprimer :

$$d(x,y) = \operatorname*{Inf}_{p\in\mathbb{Z}^n} ||x-y+p||$$

où, dans le second membre, x et y sont considérés comme points de $\mathbb{R}^n$ et où la norme désigne la norme enclidienne de $\mathbb{R}^n$.

Il est alors évident que :

D.1 Si $(x,y) \in (\mathbb{T}^n)^2$ $d(x,y) \leqslant \frac{\sqrt{n}}{2}$

D.2 $||x-y|| < \frac{\sqrt{n}}{2}$ implique $||x-y|| = d(x,y)$.

Démontrons alors :

Lemme 1 : Soit T un endomorphisme de $\mathbb{T}^n$ induit par une matrice carrée A , d'ordre n, à coefficients entiers, telle que $|\det A| = a > 1$; si toutes les valeurs propres de A sont, en module, > 1, on a :

1 - T.1 , T.2 et T.4 sont vérifiées.

2 - Il existe un èntier $k_o \geqslant 1$, un nombre $\delta_o > 0$ et un nombre $\rho > 2$, tels que : $d(x,y) < \delta_o$ implique $d(T^{ko}x, T^{ko}y) \geqslant \rho d(x,y)$.

dem.: a. T.1 et T.2 sont évidentes avec $a = |\text{dét } A|$, et du fait que A induit un homéomorphisme de $\mathbb{R}^n$ sur lui-même.

b. Avant de démontrer T.4 établissons le 2.

Suivant la démarche de Katznelson dans [2], appelons $V_1, V_2, \ldots, V_r$ les sous-espaces de $\mathbb{R}^n$ invariants par A , sur lesquels les valeurs propres de A sont de modules $\rho_1, \ldots, \rho_r$ respectivement.

Soient $\rho_o = \operatorname*{Inf}_{1\leqslant i\leqslant r} \rho_i$ et $R = \operatorname*{Sup}_{1\leqslant i\leqslant r} \rho_i$; notre hypothèse montre que $\rho_o > 1$, utilisant la forme de Jordan de la matrice A et les résultats de ([8], ch. 7) , pour tout i , il existe deux constantes a_i et b_i strictement positives telles que, pour tout $x \in V_i$ et tout entier $m \geqslant 1$, on ait :

$$a_i m^{k_i} \rho_i^m ||x|| \leqslant ||A^m x|| \leqslant b_i m^{k_i} \rho_i^m ||x|| \qquad (1)$$

où $k_i = \dim V_i$. Sachant que toutes les normes de $\mathbb{R}^n$ sont équivalentes, on peut en conclure à l'existence de α et $\beta > o$, tels que pour tout x de $\mathbb{R}^n$,

$$\alpha m \rho_o^m ||x|| \leqslant ||A^m x|| \leqslant \beta, m^n R^m ||x|| \qquad (2)$$

On en conclut alors que : pour tout couple $(x,y) \in X^2$,

$$\alpha m \rho_o^m \, d(x,y) \leqslant d(T^m x, T^m y)$$

dès que $d(x,y) < \dfrac{\sqrt{n}}{2 m^n R^m}$, grâce à D.2 ; prenant m_o tel que $\rho = \alpha \, m_o \rho_o^{m_o} > 2$ on a la conclusion annoncée.

c. Avant de démontrer T.4, donnons la définition suivante :

Définition Soit T un endomorphisme induit sur $\mathbb{T}^n$ par une matrice A carrée d'ordre n à coefficients entiers telle que $|\det A| = a > 1$. On appellera partition canonique associée à T la partition de $\mathbb{T}^n$ en a parallélotopes sur chacun desquels T est injective, et chacun d'eux ayant $\mathbb{T}^n$ pour image par T.

On peut construire une telle partition de la façon suivante : L'image de $[0,1[^n$ par A est un parallélotope d'aire géométrique $|\det A|$, recouvrant un certain nombre de "cubes" de côté 1, totalement ou partiellement. Considérant les antécédents par A , des intersections de $A([0,1[^n)$ avec ces différents cubes, on constate que ces ensembles forment, dans $\mathbb{T}^n$, une partition de $\mathbb{T}^n$ en a parallélotopes géométriquement égaux.

On peut constater que dans les hypothèses du lemme 1 $A([0,1[^n)$ recouvre au moins un "cube" de côté 1 totalement, si P est son antécédent par A on en déduit que :

$$(x,y) \in P^2 \qquad ||Ax-Ay|| < \sqrt{n}$$

Démontrons alors <u>T.4</u> ; Soit $\mathcal{P}$ la partition canonique à T^{m_o} ; En vertu de (3), on a :

$$\rho||x-y|| \leq ||A^{m_o}x - A^{m_o}y|| \leq \sqrt{n}$$

donc $||x-y|| \leq \frac{\sqrt{n}}{\rho} < \frac{\sqrt{n}}{2}$; donc, grâce à <u>D.2</u> $d(x,y) = \|x-y\|$ sur un parallélotope convenablement choisi. Tous les parallélotopes P de $\mathcal{P}$ étant géométriquement égaux et d étant invariante par translation sur $\mathbb{T}^n$, on a : $\forall\ P \in \mathcal{P}$, diam $P \leq \frac{\sqrt{n}}{\rho}$.

Considérant les partitions canoniques associées à $T^{m_o}, \dots T^{km_o} \dots$, notées respectivement $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \dots, \mathcal{P}_k, \dots$, si $P \in \mathcal{P}_k$, ce qui précède montre que : diam $P < \frac{\sqrt{n}}{\rho^k}$.

D'où <u>T.4</u> ■

Nous supposons, à partir de maintenant que $m_o = 1$.

LA MESURE μ_g

<u>Lemme 2</u> : Soit K un ensemble relativement compact dans $\mathcal{C}([0,1]^n)$; pour tout $f \in K$, posons $\tilde{f}$ la fonction définie sur $\mathbb{T}^n$ par $\tilde{f}(x) = f(x)$ si $x \in [0,1[^n$

1 - $f \longrightarrow \tilde{f}$ est une application continue de $\mathcal{C}([0,1]^n)$ dans $\mathcal{L}^1(X, \mathcal{B}, \mu_g)$;

2 - Pour tout $\varepsilon > o$, il existe $M(\varepsilon)$ tel que : $m \geq M(\varepsilon)$ implique, pour tout $f \in K$

$$||\varphi_g^m \tilde{f} - \int \tilde{f}\, d\mu_g||_1 < \varepsilon \quad .$$

dém. 1. Est évident en remarquant que $\tilde{f} \in L^{\infty}(X, \mathcal{B}, \mu_g)$ et que : $\|\tilde{f}\| \leq \|\tilde{f}\|_{\infty} = \|f\|_u$.

2. L'image de K par l'application continue $f \longrightarrow \tilde{f}$ est donc relativement compacte dans $L^1(X, \mathcal{B}, \mu_g)$, et, par conséquent, on a 2. en vertu de M.4 .

Soit $\mathcal{P}_o$ la partition canonique associée à T ; on pose, pour $m \geq 1$,

$$\mathcal{P}_m = \bigvee_{o}^{m-1} T^{-i} \mathcal{P}_o$$

Lemme 3 : La partition $\mathcal{P}_o$ est génératrice ([1]) .

dém. Soit P un atome de $\mathcal{P}_m$. $P = \bigcap_{o}^{m-1} T^{-i} \mathcal{P}_i$ où $P_i \in \mathcal{P}_o$.
Soit $(x,y) \in P^2$; x et y appartiennent à P_o , et on a, par construction : $\|Ax - Ay\| \leq \sqrt{n}$.
donc, $d(x,y) < \dfrac{\sqrt{n}}{\rho}$;

Par conséquent : $\rho\, d(x,y) < \rho \|x-y\| \leq \|Ax - Ay\|$;
Mais $\|Ax - Ay\| = \|Tx - Ty\| = d(Tx, Ty)$ car Tx et Ty appartiennent à P_1 , et on a alors $d(Tx,Ty) \leq \dfrac{\sqrt{n}}{\rho}$
Par conséquent, $d(x,y) \leq \dfrac{\sqrt{n}}{\rho^2}$

Une récurrence facile montre donc que diam $P \leq \dfrac{\sqrt{n}}{\rho^m}$ (4)
On en conclut donc que tout ensemble de la forme $\bigcap_{o}^{\infty} T^{-i} P_i$, $P_i \in \mathcal{P}_o$, est réduit à, au plus, un point. Tout point pouvant se coder de cette façon, la partition $\mathcal{P}_o$ est bien génératrice.

$\blacksquare$

Il est parfaitement clair que, pour tout $m \geqslant 1$, T^m est injective sur les atomes de $\mathcal{P}_m$, et que $T^m(\bigcap_{0}^{m-1} T^{-i} \mathcal{P}_i) = X$, car pour tout x, et tout P, $T^{-m}\{x\} \cap P$ est réduit à un point.

Il est également évident, qu'étant donné $P \in \mathcal{P}_m$, l'application qui à x, fait correspondre son antécédent dans P par T^m, est uniformément continue sur $[0,1[^m$. Considérons alors

$$g_{m,p}(x) = \prod_{1}^{m} g\,(T^{m-i}z) \qquad z \in T^{-m}\{x\} \cap P .$$

$g_{m,p}$ est uniformément continue sur $[0,1[^m$ et donc prolongeable canoniquement en une fonction $\gamma_{m,p}$ de $\mathcal{C}([0,1]^m)$

Par définition $\tilde{\gamma}_{m,p} = g_{m,p}$.

<u>Lemme 4</u> On a :
$$\sup_{\substack{m \geqslant 1 \\ P \in \mathcal{P}_m}} \frac{\|\gamma_{m,p}\|_u}{\mu_g(P)} = C_1 < +\infty .$$

dem. Soit $P = \bigcap_{0}^{m-1} T^{-i} P_i$, $P_i \in \mathcal{P}_o$.

$$\mu_g(P) = \int 1_P(x)\, d\mu_g(x)$$
$$= \int \varphi_g 1_P(x)\, d\mu_g(x)$$

Mais $\varphi_g 1_P(x) = g(z)\, 1_{TP}(x)$ car $TP = \bigcap_{0}^{m-2} T^{-i} P_{i+1}$, et, où $Tz = x$. Donc, si $z_o \in P$, on a :

$$|\mu_g(P) - g(z_o)\, \mu_g(TP)| \leqslant \int |g(z) - g(z_o)|\, 1_{TP}(x)\, d\mu_g(x) ,$$

ce qui, grâce à <u>G.2</u> et à (4) , donne :

$$\left| \frac{\mu_g(P)}{\mu_g(TP)} - g(z_o) \right| \leqslant \frac{n^{\alpha/2}}{\rho^{m\alpha}} \cdot L$$

Par un procédé de récurrence immédiat :

pour $0 \leqslant k \leqslant m-1$
$$\left| \frac{\mu_g(T^kP)}{\mu_g(T^{k+1}P)} - g(T^k z_o) \right| \leqslant \frac{n^{\alpha/2}}{\rho^{\alpha(m-k)}}\; L \qquad (5)$$

On aura donc :

$$\left|\log \mu_g(P) - \log \prod_1^m g(T^{m-i} z_o)\right| \leqslant \sum_{i=o}^{m-1} \left|\log \frac{\mu_g(T^i P)}{\mu_g(T^{i+1} P)} - \log g(T^i z_o)\right|$$

si on pose $c = \operatorname{Inf}_{x \in X} g(x)$, $c > 0$ grâce à G.1 , le théorème des accroissements finis appliqué à log et (5) nous donnent :

$$\left|\log \mu_g(P) - \log \prod_1^m g(T^{m-i} z_o)\right| \leqslant \frac{L}{c} n^{\alpha/2} \sum_1^m \frac{1}{\rho^{\alpha(m-k)}} = C'_1 < +\infty$$

Passant à l'exponentielle, on obtient l'assertion cherchée avec $C_1 = e^{C'_1}$ ◪

Enfin, nous terminerons ce paragraphe par le point essentiel :

Lemme 5 La famille $\left\{ \dfrac{\gamma_{m,p}}{\|\gamma_{m,p}\|_u} \; m \geqslant 1 , P \in \mathcal{P}_m \right\}$ est relativement compacte dans $\mathcal{C}([0,1]^n)$.

dém. Grâce au théorème d'Arzéla-Ascoli, il nous suffit de montrer que cette famille est équicontinue dans $\mathcal{C}([0,1]^n)$.

Nous allons, pour ce faire, calculer $\Delta(m,P,x,x') = |\log\gamma_{m,p}(x) - \log\gamma_{m,p}(x')|$

On a, sur $[o,1[^n$:

$$\Delta(m,P,x,x') \leqslant \sum_{k=1}^m \left|\log g(T^{m-k} z) - \log g(T^{m-k} z')\right|$$

où $z \in T^{-m}\{x\} \cap P$ et $z' \in T^{-m}\{x'\} \cap P$

Or on sait que $T^{m-k} z$ et $T^{m-k} z'$ appartiennent au même atome de $\mathcal{P}_k$. De sorte que : $d(T^{m-k} z, T^{m-k} z') \leqslant \dfrac{d(x,x')}{\rho^k}$.

Par suite, appliquant une nouvelle fois le théorème des accroissements finis, il vient :

$$\Delta(m,P,x,x') \leqslant d(x,x')^\alpha \frac{L}{c} \sum_1^m \frac{1}{\rho^{\alpha k}}$$

$$\leqslant C_2 \cdot d(x,x')^\alpha$$

De cette inégalité, nous tirons :

$$\left|\frac{\gamma_{m,p}(x)}{||\gamma_{m,p}||_u} - \frac{\gamma_{m,p}(x')}{||\gamma_{m,p}||_u}\right| = \left|\exp\log\frac{\gamma_{m,p}(x)}{||\gamma_{m,p}||_u} - \exp\log\frac{\gamma_{m,p}(x')}{||\gamma_{m,p}||_u}\right|$$

$$\leqslant C_3 \left|\log\gamma_{m,p}(x) - \log\gamma_{m,p}(x')\right| \qquad (6)$$

Donc :

$$\left|\frac{\gamma_{m,p}(x)}{||\gamma_{m,p}||_u} - \frac{\gamma_{m,p}(x')}{||\gamma_{m,p}||_u}\right| \leqslant C_4 \ d(x,x')^{\alpha} \quad .$$

((6) s'obtient en appliquant encore une fois le théorème des accroissements finis à la fonction exponentielle).

Cette inégalité reste vraie sur $[0,1]^n$; ce qui achève la démonstration du lemme 5 .

<u>Corollaire</u> . La famille $\{\frac{g_{m,p}}{\mu_{g(p)}} , \quad m \geqslant 1, \quad P \in \mathcal{P}_m\}$ est relativement compacte dans $L^1(X,\mathcal{B},\mu_g)$.

(7)

dem : Résulte immédiatement des lemmes 2, 4 et 5.

LE THEOREME D'ISOMORPHISME

Rappelons d'abord le résultat fondamental d'Ornstein.
Soit $(X,\mathcal{B},\mu, T)$ un système dynamique ergodique : s'il existe une partition génératrice finie mesurable $\mathcal{P}_o$ de X telle que :

(B) Pour tout $\varepsilon > o$, il existe un entier $N(\varepsilon)$ tel que si $m \geqslant 1$, $q \geqslant 1$ et $p \geqslant N(\varepsilon)+n$, les partitions $\mathcal{P}_m$ et $\mathcal{P}_{p,q} = \bigvee_{p}^{p+q-1} T^{-i} \mathcal{P}_o$

soient ε-indépendantes, l'extension naturelle du système $(X,\mathcal{B},\mu,T)$ est isomorphe à un schéma de Bernoulli.

Nous allons donc établir :

<u>Proposition 1</u>. *Pour $p > 2$ et $m_0 = 1$, la partition $\mathcal{P}_0$ vérifie (B).*

dém. On sait déjà que cette partition est génératrice (lemme 3). Les atomes de $\mathcal{P}_{p.q}$ sont de la forme $T^{-p}Q$, où $Q \in \mathcal{P}_q$.

Ecrivons la condition d' ε-indépendance :

$$S(m,p,q) = \sum_{P\in\mathcal{P}_m} \cdot \sum_{Q\in\mathcal{P}_q} |\mu_g(P\cap T^{-p}Q)-\mu_g(P)\,\mu_g(Q)| < \varepsilon$$

$$\text{Or} \quad \mu_g(P\cap T^{-p}Q) = \int 1_P\, 1_{T^{-p}Q}\, d\mu g$$

$$= \int \varphi_g^p\, 1_P \cdot 1_Q\, d\mu g \qquad \text{(cf. } \underline{\text{M.5.}}\text{)}$$

$$\text{Donc} \quad S(m,p,q) \leq \sum_{P\in\mathcal{P}_m} \sum_{Q\in\mathcal{P}_q} \int 1Q\, |\varphi_g^p\, 1_P - \mu_g(P)|\, d\mu_g$$

Or $\sum_{Q\in\mathcal{P}_q} 1Q = 1$, donc :

$$S(m,p,q) \leq \sum_{P\in\mathcal{P}_m} ||\varphi_g^p\, 1_P - \mu_g(P)||_1$$

Remarquant que $\varphi_g^p 1_P = \varphi_g^{p-m} \cdot \varphi_g^m 1 = \varphi_g^{p-m}\, g_{m,p}$ (cf. <u>M.6.</u>), grâce au lemme 2 et au corollaire du lemme 5, on peut conclure : pour $p-m \geq M(\varepsilon)$ $||\varphi_g^p\, 1_P - \mu g(P)||_1 < \varepsilon \cdot \mu_g(P)$.

d'où $S(m,p,q) < \varepsilon$. ◪

<u>Proposition 2</u>. *L'entropie h du système $(X,\mathcal{B},\mu_g T)$ est donnée par :* $h = -\int_X \log g\, d\mu_g$.

dem. La partition $\mathcal{P}_0$ étant génératrice, le théorème de Mc Millan montre que :

$$h = -\lim_{m \to +\infty} \frac{1}{m} \sum_{P \in \mathcal{P}_m} \log \mu_g(P) \, . \, \mu_g(P) \, . \qquad (8)$$

Or nous savons, (cf. lemme 4) que :

$$- C'_1 + \log \prod_1^m g(T^{m-i} z_o) \leqslant \log \mu_g(P) \leqslant C'_1 + \log \prod_1^m g(T^{m-i} z_o)$$

pour tout $z_o \in P$. Donc :

$$- \frac{C'_1}{m} + \frac{1}{m} \sum_{P \in \mathcal{P}_m} \log \prod_1^m g(T^{m-i} z_p) \; \mu_g(P) \leqslant u_m \leqslant \frac{C'_1}{m} + \sum_{P \in \mathcal{P}_m} \log \prod_1^m g(T^{m-i} z_p) \; \mu_g(P) \; .$$

où $u_m = \frac{1}{m} \sum_{P \in \mathcal{P}_m} \log \mu_g(P) . \mu_g(P)$.

Or il est aisé de constater que :

$$\sum_{P \in \mathcal{P}_m} \log \prod_1^m g(T^{m-i} z_P) \; \mu_g(P) = \sum_{P \in \mathcal{P}_m} \log g(z_P) \; \mu_g(P) +$$

$$\sum_{P \in \mathcal{P}_{m-1}} \log g(z'_P) \; \mu_g(P) + \ldots + \sum_{P \in \mathcal{P}_0} \log g(z_P^{(m)}) \; \mu_g(P) \qquad (9)$$

Comme, d'autre part : $\lim_{m \to \infty} \sum_{P \in \mathcal{P}_m} \log g(z_P) \; \mu_g(P) = \int \log g \, d\mu_g$

(8) et (9) nous montrent donc que :

$$h = - \int \log g \, d\mu_g$$

CAS GENERAL

Ici nous ne supposons plus $m_o = 1$. Nous devons nous assurer d'abord de l'existence et de l'unicité de la g-mesure.

Choisissons m_o tel que $\alpha m_o \; \rho_o^{m_o} = \rho > 2$ (cf. Lemme 1) .

Sur X considérons la fonction $g'(x) = \prod_{i=1}^{m_o} g(T^{m_o - i} x)$.

Cette fonction vérifie naturellement les propriétés <u>G.1</u> à <u>G.3</u> .

Soit ν la mesure associée à g' et à T^{m_o}. On remarque immédiatement que $\varphi_g^k f = \varphi_g^{km_o} f$ pour toute $f \in \mathcal{C}(X)$. La suite $\{\varphi_g^{km_o} f\}\ k \in \mathbb{N}$ converge donc uniformément vers $\nu(f)$. Or si on se reporte à la démonstration d'existence (th. 1 de [6]), on voit qu'il suffit qu'un sous-suite converge uniformément pour que toute la suite $\{\varphi_g^k f\}\ k \in \mathbb{N}$ converge uniformément, ceci à cause du fait que φ_g est une contraction de $\mathcal{C}(X)$, propriété qui ne dépend que de g et non de T.

On a donc $\nu = \mu_g$, et, toutes les autres propriétés.

<u>Proposition 3</u>. *Le système $(X, \mathcal{B}, \mu_g, T)$ est un facteur ([1]) du système $(X, \mathcal{B}, \mu_g, T^{m_o})$.*

dem. Pour tout $P_i \in \mathcal{P}_{m_o}$ (partition canonique à T^{m_o}), posons $Q_i = T^{m_o - 1} P_i$, les Q_i forment une partition de X en a parallélotopes sur lesquels T est injective et $TQ_i = X$.

La partition $\{Q_i\} = Q_o$ est génératrice. En effet : tout point x de X se code de façon unique $x = \bigcap_0^\infty T^{-i} Q_i$. Chacun de ces ensembles est au plus réduit à un point car :

$$\bigcap_0^\infty T^{-i} Q_i = \bigcap_0^\infty T^{-i+m_o-1} P_i \subset \bigcap_{j=1}^\infty T^{-m_o j+1+m_o-1} P_{jm_o-1}$$

$$= \bigcap_{j=1}^\infty T^{-m_o(j-1)} P_{jm_o-1} ,$$

ce qui nous permet de conclure grâce au lemme 3 appliqué à T^{m_o}.

Si $x \in X$, il existe une suite unique $\{P_i\} \subset \mathcal{P}_{m_o}$ telle que

$$x = \bigcap_0^\infty T^{-m_o i} P_i$$

Posons $\phi(x) = \bigcap_0^\infty T^{-i}(T^{m_o-1} P_i)$

- Il est parfaitement évident que $\phi . T^{m_0} = T . \phi$
- ϕ est mesurable : il suffit de voir que $\phi^{-1} Q = \bigcup_{T^{m_0 - 1} P = Q} P$
- Ce même argument montre que $\phi \mu_g = \mu_g$

ϕ étant sujective, la proposition 3 est établie .

∎

<u>Corollaire</u> : L'extension naturelle de $(X, \mathfrak{B}, \mu_g, T)$ est isomorphe à un schéma de Bernoulli.

dem. Propositions 1 et 3 et résultats de [1], [4] et [5] .

<u>Proposition 4</u> . *L'entropie du système $(X, \mathfrak{B}, \mu_g, T)$ est donnée par :* $h = - \int \log g \, d\mu_g$.

dem. La proposition 2 , montre que h', l'entropie de $(X, \mathfrak{B}, \mu_g, T^{m_0})$ est donnée par :

$$h' = - \int \log \prod_{1}^{m_0} g(T^{m_0 - i} x) \quad d\mu_g(x) \quad ;$$

puisque μ_g est T-invariante, il vient :

$$h' = - m_0 \int \log g \, d\mu_g \quad .$$

Or on sait que $h' = m_0 h$, et par suite $h = - \log g \, d\mu_g$ ∎

Conclusion : Les propositions 1,2,3,4 et les remarques du début du dernier paragraphe, achèvent la démonstration du théorème que nous nous proposions d'établir.

REFERENCES

(1) J.P. CONZE

Le théorème d'isomorphisme d'Ornstein et la classification des systèmes dynamiques en théorie ergodique

Séminaire Bourbaki, 420, 25ème année, 1972-73

(2) Y. KATZNELSON

Ergodic automorphisms of T^n are Bernoulli shifts

Israel J. of Math., 10, n° 2, 186-195 (1971)

(3) M. KEANE

Strongly mixing g-measures

Inv. Math., 16, 309-324 (1972)

(4) D.S. ORNSTEIN

Two Bernoulli shifts with infinite entropy are isomorphic advances in Math., 5, 339-348 (1970)

(5) D.S. ORNSTEIN

Imbedding Bernoulli shifts in flows

Construction to Ergodic Theory and Prob., 178-218, Springer-Verlag, (1970)

(6) B.PETIT

Schémas de Bernoulli et g-mesures

C.R. Acad. Sc. Paris, 280, série A, 17-20 (1975)

(7) V.A. ROHLIN

Exact endomorphisms of a Lebesgue space

Amer. Math. Soc. translations series 2, 64, 244-272 (1967)

(8) R. THEODOR

Analyse numérique linéaire

Cours du CNAM, Editions scientifiques Riber, Paris

(9) P. Walters

A generalised Ruelle-Perron-Frobenius theorem and some applications

International Conference on Dynamical Systems in Mathematical Physics (Sept. 1975, Rennes, France).