PUBLICATIONS MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUES DE RENNES

GUY METIVIER

Fonction spectrale et valeurs propres d'une classe d'opérateurs non elliptiques

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1976, fascicule 1
« Séminaires d'analyse fonctionnelle », , p. 1-54
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1976___1_A11_0>

FONCTION SPECTRALE ET VALEURS PROPRES D'UNE CLASSE D'OPERATEURS NON ELLIPTIQUES

Guy METIVIER

I.M.S.P.
Département de Mathématiques
Parc Valrose
06023 NICE CEDEX
France

I. INTRODUCTION

On s'intéresse à la fonction spectrale et aux valeurs propres d'opérateurs hypoelliptiques du type :

$$G = \sum_{i=1}^{p} X_i^* X_i + c . \tag{1.1}$$

les $X_1, \dots, X_p$ étant des champs de vecteurs réels C^∞ ; ces opérateurs sont ceux qui sont formellement autoadjoints positifs dans la classe des opérateurs introduits par Hörmander ([7]) :

$$- \sum_{i=1}^{p} X_i^2 + X_o \tag{1.1'}$$

X_o étant un opérateur différentiel réel d'ordre ≤ 1 . Ces opérateurs ont été étudiés du point de vue de la sous-ellipticité et de l'hypoellipticité dans ([7]) , [10] , [13]) (voir aussi [9] pour les opérateurs (1.1)). Rothschild et Stein ([14]) ont construit des parametrix pour ce type d'opérateurs et obtenu des inégalités fines de type L^p , Lipschitz , etc... (voir aussi les cas particuliers [4] , [5]) ; dans ([3]) . Folland a étudié le cas "modèle" d'opérateurs sur un groupe de Lie nilpotent. On renvoie à ([12]) pour une étude détaillée des opétareurs de type (1.1').

Nous nous plaçons dans la situation suivante : soit M une variété ([1]) réelle, C^∞, de dimension n, munie d'une densité positive notée dx.; soit c une fonction réelle C^∞ sur M.

Soient $X_1,\dots,X_p$ des champs de vecteurs réels, C^∞ sur M. Pour toute suite $I = (i_1,\dots,i_k) \in \{1,\dots,p\}^k$ on note $|I| = k$ la longueur de I et X_I le champ :

$$X_I = [X_{i_1}[X_{i_2}\dots[X_{i_{k-1}}, X_{i_k}]\dots]$$

On convient de noter si $I = (i)$ est de longueur 1 : $X_I = X_i$.

Pour tout entier k et tout $x \in M$, $V_k(x)$ désigne le sous-espace de T_xM engendré par les vecteurs $X_I(x)$ pour $|I| \leq k$.

Soit ω un ouvert de M ; nos hypothèses fondamentales sont les suivantes :

(1.2) $\begin{cases} \text{pour tout entier } k \text{ la dimension de } V_k(x) \text{ est constante} \\ \text{pour } x \in \omega \text{ ; on la note } \nu_k \text{ et on convient que } \nu_0 = 0 . \end{cases}$

(1.3) $\begin{cases} \text{il existe un entier } k \text{ tel que } \nu_k = n \text{ ; soit } r \text{ l'entier tel} \\ \text{que } \nu_{r-1} < \nu_r = n . \end{cases}$

Remarquons que la suite $\nu_0,\dots,\nu_r$ est strictement croissante.

Les hypothèses (1.2) et (1.3) entraînent la sous-ellipticité et l'hypoellipticité de l'opérateur G sur ω ([7]) , [10] , [13]) : ces hypothèses sont même beaucoup plus fortes que la condition suffisante de Hörmander ([7]) qui est que pour tout x (de ω) il existe un entier k tel que $\dim V_k(x) = n$.

Soit Ω un ouvert de M et soit $(A,D(A))$ une réalisation minorée autoadjointe dans $L^2(\Omega\ ;\ dx)$ de G . (Une telle réalisation existe toujours si c est minorée sur Ω).

Remarquons pour la suite que $\mathcal{D}(\Omega) \subset D(A^*) = D(A)$.

Notons $E(\lambda)$ la résolution de l'identité associée à A : on déduit de la sous ellipticité de G que les fonctions de $D(A^\infty) = \bigcap_{k\geq 0} D(A^k)$ sont C^∞ sur $\omega \cap \Omega$; $E(\lambda)$ prenant ses valeurs dans $D(A^\infty)$, il en résulte que son noyau $e(\lambda\ ;\ x,y)$ est C^∞ sur $(\omega \cap \Omega) \times (\omega \cap \Omega)$. Nous avons alors:

<u>Théorème 1.1.</u> : Il existe une fonction γ continue et strictement positive sur $\omega \cap \bar{\Omega}$ telle que si l'on pose $\nu = \sum_{k=1}^{r} k(\nu_k - \nu_{k-1})$, on ait :

$$\forall\, x \in \omega \cap \Omega : \lim_{\lambda \mapsto +\infty} \lambda^{-\nu/2}\, e(\lambda\ ;\ x,x) = \gamma(x)$$

la convergence étant uniforme sur les parties compactes de $\omega \cap \Omega$.

Ce théorème admet un corollaire immédiat : si M est une variété compacte et si $\omega = M$ i.e. si les conditions (1.2) et (1.3) sont satisfaites sur M, il résulte toujours de la sous-ellipticité de G que pour un $\varepsilon > 0$ $D(A) \subset H^{\varepsilon}(M)$ ([7] , [9] , [10]). Par suite le spectre de A est constitué d'une suite de valeurs propres λ_j, réelles tendant vers $+\infty$. (On répète chaque valeur propre conformément à sa multiplicité). Notant $N(\lambda) = \sum_{\lambda_j \leq \lambda} 1$ on a $N(\lambda) = \int_M e(\lambda\,;x,x)\,dx$ et il résulte du théorème 1.1 le

<u>Corollaire 1.2.</u> sous ces hypothèses on a :

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \lambda^{-\nu/2} \cdot N(\lambda) = \int_M \gamma(x)\,dx\,.$$

Revenant à un problème sur $\Omega \subset M$, se pose la question d'étudier les valeurs propres d'un problème aux limites sur Ω. Nous supposons maintenant que $\bar{\Omega}$ est compact et que $\omega \supset \bar{\Omega}$; nous supposons aussi que $\partial\Omega$ est de mesure nulle dans M. c étant bornée sur Ω, l'opérateur $(G, \mathcal{D}(\Omega))$ est semi-borné et symétrique; soit $(A, D(A))$ l'extension de Friedrichs de $(G, \mathcal{D}(\Omega))$. Alors $D(A^{\frac{1}{2}})$ est d'adhérence de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans l'espace :

$$\{ u \in L^2(\Omega) \;/\; \forall i = 1,\ldots,p : X_i u \in L^2(\Omega) \}\,.$$

Il résulte de ([7] , [9] , [10]) qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $D(A^{\frac{1}{2}}) \subset H_0^{\varepsilon}(\Omega)$. Par suite le spectre de A est à nouveau constitué d'une suite de valeurs propres λ_j réelles tendant vers $+\infty$. Notant encore $N(\lambda) = \sum_{\lambda_j \leq \lambda} 1$ on a $N(\lambda) = \int_\Omega e(\lambda\,;x,x)\,dx$ et

<u>Théorème 1.3.</u> sous ces nouvelles hypothèses on a :

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \lambda^{-\nu/2}\, N(\lambda) = \int_\Omega \gamma(x)\,dx\,.$$

<u>Remarques</u> <u>1.</u> La fonction γ est continue sur $\bar{\Omega}$ d'après le théorème 1.1 et $0 < \int_\Omega \gamma(x)\, dx < +\infty$.

<u>2.</u> Le théorème 1.3 n'est pas un corollaire immédiat du théorème 1.1 :il faut établir en plus du théorème 1.1 des majorations d'intégrales du type : $\int_{\Omega \setminus K} e(\lambda\, ;\, x,x)\, dx$ pour K compact $\subset \Omega$.

La démonstration des théorèmes 1.1 et 1.3 se fait en plusieurs étapes; on commence par transporter les champs X_i et l'opérateur $\mathcal{G}$ d'un voisinage de $x_0 \in \omega \cap \Omega$ sur un voisinage de l'unité d'un groupe de Lie nilpotent stratifié ([3] , [6] , [14]) , de sorte que les champs images des X_i soient convenablement approchés par des champs invariants à gauche $\hat{X}_i$; nous nous distinguons de ([6] , [14]) en considérant des groupes de même dimension que M et ceci grâce à nos hypothèses (1.2)(1.3). Les opérateurs $\hat{\mathcal{G}} = -\sum_{i=1}^{p} \hat{X}_i^2$ sont homogènes (de degré 2) sous l'action d'une famille de dilatations h_t ([3] , [14]) et plus généralement notant $\mathcal{G}_1$ l'opérateur sur le groupe déduit de $\mathcal{G}$, et $\mathcal{G}_t$ l'image de $t^{-2}\mathcal{G}_1$ par h_t on a la convergence, dans un sens raisonnable, de $\mathcal{G}_t$ vers $\hat{\mathcal{G}}$ lorsque $t \mapsto +\infty$; les h_t jouent ici le rôle des homotéties pour les opérateurs elliptiques. On exprime alors la fonction spectrale $e(\lambda)$ de $\mathcal{G}$ à l'aide de la fonction spectrale e_t de $\mathcal{G}_t$ évaluée au point $t^{-2}\lambda$. Prenant $t \sim \sqrt{\lambda}$ on transforme alors le problème du comportement asymptotique de $e(\lambda)$ en un problème de perturbations: déduire de la convergence $\mathcal{G}_t \mapsto \hat{\mathcal{G}}$

la convergence à λ_o fixe de $e_t(\lambda_o)$.

2. ESTIMATIONS de NOYAUX

2.1 Régularité

Nous rappelons d'abord le résultat de sous-ellipticité concernant les opérateurs (1.1) ([7], [9], [10], [13]) mais en précisant l'uniformité des estimations pour une famille d'opérateurs. Nous utiliserons les notations suivantes: pour $s \in \mathbb{R}$, $H^s(\mathbb{R}^n)$ est l'espace de Sobolev usuel d'ordre s ; on note $\|.\|_s$ sa norme et Λ^s désigne l'opérateur $(1+|D|^2)^{s/2}$ défini par transformation de Fourier.

Pour un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$, on note $T(\Omega)$ l'algèbre de Lie des champs de vecteurs réels C^∞ sur Ω. Pour $X \in T(\Omega)$ ad X désigne l'opérateur dans $T(\Omega)$ défini par : $(\mathrm{ad}\, X)(Y) = [X,Y]$.

Pour $X_j \in T(\Omega)$ $(j = 1,\ldots,p)$, $\mathcal{L}(X_1,\ldots,X_p)$ désigne l'algèbre de Lie engendrée par $X_1,\ldots,X_p$; si I est la suite $(i_1,\ldots,i_k) \in \{1,\ldots,p\}^k$ on note $|I| = k$ et

$$X_I = (\mathrm{ad}\, X_{i_1} \ldots \mathrm{ad}\, X_{i_{k-1}})(X_{i_k}) . \tag{2.1}$$

Soit ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$; soit $\mathcal{K}$ une partie compacte de $\{T(\omega)\}^p$ telle que :

$$\forall\, (X_1,\ldots,X_p) \in \mathcal{K} \;,\; \forall\, x \in \omega : \mathcal{L}_x(X_1,\ldots,X_p) = \mathbb{R}^n . \tag{2.2}$$

Soit d'autre part $\mathcal{B}$ un borné de $C^\infty(\omega)$; on considère alors la famille $\mathfrak{a}$ des opérateurs

$$(2.3) \qquad G = \sum_{i=1}^{\mu} X_i^* X_i + c .$$

pour $(X_1,\dots,X_p) \in \mathcal{K}$ et $c \in \mathcal{B}$.

Nous avons alors ([7], [9], [10], [13]).

<u>Théorème 2.1.</u> soit $\omega_1 \subset\subset \omega^0$ (2) ; il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $s \in \mathbb{R}$ et tout couple de fonctions φ et Ψ de $\mathcal{D}(\omega_1)$ vérifiant $\varphi \cdot \Psi = \varphi$, il existe une constante C telle que pour tout $G \in \mathfrak{a}$ et tout $u \in \mathcal{D}'(\omega_1)$ pour lequel $\Psi u \in H^s(\omega_1)$ et $\Psi G u \in H^s(\omega_1)$, on ait $\varphi u \in H^{s+\varepsilon}(\omega_1)$ et :

$$(2.4) \qquad \| \varphi u \|_{s+\varepsilon} \leq C \{ \| \Psi G u \|_s + \| \Psi u \|_s \}$$

<u>Remarques</u> <u>1.</u> Les normes dans (2.4) sont celles de $H^t(\mathbb{R}^n)$ ($t = s$ ou $t = s + \varepsilon$) : on identifie en effet, en le prolongeant par 0 , un élément de $H^t(\omega_1)$ à support compact dans ω_1, élément de $H^t(\mathbb{R}^n)$.

<u>2.</u> Comme on l'a déjà signalé, seule l'uniformité pour $G \in \mathfrak{a}$, des constantes C de (2.4) est à vérifier. C'est ce que nous faisons maintenant en reprenant les principales étapes de la démonstration donnée en ([10])

<u>Lemme 2.2.</u> pour tout $\omega_1 \subset\subset \omega$, il existe un borné $\mathcal{B}_0$ de $C^\infty(\bar{\omega}_1)$, et un entier r tels que pour tout $(X_1,\dots,X_p) \in \mathcal{K}$, il existe des fonctions $a_{j,I}$ ($j = 1,\dots,n$ et $|I| \leq r$) de $\mathcal{B}_0$ telles que sur $\bar{\omega}_1$ on ait :

$$(2.5) \qquad \forall\, j = 1,\dots,n : \frac{\partial}{\partial x_j} = \sum_{|I| \leq r} a_{j.I} \cdot X_I$$

Démonstration : soit $x_0 \in \bar{\omega}_1$ et soit $(\hat{X}_1,\dots,\hat{X}_p) \in \mathcal{K}$; d'après (2.2) il existe r et des suites $I_1,\dots,I_n$ avec $|I_j| \leq r$, telles que les vecteurs $\hat{X}_{I_j}(x_0)$ $(j = 1,\dots,n)$ forment une base de $\mathbb{R}^n$. Il existe alors un voisinage V de x_0 et un voisinage $\mathcal{V}$ de $\hat{X}_1,\dots,\hat{X}_p$, tels que pour $x \in V$ et $X_1,\dots,X_p$ dans $\mathcal{V}$, les vecteurs $X_{I_j}(x)$ $(j = 1,\dots,n)$ forment encore une base de $\mathbb{R}^n$.

D'autre part pour $(X_1,\dots,X_p) \in \mathcal{K}$ on a :

$$X_I = \sum_{j=1}^{n} b_{I,j} \frac{\partial}{\partial x_j}$$

où les $b_{I,j}$ pour $|I| \leq r$ et $j = 1,\dots,n$ sont dans un borné de $C^\infty(\omega)$. L'inversion de la matrice $((b_{I_k,j}))_{j,k = 1,\dots,n}$ nous donne (2.5) pour $x \in V$ et $(X_1,\dots,X_p) \in \mathcal{K} \cap \mathcal{V}$, les fonctions $a_{j,I}$ pour $j = 1,\dots,n$ et $|I| \leq r$ étant dans un borné de $C^\infty(V)$.

On obtient alors le lemme par compacité de $\bar{\omega}_1 \times \mathcal{K}$ et par partition de l'unité.

> Lemme 2.3. pour tout $\omega_1 \subset\subset \omega$, il existe $\varepsilon > 0$ et C tels que
>
> $$\forall (X_1,\dots,X_p) \in \mathcal{K} \text{ , } \forall f \in \mathcal{D}(\omega_1) : \|f\|_\varepsilon^2 \leq C\{ \sum_{i=1}^{p} \|X_i f\|_0^2 + \|f\|_0^2 \} .$$

Démonstration : pour $\varepsilon \leq 1$ on a l'inégalité :

$$\forall f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \quad : \|f\|_\varepsilon^2 \leq \|f\|_0^2 + \sum_{i=1}^{n} \| \frac{\partial f}{\partial x_i} \|_{\varepsilon - 1}^2 .$$

D'après le lemme 2.2, il nous suffit d'établir qu'il existe $\varepsilon > 0$ et C tels que pour $|I| \leq r$, et $(X_1,\dots,X_p) \in \mathcal{K}$ on ait :

$$\forall\ f \in \mathcal{D}(\omega_1)\ :\ \|X_I f\|^2_{\varepsilon-1} \leq C\ \{\ \sum_{i=1}^{p} \|X_i f\|^2_\varepsilon + \|f\|^2_o\ \}\ .$$

On établit ces majorations pour $\varepsilon \leq 2^{-r}$, par récurrence sur $|I|$ à partir du

> Lemme 2.4. soit $\mathcal{B}_1$ un borné de $T(\omega)$ et soit $\omega_1 \subset\subset \omega$. Pour $\varepsilon \leq \frac{1}{2}$ il existe C telle que pour $(X,Y) \in \mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_1$ et pour $f \in \mathcal{D}(\omega_1)$ on ait :
>
> $$\|[X,Y]\|^2_{\varepsilon-1} \leq C\ \{\ \|X f\|^2_o + \|Y f\|^2_{2\varepsilon-1} + \|f\|^2_o\ \}\ .$$

Démonstration : là encore seule l'uniformité pour $(X,Y) \in \mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_1$ de C est à vérifier. Soit $\xi \in \mathcal{D}(\omega)$ valant 1 sur $\bar{\omega}_1$. Posons $Z = [X,Y]\xi$, $S_1 = Z^* \Lambda^{2\varepsilon-2}$, $S_2 = [S_1\ , X\ \xi]$, et $S_3 = [S_1, Y\ \xi]$.

Suivant ([9], [10]) on a pour $f \in \mathcal{D}(\omega_1)$:

$$\|Z f\|^2_{\varepsilon-1} = (S_1 Y f\ , X^* f) + (S_2 Y f\ , f) - (S_1 X f\ , Y^* f) - (S_3 X f\ , f)\ .$$

On obtient alors le lemme en remarquant que pour $T \in \mathcal{B}_1$, $T^* = -T + a$, a restant dans un borné de $C^\infty(\omega)$, et que les opérateurs $S_i (i = 1,2,3)$ sont bornés et de norme majorée indépendemment de $(X,Y) \in \mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_1$, de $H^s(\mathbb{R}^n)$ dans $H^{s-2\varepsilon+1}(\mathbb{R}^n)$.

On se fixe $\omega_1 \subset\subset \omega$; ε est donné par le lemme 2.3 et l'on a :

> Lemme 2.5. il existe C telle que si $G \in \mathfrak{a}$ et si $u \in L^2(\omega_1) \cap \mathcal{E}'(\omega_1)$ est tel que l'on puisse écrire sur ω_1 $\quad G u = \sum_{i=1}^{p} X_i f_i + f_o$ avec $f_i \in L^2(\omega_1)$ $(i = o,\ldots,p)$, alors $u \in H^\varepsilon(\omega_1)$ et :
>
> (2.6) $$\|u\|^2_\varepsilon \leq C\ \{\ \|u\|^2_o + \sum_{i=o}^{p} \|f_i\|^2_o\ \}$$

<u>Démonstration</u> : ce lemme reprend la proposition 3.1 de ([7]) .
Soit V_o l'adhérence de $\mathcal{D}(\omega_1)$ dans l'espace

$$\{ u \in L^2(\omega) \ / \ \forall i = 1,\dots,p : X_i u \in L^2(\omega_1) \}$$

Notons V' le dual de V_o ($V' \hookrightarrow \mathcal{D}'(\omega_1)$). On déduit du lemme 2.2 l'injection : $V_o \hookrightarrow H^{\varepsilon}(\omega_1)$. De plus, C et C' notant des constantes indépendantes de $\mathfrak{a} \in \alpha$ on a pour $u \in V_o$:

$$\|u\|_{\varepsilon}^2 \leq C\|u\|_V^2 \leq C'\{\|\mathfrak{a}\, u\|_{V'}^2 + \|u\|_o^2\} .$$

D'autre part pour $f_i \in L^2(\omega_1)$ $(i = o,\dots,p)$ on a $f_o + \sum_{i=1}^{p} X_i f_i \in V'$ avec

$$\|f_o + \sum_{i=1}^{p} X_i f_i\|_{V'} \leq \sum_{i=o}^{p} \|f_i\|_o$$

Il suffit donc de vérifier que tout $u \in L^2(\omega_1) \cap \mathcal{E}'(\omega_1)$ tel que $\mathfrak{a} u \in V'$, est dans V_o. Pour un tel u , on pose, suivant ([7])

$$u_\delta = \xi(1-\delta^2\Delta)^{-1}\tilde{u}$$

où $\xi \in \mathcal{D}(\omega_1)$ vaut 1 sur supp u, où $\tilde{u}$ est le prolongement de u par o , et où $(1-\delta^2\Delta)^{-1}$ est défini par transformation de Fourier.
$u_\delta \in H_o^2(\omega_1) \subset V_o$, u_δ converge vers u dans $L^2(\omega_1)$ lorsque $\delta \to o$ et on vérifie que $\mathfrak{a} u_\delta$ est borné dans V'(cf [7]) ; par suite u_δ est borné dans V_o et $u \in V_o$.

<u>Démonstration du Théorème 2.1</u>

Soient φ et Ψ dans $\mathcal{D}(\omega_1)$ telles que $\varphi\Psi = \varphi$; s étant donné posons $R = \Psi \Lambda^s \varphi$. Ecrivant $\mathfrak{a} = -\sum_{i=1}^{p} X_i^2 + X_o$, X_o étant un opérateur d'ordre 1 on a :

$$(2.7) \qquad [\mathcal{C}, R] = \sum_{i=1}^{p} X_i F_i + F_o$$

avec $F_i = 2[R, X_i]$ et $F_o = [X_o, R] + \sum_{i=1}^{p} [X_i, [X_i, R]]$.

Le point essentiel est de vérifier que les opérateurs F_i sont d'ordre $\leq s$, qu'ils ont leur noyau porté par supp $\psi \times$ supp φ et que pour une constante C indépendante de $\mathcal{C} \in \alpha$:

$$(2.8) \qquad \forall u \in H^s_{loc}(\omega_1) \quad \|F_i u\|_o \leq C \|\psi u\|_s$$

Maintenant si $u \in \mathcal{D}'(\omega_1)$ vérifie $\psi u \in H^s(\omega_1)$ et $\psi \mathcal{C} u \in H^s(\omega_1)$ on pose $v = Ru$. On a $\mathcal{C}v = R\mathcal{C}u + [\mathcal{C}, R]u$; on déduit de (2.7) et du lemme 2.5 que $v \in H^{\varepsilon}(\omega_1)$. Enfin on a $\varphi u = \Lambda^{-s} v - [\Lambda^{-s}, \psi]\Lambda^s \varphi u$ et pour $\varepsilon \leq 1$

$$\|\varphi u\|_{s+\varepsilon} \leq \|v\|_{\varepsilon} + \text{Cte.} \|\varphi u\|_s$$

On obtient (2.4) en reportant dans cette majoration les estimations (2.6) et (2.8)

2.2. Estimations "à l'intérieur"

Nous allons déduire de la sous ellipticité des estimations concernant les noyaux de certains opérateurs liés aux opérateurs $\mathcal{C}$ (on peut penser en particulier aux projecteurs spectraux).

Nous commençons par préciser un point concernant les noyaux d'opérateurs: soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des opérateurs bornés dans $L^2(\mathbb{R}^n)$, de norme ≤ 1 ; on munit $\mathcal{P}$ de la topologie de la convergence forte qui est aussi la topologie de la convergence uniforme sur les parties compactes de $L^2(\mathbb{R}^n)$. Si $E \in \mathcal{P}$, considérant E comme opérant de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, on définit une distribution $\mathcal{E} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n;\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n))$ et l'application $E \to \mathcal{E}$ est clairement continue. Suivant le théorème des noyaux de Schwartz ([15] proposition 25) on associe à $\mathcal{E}$ la distribution $e \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ telle que :

$$\forall\ (\varphi, \psi) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \times \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)\ :\ < e, \varphi \otimes \psi > = (E\psi, \bar{\varphi})_{L^2(\mathbb{R}^n)}\ .$$

De plus

> Lemme 2.6. l'application qui à E associe son noyau e est continue de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$.

Nous nous donnons maintenant une famille d'opérateurs (1.1) : T étant un espace métrique compact et ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, on se donne pour tout $t \in T$ des champs $X_{i,t} \in T(\omega)$ pour $i = 1,\dots,p$ et une fonction $c_t \in C^\infty(\omega)$. On suppose que :

(2.9) $\left\{\begin{array}{l}\text{Les applications } t \to C_t \text{ et } t \to X_{i,t} \text{ sont continues de } T \\ \text{dans } C^\infty(\omega) \text{ et de } T \text{ dans } T(\omega)\end{array}\right.$

(2.10) $\quad \forall t \in T,\ \forall x \in \omega\ :\ \mathcal{L}_x(X_{1,t},\dots,X_{p,t}) = \mathbb{R}^n$.

Soit $T_0 \subset T$; pour tout $t \in T_0$ on considère un opérateur E_t autoadjoint dans $L^2(\omega)$. On suppose que pour tout $t \in T_0$ tout $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$ et tout entier k $\quad \partial_t^k E_t u \in L^2(\omega)$ et que :

(2.11) $\quad \forall k \in \mathbb{N}\ :\ \sup\limits_{t \in T_0}\ \sup\limits_{\|u\|_{L^2(\omega)} \leq 1} \|\partial_t^k E_t u\|_{L^2(\omega)} < +\infty$

Nous avons alors :

<u>Proposition 2.7.</u> sous les hypothèses (2.9), (2.10) et (2.11), le noyau e_t de E_t est C^∞ sur $\omega \times \omega$ et la famille $(e_t)_{t \in T_o}$ est bornée dans $C^\infty(\omega \times \omega)$.

<u>Démonstration</u> : la compacité de T et les hypothèses (2.9) et (2.10) nous permettent d'appliquer le théorème 2.1 à la famille des opérateurs $G_t (t \in T)$.

Soit $\omega_1 \subset\subset \omega$ et soit $\varphi \in \mathcal{D}(\omega_1)$; on déduit alors de (2.11) et du théorème (2.1) que pour tout entier k, il existe une constante C_k telle que pour tout $t \in T_o$, et tout $u \in L^2(\omega)$:

$$\|\varphi E_t u\|_{k.\varepsilon} \leq C_k \|u\|_{L^2(\omega)}$$

où $\varepsilon > 0$ est donné par le théorème 2.1.

Il en résulte que $\varphi E_t u \in C^\infty(\omega)$ et que pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$ il existe C_α telle que pour tout $t \in T_o$, tout $u \in L^2(\omega)$:

$$\sup_{x \in \omega} |(D^\alpha \varphi E_t u)(x)| \leq C_\alpha \|u\|_{L^2(\omega)} .$$

Par suite les opérateurs $D^\alpha \varphi E_t \varphi$ sont de Hilbert-Schmidt et ont leur noyau e_t^α dans $L^2(\omega \times \omega)$; de plus :

$$(2.12) \qquad \forall \alpha \in \mathbb{N}^n : \sup_{t \in T_o} \|e_t^\alpha\|_{L^2(\omega \times \omega)} < +\infty .$$

Au sens de $\mathcal{D}'(\omega \times \omega)$ on a $e_t^\alpha(x,y) = D_x^\alpha e_t^o(x,y)$.
De plus E_t étant autoadjoint on a :

$$\varphi(x)\ e_t(x,y)\ \varphi(y) = e_t^o(x,y) = \overline{e_t^o(y,x)} .$$

On en déduit que pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$ $D_x^\alpha e_t^o$ et $D_y^\alpha e_t^o$ sont dans $L^2(\omega \times \omega)$; par suite $e_t^o \in \mathcal{D}(\omega \times \omega)$ et utilisant l'équivalence de normes sur $H_0^{\ell}(\omega\times\omega)$:

$$\|e(.,.)\|_{H^{\ell}(\omega\times\omega)} \leq \text{Cte.} \sum_{|\alpha|\leq \ell} \|D_x^{\alpha}e\|_{L^2(\omega\times\omega)} + \|D_y^{\alpha}e\|_{L^2(\omega\times\omega)}$$

on déduit de (2.12) que les e_t^o sont bornés dans $H_0^{\ell}(\omega\times\omega)$ pour tout entier ℓ, et la proposition suit.

2.3. <u>Estimations "sur le bord"</u>

Nous voulons maintenant étudier le cas où les opérateurs E_t ne sont plus définis sur tout ω ; nous nous plaçons toujours sous les hypothèses (2.9) et (2.10) et nous supposons de plus que

(2.13) $\quad \forall t \in T : c_t \in L^{\infty}(\omega)$ et $\sup_{t\in T} \|c_t\|_{L^{\infty}(\omega)} < +\infty$

Pour tout $t \in T$ on se donne un ouvert $\Omega_t \subset \omega$; on définit alors l'espace V_t comme étant l'adhérence de $\mathcal{D}(\Omega_t)$ dans l'espace

$$\{u \in L^2(\Omega_t) \;/\; \forall i = 1,\dots,p : X_{i,t}u \in L^2(\Omega_t)\}.$$

Soit a_t la forme hermitienne continue et coercive sur V_t :

$$a_t(u,v) = \int_{\Omega_t} \Big\{ \sum_{i=1}^{p} X_{i,t}\, u \cdot X_{i,t}\bar{v} + c_t u\cdot\bar{v}\Big\}\, dx .$$

Il résulte de (2.13) qu'il existe une constante C telle que pour tout $t \in T$ et tout $u \in V_t$ on ait :

(2.14) $$\|u\|^2_{V_t} \leq a_t(u,u) + C\|u\|^2_{L^2(\Omega_t)}$$

On note $(A_t, D(A_t))$ l'opérateur défini par le problème variationnel $(V_t, L^2(\Omega_t), a_t)$: c'est l'extension de Friedrichs de

$(\mathfrak{a}_t\ ,\ \mathcal{D}(\Omega_t))$.

On considère alors pour $t \in T_0 \subset T$ des opérateurs bornés E_t, positifs autoadjoints dans $L^2(\Omega_t)$. Nous supposons que :

(2.15) $\quad \forall\, k \in \mathbb{N}\ ,\ \forall\, u \in L^2(\Omega_t)\ :\ \mathfrak{a}_t^k\, E_t u \in L^2(\Omega_t)$

(2.16) $\quad \forall\, k \in \mathbb{N}\ :\ \sup\limits_{t \in T_0}\ \sup\limits_{\|u\|_{L^2(\Omega_t)} \leq 1} \|\mathfrak{a}_t^k\, E_t\, u\|_{L^2(\Omega_t)} < +\infty$.

Nous supposons de plus que pour tout $t \in T_0$ et tout $u \in$ $u \in L^2(\Omega_t)$:

(2.17) $\quad \forall\, k \in \mathbb{N}\ ,\ \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\omega)\quad \varphi\, \mathfrak{a}_t^k\, E_t u \in V_t$.

Remarque : le paragraphe précédent correspond au cas où $\omega = \Omega_t$ pour tout t ; alors (2.11) implique (2.17). Mais notre conclusion est ici plus faible et de nature différente :

Proposition 2.8. sous les hypothèses précédentes le noyau e_t de E_t est C^∞ sur $(\omega \cap \Omega_t) \times (\omega \cap \Omega_t)$. La fonction $e_t(x,x)$ est positive sur $\omega \cap \Omega_t$ et pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\omega)$ on a :

(2.18) $\quad \sup\limits_{t \in T_0} \displaystyle\int_{\omega \cap \Omega_t} |\varphi(x)|^2\, e_t(x,x)\, dx < +\infty$.

Le fait que e_t soit C^∞ sur $(\omega \cap \Omega_t) \times (\omega \cap \Omega_t)$ résulte immédiatement de la proposition 2.7 appliquée à un seul opérateur sur l'ouvert $\omega \cap \Omega_t$: d'autre part E_t étant positif autoadjoint par hypothèse, on a $e_t(x,x) \geq 0$. Pour démontrer l'estimation (2.18) on utilise le fait que l'intégrale de (2.18) est la trace de l'opérateur $\varphi\, E_t \varphi$ et on estime cette trace à l'aide de majoration de n-ièmes diamètres. ([1]) .

Nous notons W_t l'espace des $u \in L^2(\Omega_t)$ tels que $\mathcal{G}_t u \in L^2(\Omega_t)$ et tels que pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\omega)$ $\varphi u \in V_t$.

Prouvons d'abord le

Lemme 2.9. soit $\omega_1 \subset\subset \omega$; il existe $\varepsilon > 0$ et pour tout couple $(\varphi, \Psi) \in \mathcal{D}(\omega_1) \times \mathcal{D}(\omega_1)$ tel que $\varphi \Psi = \varphi$, une constante C, telle que : pour tout $t \in T$ l'application $u \to \widetilde{\varphi u}$ prolongement de φu par o sur $\mathbb{R}^n \setminus \Omega_t$ est continue de W_t dans $H^\varepsilon(\mathbb{R}^n)$ et :

$$\forall\, u \in W_t \quad \|\widetilde{\varphi u}\|_\varepsilon^2 \leq C\left\{\|\varphi\, \mathcal{G}_t u\|^2_{L^2(\Omega_t)} + \|\Psi u\|^2_{L^2(\Omega_t)}\right\} .$$

Démonstration : appliquant le Lemme 2.3 aux fonctions de $\mathcal{D}(\omega_1 \cap \Omega_t)$, on obtient qu'il existe $\varepsilon > 0$ et C tels que : si $\varphi u \in V_t$ alors $\widetilde{\varphi u} \in H^\varepsilon(\mathbb{R}^n)$ et

$$\|\widetilde{\varphi u}\|_\varepsilon \leq C \|\varphi u\|_{V_t} . \tag{2.19}$$

Donnons nous $u \in W_t$; remarquons d'abord que pour tout $\zeta \in \mathcal{D}(\omega)$ et tout $i = 1, \dots, p$ $\zeta X_i u = X_i \zeta u - X_i(\zeta).u$ est dans $L^2(\Omega_t)$.
Pour $v \in \mathcal{D}(\Omega_t)$ on a :

$$a_t(\varphi u, v) - a_t(u, \varphi v) = \sum_{i=1}^{p} \int_{\Omega_t} X_{i,t}(\varphi)[u.X_{i,t}\bar{v} - X_{i,t}u.\bar{v}]dx \tag{2.20}$$

l'intégrale définissant $a_t(u, \varphi v)$ ayant un sens d'après la remarque précédente; mais pour $v \in \mathcal{D}(\Omega_t)$, $\varphi v \in \mathcal{D}(\Omega_t)$ et :

$$a_t(u, \varphi v) = \langle \mathcal{G}_t u, \varphi v \rangle_{\mathcal{D}'(\Omega_t) \times \mathcal{D}(\Omega_t)} = \int_{\Omega_t} \varphi\, \mathcal{G}_t u . \bar{v}\, dx . \tag{2.21}$$

On reporte (2.21)dans (2.20); puis par densité on peut prendre $v \in V_t$ et choisissant $v = \varphi u$ on obtient que :

$$(2.22) \quad a_t(\varphi u, \varphi u) = \mathrm{Re} \int_{\Omega_t} \varphi \mathcal{G}_t u \cdot \varphi \bar{u} \, dx + \int_{\Omega_t} \Big(\sum_{i=1}^{p} |X_{i,t}(\varphi)|^2 \Big) |u|^2 dx$$

D'après (2.9) les $X_{i,t}$ sont bornés sur ω_1 et le lemme résulte alors des estimations (2.19),(2.14) et (2.22)

<u>Remarque</u> : on déduit aussi de (2.22) et (2.14) que

$$\|\varphi u\|^2_{V_t} \leq C \left\{ \|\mathcal{G}_t u\|^2_{L^2(\Omega_t)} + \|u\|^2_{L^2(\Omega_t)} \right\}$$

ce qui prouve que W_t est un sous espace fermé de $\left\{ u \in L^2(\Omega_t) \;/\; \mathcal{G}_t u \in L^2(\Omega_t) \right\}$. W_t est donc un espace de Hilbert si on le munit de la norme :

$$\|u\|_{W_t} = \left\{ \|\mathcal{G}_t u\|^2_{L^2(\Omega_t)} + \|u\|^2_{L^2(\Omega_t)} \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Par récurrence sur $\ell \geq 1$ on définit les espaces

$$W_t^{\ell} = \left\{ u \in W_t^{\ell-1} \;/\; {}_t u \in W_t^{\ell-1} \right\}$$

munis des normes :

$$\|u\|_{W_t^{\ell}} = \left\{ \|\mathcal{G}_t u\|^2_{W_t^{\ell-1}} + \|u\|^2_{W_t^{\ell-1}} \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

On convient que $W_t^{o} = L^2(\Omega_t)$. On a aussi

$$(2.23) \qquad W_t^{\ell} = \Big\{ u \in L^2(\Omega_t) \;/\; \forall\, k = 1,\dots,\ell : \mathcal{G}_t^k u \in L^2(\Omega_t) \text{ et }$$
$$\forall\, k = 0,\dots,\ell-1 \quad \mathcal{G}_t^k u \in W_t \Big\}.$$

On note Σ_t^{ℓ} la boule unité de W_t^{ℓ} et pour $\varphi \in \mathcal{D}(\omega)$ $d_j(\varphi\, \Sigma_t^{\ell}, L^2(\Omega_t))$ $(j = 0,1,\dots)$ le j-ième diamètre de l'ensemble $\varphi\, \Sigma_t^{\ell}$ dans $L^2(\Omega_t)$ ([11]).

Nous avons alors :

<u>Lemme 2.10</u>. soit $\omega_1 \subset\subset \omega$ et soit $\varepsilon > 0$ donné par le lemme 2.9. Pour $\varphi \in \mathcal{D}(\omega)$ et pour $\ell \geq 1$ il existe une constante $C = C(\ell, \varphi)$ telle que :

$$\forall\, t \in T\ ,\ \forall\, j = 0,1\ldots\ :\ d_j(\varphi\Sigma_t^{\ell},\ L^2(\Omega_t)) \leq C(1+j)^{-\varepsilon\ell/n}$$

<u>Démonstration</u> : donnons-nous $\varphi_0, \ldots, \varphi_\ell \in \mathcal{D}(\omega)$ telles que pour $i = 1, \ldots, \ell$: $\varphi_{i-1} \cdot \varphi_i = \varphi_{i-1}$.

Soit B une boule contenant $\bar{\omega}_1$. Il existe une constante C_0 telle que si Σ' désigne la boule unité de $H^{\varepsilon}(B)$ on a ([2]) :

$$\forall\, j \geq 0 \quad d_j(\Sigma', L^2(B)) \leq C_0(1+j)^{-\varepsilon/n}$$

De plus pour tout $\mu > 0$, il existe un sous espace Φ_μ de codimension finie et majorée par $(C_0^2\mu)^{n/2\varepsilon}$, dans $H^{\varepsilon}(B)$, tel que

$$(2.24) \qquad \forall\, u \in \Phi_\mu\ :\ \mu\|u\|^2_{L^2(B)} \leq \|u\|^2_{H^{\varepsilon}(B)}$$

$\mu > 0$ et Φ_μ étant fixés soit Ψ_t le sous espace des $u \in W_t^k$ tels que $\widetilde{\varphi_i \mathcal{A}_t^k u}_{|B} \in \Phi_\mu$ pour tous les indices i et k tels que $0 \leq k \leq i \leq \ell - 1$. (Ψ_t est bien défini grâce à (2.23) et au Lemme 2.9).

On déduit du Lemme (2.9) et de (2.24) qu'il existe C (dépendant de $\varphi_0, \ldots, \varphi_\ell$, mais indépendant de μ telle que tout $t \in T$, tout $u \in W_t^{\ell}$:

$$\mu\|\varphi_i\, \mathcal{A}_t^k u\|^2_{L^2(\Omega_t)} \leq C\, \left\{\|\varphi_{i+1}\, \mathcal{A}_t^{k+1} u\|^2_{L^2(\Omega_t)} + \|\varphi_{i+1}\, \mathcal{A}_t^k\, u\|^2_{L^2(\Omega_t)}\right\} .$$

Par récurrence sur i on en tire que pour $k \leq \ell - i$ on a :

$$\mu^i\|\varphi_{\ell-i}\, \mathcal{A}_t^k u\|^2_{L^2(\Omega_t)} \leq C^i\|\, \mathcal{A}_t^k u\|^2_{W_t^i}$$

et pour $i = \ell$ on obtient que :

(2.25) $$\mu^{\ell}\|\varphi_o u\|^2_{L^2(\Omega_t)} \le C^{\ell}\|u\|^2_{W_t^{\ell}}$$

Soit $(1-\pi_t)$ le projecteur orthogonal dans W_t^{ℓ} sur Ψ_t . π_t est de rang fini $\le \frac{\ell(\ell+1))}{2}$. $(C_o\mu)^{n/2\varepsilon}$, et on déduit de (2.25) que pour tout $t \in T$ et tout $u \in W_t^{\ell}$:

(2.26) $$\mu^{\ell}\left\|\varphi_o u - \varphi_o\pi_t u\right\|^2_{L^2(\Omega_t)} \le C^{\ell}\left\|(1-\pi_t)u\right\|^2_{W_t^{\ell}} \le C^{\ell}\|u\|_{W_t^{\ell}}$$

L'entier j étant donné on choisit $\mu = C_o^{-2}.(\frac{2j}{\ell(\ell+1)})^{2\varepsilon/n}$ de sorte que $\varphi_o\pi_t$ est de rang $\le j$; on tire alors de (2.26) que

$$d_j(\varphi_o\Sigma_t^{\ell}, L^2(\Omega_t)) \le C^{\ell/2}.\ C_o^{\ell}.\ (\frac{2j}{\ell(\ell+1)})^{-\varepsilon\ell/n} .$$

On achève la démonstration en remarquant que $\Sigma_t^{\ell} \subset \Sigma_t^o$ et que par suite :

$$d_o(\varphi_o\Sigma_t^{\ell}, L^2(\Omega_t)) \le 1 .$$

Démonstration de la Proposition 2.8 : soit $\varphi \in \mathcal{D}(\omega)$; soit $\omega_1 \subset\subset \omega$ tel que $\omega_1 \supset \operatorname{supp}\varphi$; soit alors $\varepsilon > 0$ donné par le Lemme 2.9 .

Il résulte des hypothèses (2.16) et (2.17) que pour tout $\ell \ge 1$ il existe C telle que :

$$\forall t \in T_o \quad E_t\varphi\Sigma_t^o \subset C\,.\,\Sigma_t^{\ell}$$

On déduit du Lemme 2.10 qu'il existe C' telle que :

(2.27) $$\forall t \in T_o,\ \forall j = 0,1\ldots : d_j(\varphi E_t\varphi\Sigma_t^o, L^2(\Omega_t)) \le C'(1+j)^{-\varepsilon\ell/n}.$$

Choisissant $\ell > n/\varepsilon$ on en déduit que l'opérateur $\varphi E_t\varphi$, positif autoadjoint est dans la classe C_1 de ([1]) et sa trace est :

$$\operatorname{tr}(\varphi E_t \varphi) = \int_{\omega\cap\Omega} |\varphi(x)|^2\, e_t(x,x)dx = \sum_{j=0}^{\infty} d_j(\varphi E_t \varphi\, \Sigma_t^o, L^2(\Omega_t)) .$$

et on conclut en utilisant la majoration (2.27) .

3. HOMOGENEITE

3.1. Notations

Le but de ce paragraphe est de définir pour les champs X_i de l'introduction une "partie principale homogène". Mais auparavant nous précisons quelques notations empruntées à ([3], [6], [14]).

Dans toute la suite de ce paragraphe la suite $o = \nu_o < \nu_1 < \ldots < \nu_r = n$ est fixée; on définit la fonction poids $[\;]$ de $\{1,\ldots,n\}$ dans $\{1,\ldots,r\}$ en posant $[j] = k$ pour $\nu_{k-1} < j \leq \nu_k$. Pour $t > o$ on définit $h_t \in GL(\mathbb{R}^n)$ en posant $h_t(e_j) = t^{[j]}\cdot e_j$ $\left((e_1,\ldots,e_n)\right.$ étant la base canonique de $\left.\mathbb{R}^n\right)$.

On dira qu'une fonction f est homogène de degré ρ si pour tout $t > o$ $f \circ h_t = t^\rho . f$; de même un opérateur différentiel T (à coefficients C^∞) sera dit homogène de degré ρ si pour tout $t > o$ $h_{t_*} T = t^\rho T$ ($h_{t_*}T$ est l'opérateur image de T par h_t défini pour $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ par $(h_{t_*}T)(u) = \{T(u \circ h_t)\} \circ h_t^{-1}$) .

Par exemple la fonction $\xi \to \xi^\alpha$ est homogène de degré $[\alpha] = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j\, [j]$, et l'opérateur $\xi^\alpha \dfrac{\partial}{\partial \xi_j}$ est homogène de degré $[j] - [\alpha]$.

Suivant ([6]), nous définissons l'ordre d'un opérateur en o de la manière suivante : on munit d'abord $\mathbb{R}^n$ de la "norme homogène" $|\xi| = \{\sum_{j=1}^{n} |\xi_j|^{2/[j]}\}^{\frac{1}{2}}$ qui est une fonction C^∞ sur $\mathbb{R}^n \setminus o$, homogène de degré 1, ne s'annulant qu'en o.

Pour un voisinage U de o , on définit $C^\infty_m(U)$ l'espace des fonctions "nulles à l'ordre m" en o $(m \in \mathbb{Z})$ en posant :

$$C^\infty_m(U) = \{u \in C^\infty(U) / \ |u(\xi)| = O(|\xi|^m \text{ quand } \xi \to o\} .$$

On dit alors qu'un opérateur T de $C^\infty(U)$ dans $C^\infty(U)$ est d'ordre $\leq p$ en o $(p \in \mathbb{Z})$ si

$$\forall m \quad T\, C^\infty_m(U) \subset C^\infty_{m-p}(U) .$$

Avec ces définitions un opérateur $T = \sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha \partial^\alpha_\xi$ est d'ordre $\leq p$ en o si et seulement si pour tout α $a_\alpha \in C^\infty_{[\alpha]-p}(U)$, ce qui équivaut à dire que pour tout α et tout β tel que $[\beta] < [\alpha] - p$ on a : $\left(\partial^\beta_\xi a_\alpha\right)(o) = o$.

A un tel opérateur d'ordre $\leq p$ en o , on associe sa partie homogène de degré p , $\hat{T}$, définie par :

$$(3.1) \quad \hat{T} = \sum_{|\alpha| \leq k} \ \sum_{[\beta] = [\alpha] - p} (\partial^\beta_\xi a_\alpha)(o)\xi^\beta/\beta! \cdot \partial^\alpha_\xi$$

Il est clair que $T - \hat{T}$ est d'ordre $\leq p - 1$ en o . Notons aussi que pour tout borné B de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$:

$$(3.2) \qquad t^{-p}(h_{t_*}T)f \xrightarrow[t \to \infty]{} \hat{T} f$$

la convergence ayant lieu dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ et étant uniforme en $f \in B$. (Noter qu'il existe un compact K tel que supp $f \subset K$ pour tout f de B et que $h_{t_*}T$ est défini sur K pour t assez grand).

Notons enfin que si T et S sont des opérateurs d'ordre $\leq p$ et d'ordre $\leq q$ en o , T.S et $[T, S]$ sont d'ordre $\leq p+q$ en o , et pour ce qui concerne les parties homogènes $\widehat{T.S} = \hat{T}.\hat{S}$ et $\widehat{[T.S]} = [\hat{T}, \hat{S}]$.

3.2. Le Théorème 3.1

Nous reprenons les notations du paragraphe 1 : M est une variété réelle , C^∞ de dimension n ; $X_1, \ldots, X_p$ sont des champs de vecteurs réels , C^∞ sur M . Nous notons $V_k(x ; X_1, \ldots, X_p)$ le sous espace de T_xM engendré par les vecteurs $X_I(x)$ pour $|I| \leq k$. (Notations de (2.1)). ω étant un ouvert inclus dans Ω nous supposons que :

$$(3.3) \qquad \forall\, x \in \omega \,;\; \forall\, k = 1, \ldots, r : \dim V_k(x ; X_1, \ldots, X_p) = \nu_k \,.$$

Nous avons alors le résultat fondamental suivant :

Théorème 3.1. : soit $x_0 \in \omega$; il existe deux voisinages $\omega_1 \subset\subset \omega_0 \subset\subset \omega$ de x_0 , un voisinage U_0 de o dans $\mathbb{R}^n$, et une application θ C^∞ de $\bar{\omega}_1 \times \omega_0$ dans $\mathbb{R}^n$ tels que :

i) pour tout $x \in \bar{\omega}_1$ l'application $\theta_x : y \to \theta(x,y)$ est un C^∞ difféomorphisme de ω_0 sur $\theta_x(\omega_0)$, tel que $\theta_x(x) = 0$ et $\theta_x(\omega_0) \supset U_0$.

ii) pour tout $x \in \bar{\omega}_1$ les champs $X_{i,x}$ images de X_i par θ_x $(i = 1, \ldots, p)$ sont d'ordre ≤ 1 en o .

iii) si l'on désigne par $\hat{X}_{i,x}$ la partie homogène de degré 1 de $X_{i,x}$, les champs $\hat{X}_{i,x}$ engendrent une algèbre de Lie nilpotente de dimension n et :

$$\forall\, \xi \in \mathbb{R}^n \ , \ \forall\, k = 1,\dots,r \quad \dim V_k(\xi\, ; \widehat{X}_{1,x},\dots,\widehat{X}_{p,x}) = \nu_k \ .$$

iv) Les champs $X_{i,x}$ et $\widehat{X}_{i,x}$ dépendent différentiablement de $x \in \omega_1$.

Ce théorème s'inspire de ([6]), bien que pour des raisons techniques le schéma de la démonstration soit différent. L'originalité par rapport à ([6] , [14]) est que sous l'hypothèse (3.3) on "approche" l'algèbre de Lie engendrée par les X_i, par une algèbre de Lie nilpotente de même dimension que M .

3.3. Démonstration du Théorème 3.1.

Soit $x_0 \in \omega$; nous choisissons des champs $Y_1,\dots,Y_n$ de la forme

$$(3.4) \qquad Y_j = \sum_{|I| \leq [j]} a_{j,I}\, X_I \qquad (a_{j,I} \in C^\infty(M))$$

de sorte que les $\left(Y_1(x_0),\dots,Y_{\nu_k}(x_0)\right)$ forment une base de $V_k(x_0\, ; X_1,\dots,X_p)$, pour tout $k = 1,\dots,r$. Il résulte de l'hypothèse (3.3) que pour x voisin de x_0 les $\left(Y_1(x),\dots,Y_{\nu_k}(x)\right)$ forment encore une base de $V_k(x\, ; X_1,\dots,X_p)$ et par suite au voisinage de x_0 on a :

$$(3.5) \qquad X_I = \sum_{[j] \leq |I|} b_{I,j}\, Y_j \qquad (b_{I,j} \in C^\infty)$$

Regroupant (3.4) et (3.5), on obtient que pour toute suite $J = (j_1,\dots,j_\ell) \in \{1,\dots,n\}^\ell$ on a, en notant $[J] = [j_1] + \dots + [j_\ell]$ et $Y_J = (\operatorname{ad} Y_{j_1} \dots \operatorname{ad} Y_{j_{\ell-1}})(Y_{j_\ell})$:

$$(3.6) \qquad Y_J = \sum_{[j] \leq [J]} \gamma_J^j\, Y_j \qquad (\gamma_J^j \in C^\infty) \ .$$

Pour $\xi \in \mathbb{R}^n$ on considère le champ $Y_\xi = \sum_{j=1}^{n} \xi_j \cdot Y_j$.
Notons $\Phi(t\,;x\,,\xi)$ le groupe local a un paramètre associé à Y_ξ :

$$(3.7) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{d\Phi}{dt} = Y_\xi(\Phi) \\ \Phi(o\,;x\,,\xi) = x\,. \end{array} \right.$$

Φ est défini et C^∞ sur un voisinage de $(o\,,x_o\,,o)$ dans $\mathbb{R} \times M \times \mathbb{R}^n$ et vérifie

$$(3.8) \qquad \forall\, \tau \ |\tau| \leq 1\ :\ \Phi(\tau t\,;x\,,\xi) = \Phi(t\,;x\,,\tau\,\xi)$$

Il en résulte que Φ est définie sur un ouvert du type : $]-2,2[\times \omega_o \times U_o$ où ω_o et U_o sont des voisinages de x_o et o respectivement ; on pose alors $\varphi(x,\xi) = \Phi(1\,;x\,,\xi)$ et φ_x est l'application : $\xi \to \varphi(x\,,\xi)$. On a :

$$d\,\varphi_x(o)\cdot \eta = \sum_{j=1}^{n} \eta_j\, Y_j(x)$$

Quitte à restreindre ω_o et U_o on peut donc supposer que les φ_x $(x \in \omega_o)$ sont des C^∞ difféomorphismes sur leur image ; on supposera aussi que U_o est symétrique et que pour un voisinege $\omega_1 \subset\subset \omega_o$ de x_o on a $\varphi(\omega_1 \times U_o) \subset \omega_o$.

Prouvons d'abord le

<u>Lemme 3.2.</u> : soit $f \in C^\infty(\omega_o)$; la fonction :

$$h(x\,,\xi) = \left(\frac{\partial}{\partial \xi_j} (f \circ \varphi)\ (y\,,\xi) \right)\Big|_{y\,=\,\varphi(x\,,\,-\,\xi)}$$

est C^∞ sur $\omega_1 \times U_o$ et sa série de Taylor en $\xi = o$ est :

$$h(x\,,\xi) \sim \sum_{k \geq o} \left(\frac{(-\mathrm{ad}\, Y_\xi)^k}{(k+1)!}\ (Y_j)\, f \right) (x) \quad .$$

<u>Démonstration</u> : si l'on note $e^{Y_\xi} f = f \circ \varphi$ on a :

$$h(x, \xi) = \left(e^{-Y_\xi} \cdot \frac{\partial}{\partial \xi_j} e^{Y_\xi} f\right)(x) .$$

Pour $(x, \xi) \in \omega_1 \times U_o$ on a $\varphi(x, -\xi) \in \omega_o$ et il est alors clair que h est C^∞ sur $\omega_1 \times U_o$.

Il résulte de (3.7) et (3.8) que la série de Taylor en $\xi = o$ de $f \circ \varphi$ est

$$(3.9) \qquad (f \circ \varphi)(x, \xi) \sim \sum_{k \geq o} \frac{1}{k!} (Y_\xi^k f)(x)$$

et la série de Taylor en $\xi = o$ de $g(x, \xi) = \frac{\partial}{\partial \xi_j} (f \circ \varphi)(x, \xi)$ est alors :

$$g(x, \xi) \sim \sum_{k \geq o} \frac{1}{k!} \left(\sigma(Y_\xi^k Y_j) f\right)(x)$$

où pour deux champs X et Y on note :

$$\sigma(X^k Y) = \frac{1}{k+1} (X^k Y + X^{k-1} Y X + \ldots + Y X^k) .$$

Ré-appliquant (3.9) on obtient la série de Taylor de $h(x, \xi)$:

$$h(x, \xi) \sim \sum_{k \geq o} \left(\sum_{p=o}^{k} \frac{(-Y_\xi)^{k-p}}{(k-p)!} \cdot \frac{\sigma(Y_\xi^p Y_j)}{p!} f\right)(x)$$

Le lemme résulte alors de l'identité suivante (cf. [6]) :

pour deux champs X et Y on a :

$$\sum_{p=o} \frac{(-X)^{k-p}}{(k-p)!} \cdot \frac{\sigma(X^p Y)}{p!} = \frac{(-\mathrm{ad}\, X)^k}{(k+1)!} (Y)$$

On utilise alors (3.6) pour développer le terme $(\mathrm{ad}\, Y_\xi)^k (Y_j)$:

$$(3.10) \qquad (\mathrm{ad}\, Y_\xi)^k (Y_j) = \sum_{|J| = k} \sum_{[\ell] \leq [J] + [j]} \xi^J \cdot \gamma_{J \cup j}^{\ell} \cdot Y_\ell$$

où $J = (j_1,\dots,j_k) \in \{1,\dots,n\}^k$, $\xi^J = \xi_{j_1},\dots,\xi_{j_k}$ et où $J \cup j$ est la suite $(j_1,\dots,j_k,j) \in \{1,\dots,n\}^{k+1}$.

On déduit de (3.10) le

<u>Lemme 3.3.</u> : soit $f \in C^\infty(\omega_0)$ et soit h comme au Lemme 3.2. Alors

$$h(x,\xi) = (Y_j f)(x) + \sum_{\substack{1 \le [J] \le r-1 \\ [\ell] \le [J]+[j]}} \frac{(-\xi)^J}{(|J|+1)!} \cdot \gamma^\ell_{J\cup j}(x) . (Y_\ell f)(x) + O(|\xi|^r) .$$

Nous avons alors la

<u>Proposition 3.4.</u> : avec les notations précédentes, pour $x \in \omega_1$, les champs $(\varphi_x^{-1})_* Y_j$ sont d'ordre $\le [j]$ en o.

<u>Démonstration</u> : soit $T_{j,x}$ l'image de $\frac{\partial}{\partial \xi_j}$ par φ_x. Pour $f \in C^\infty(\omega_0)$, on a, en notant h la fonction introduite au Lemme 3.2.

$$(T_{j,x} f)(\varphi_x(\xi)) = \frac{\partial}{\partial \xi_j}(f \circ \varphi_x)(\xi) = h(\varphi_x(\xi), \xi) .$$

Soit $g \in \mathcal{D}(U_0)$; alors $f = g \circ \varphi_x^{-1} \in \mathcal{D}(\omega_0)$ et

$$(T_{j,x} f(\varphi_x(\xi)) = \frac{\partial}{\partial \xi_j} g(\xi) .$$

Notant $Z_{j,x}$ l'image de Y_j par φ_x^{-1} on a aussi :

$$(Y_j f)(\varphi_x(\xi)) = (Z_{j,x} g)(\xi).$$

On déduit alors du Lemme 3.3 que :

$$\left(\frac{\partial}{\partial \xi_j} g\right)(\xi) = (Z_{j,x} g)(\xi) + \sum_{\ell=1}^{n} z_{j,\ell}(x,\xi)(Z_{\ell,x} g)(\xi) + O(|\xi|^r)$$

avec :

$$(3.11) \qquad z_{j,\ell}(x,\xi) = \sum_{\substack{[\ell]-[j] \le [J] \le r-1 \\ J \ne 0}} \frac{(-\xi)^J}{(|J|+1)!} \gamma^\ell_{J\cup j}(\varphi_x(\xi)).$$

Notons A la matrice $((z_{j,\ell}))_{j,\ell=1,\ldots,n}$; soit $B = ((\tilde{z}_{j,\ell}))$ la matrice : $B = -A + A^2 + \ldots + (-1)^{r-1} A^{r-1}$. Puisque $A = O(|\xi|)$ on a $(Id + B)(Id + A) = Id + O(|\xi|^r)$ et on tire de (3.11) :

$$(3.12) \quad (Z_{j,x}g)(\xi) = \frac{\partial g}{\partial \xi_j}(\xi) + \sum_{\ell=1}^{n} \tilde{z}_{j,\ell}(x, \xi) \frac{\partial g}{\partial \xi_\ell}(\xi) + O(|\xi|^r).$$

Ecrivant que :

$$Z_{j,x} = \frac{\partial}{\partial \xi_j} + \sum_{\ell=1}^{n} \tilde{\tilde{z}}_{j,\ell}(x, \xi) \frac{\partial}{\partial \xi_\ell}$$

on tire de (3.12) que $\tilde{\tilde{z}}_{j,\ell} = \tilde{z}_{j,\ell} + O(|\xi|^r)$.

Enfin $\tilde{z}_{j,\ell}$ est somme de termes de la forme :

$$z_{j,\ell_1} \cdot z_{\ell_1,\ell_2} \ldots z_{\ell_q,\ell} \quad \text{avec } q \leq r-2 .$$

Tenant compte de (3.11) on en déduit que

$\tilde{z}_{j,\ell}(x,.) \in C^\infty_{[\ell]-[j]}(U_o)$ et finalement que

$\tilde{\tilde{z}}_{j,\ell}(x,.) \in C^\infty_{[\ell]-[j]}(U_o)$, ce qui achève la démonstration de la proposition.

<u>Fin de la démonstration du Théorème 3.1.</u>

On définit θ par : $\theta(x,y) = \theta_x(y) = \varphi_x^{-1}(y)$. θ est défini d'un voisinage de (x_o, x_o) sur U_o ; l'application $(x,y) \to (x, \theta(x,y))$ est l'application réciproque de $(x,\xi) \to (x, \varphi(x,\xi))$ et θ est C^∞ ; de plus $\theta(x,x) = o$.

Pour satisfaire le i) du théorème il suffit d'ajuster les voisinages ω_1, ω_o et U_o , en les restreignant si nécessaire; nous supposons dorénavant que ceci est fait.

Soit $X_{I,x} = (\theta_x)_* X_I$; $X_{I,x}$ est aussi défini par la formule (2.1) à partir des $X_{i,x}$, et est d'ordre $\leq |I|$ en o .
Prenant les parties homogènes après avoir appliqué $(\theta_x)_*$ à (3.4) (3.5) et (3.6) on obtient :

$$(3.13) \qquad \begin{cases} \hat{Z}_{j,x} = \sum_{|I| = [j]} a_{j,I}(x) \cdot \hat{X}_{I,x} \\ \hat{X}_{I,x} = \sum_{[j] = |I|} b_{I,j}(x) \quad \hat{Z}_{j,x} \end{cases}$$

$$(3.14) \quad [\hat{Z}_{j_1,x} , \hat{Z}_{j_2,x}] = \sum_{[j] = [j_1] + [j_2]} \gamma^j_{(j_1,j_2)}(x) \cdot \hat{Z}_{j,x} .$$

Il est sous-entendu, dans (3.14) que si $[j_1] + [j_2] > r$, la somme du terme de droite, portant sur un ensemble d'indices j vide, est nulle. Il résulte aussitôt de (3.14) que les $Z_{j,x}$ engendrent une algèbre de Lie nilpotente de dimension n dont les $\gamma^j_{(j_1,j_2)}(x)$ sont les constantes de structure. On tire de (3.13) que les $\hat{X}_{i,x}$ ($i = 1,\dots,p$) engendrent la même algèbre de Lie et que pour tout k , $V_k(\xi ; \hat{X}_{1,x},\dots,\hat{X}_{p,x})$ est l'espace engendré par les $\hat{Z}_{j,x}(\xi)$ pour $[j] \leq k$.

Il résulte de (3.12) que l'on a :

$$(3.15) \quad \hat{Z}_{j,x} = \frac{\partial}{\partial \xi_j} + \sum_{[\ell] > [j]} \sum_{[\alpha] = [\ell] - [j]} \zeta^{\alpha}_{j,\ell}(x) \cdot \xi^{\alpha} \frac{\partial}{\partial \xi_{\ell}} .$$

pour certaines fonctions $\zeta^{\alpha}_{j,\ell}(x) \in C^{\infty}(\omega_1)$. Par conséquent les $\hat{Z}_{j,x}(\xi)$ sont pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n$ indépendants et par suite pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n$; $\dim V_k(\xi ; \hat{X}_{1,x},\dots,\hat{X}_{p,x}) = \nu_k$.

On achève la démonstration du théorème en remarquant que

$X_{i,x}$ dépend differentiablement de $x \in \omega_1$ puisque θ est C^∞ des deux variables (x,y), et qu'il en est de même de $\widehat{X}_{i,x}$ qui est un "développement limité". $\big($cf. (3.1)$\big)$ en $\xi = o$ de $X_{i,x}$.

3.4. Etude des opérateurs homogènes

Nous étudions maintenant les opérateurs associés aux $\widehat{X}_{i,x}$; on renvoie à ([3]) pour une étude plus complète de certains aspects du problème.

On rappelle que les champs $\widehat{X}_{i,x}$ $(i = 1,\dots,p)$ sont homogènes de degré 1, dépendent différentiablement de x et vérifient :

(3.16) $\forall\ \xi \in \mathbb{R}^n$, $\forall\, k = 1,\dots,r$: $\dim V_k(\xi ; \widehat{X}_{1,x},\dots,\widehat{X}_{p,x}) = \nu_k$.

On déduit de (3.1) que, comme tous les champs homogènes de degré ≥ 1, les $\widehat{X}_{i,x}$ sont formellement antiadjoints. On pose :

(3.17) $$\forall\, x \in \omega_1 \quad \widehat{\mathcal{A}}_x = -\sum_{i=1}^{p} (\widehat{X}_{i,x})^2$$

Il est clair que les $\widehat{\mathcal{A}}_x$ sont homogènes de degré 2 et formellement autoadjoints positifs. Nous avons :

<u>Proposition 3.5.</u> i) Pour tout compact $\bar{\omega}_2 \subset \omega_1$, tout compact K de $L^2(\mathbb{R}^n)$, tout compact Γ de $\mathbb{C} \setminus [o,\infty[$, et tout $\varepsilon > o$, il existe un borné $\mathcal{B}$ de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ tel que :
$\forall (x,f,\mu) \in \bar{\omega}_2 \times K \times \Gamma$, $\exists\, u \in \mathcal{B}$: $\|(\widehat{\mathcal{A}}_x - \mu)u - f\|_o \leq \varepsilon$

ii) Pour tout $x \in \omega_1$, $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $D(\widehat{A}_x) = \{u \in L^2(\mathbb{R}^n) / \widehat{\mathcal{A}}_x u \in L^2(\mathbb{R}^n)\}$, et l'opérateur $(\widehat{\mathcal{A}}_x, D(\widehat{A}_x))$ est positif autoadjoint dans $L^2(\mathbb{R}^n)$.

<u>Remarque</u> : le ii) est prouvé en ([3]); nous le déduirons aisément de i).

<u>Démonstration</u> : soit V_x l'espace de Hilbert :

$$V_x = \{u \in L^2(\mathbb{R}^n) \;/\; \forall\, i = 1,\dots,p \;:\; \widehat{X}_{i,x} u \in L^2(\mathbb{R}^n)\}$$

et soit a_x la forme hermitienne continue et coercive sur V_x :

$$a_x(u,v) = \sum_{i=1}^{p} \int_{\mathbb{R}^n} (\widehat{X}_{i,x} u)(\widehat{X}_{i,x} \bar{v})\, d\xi \;.$$

On définit donc par la méthode variationnelle un opérateur $\widehat{A}_x, D(\widehat{A}_x)$ positif autoadjoint dans $L^2(\mathbb{R}^n)$ (Il n'est pas clair que le $D(\widehat{A}_x)$ ainsi défini coïncide avec celui défini en ii) ; nous le prouverons par la suite).

Fixons nous $\bar{\omega}_2, K, \Gamma$ et ε ; il existe un borné B_1 de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ tel que :

$$\text{(3.18)} \qquad \forall\, f \in K \;,\; \exists g \in B_1 : \|f - g\|_o \le \varepsilon/2 \;.$$

Pour $\mu \in \Gamma$ et $x \in \bar{\omega}_2$, l'opérateur $(\widehat{A}_x - \mu)^{-1}$ est défini, et borné de $L^2(\mathbb{R}^n)$ dans V_x , de norme majorée indépendemment de $\mu \in \Gamma$ et $x \in \bar{\omega}_2$:

$$\text{(3.19)} \qquad \|(\widehat{A}_x - \mu)^{-1} g \,.\|_{V_x} \le C_o \|g\|_o$$

avec $C_o^2 = \sup\limits_{\mu \in \Gamma} \sup\limits_{t \in [o,\infty[} \left(\dfrac{1+t}{|t-\mu|^2}\right) < +\infty$.

Soit $\zeta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, ξ valant 1 au voisinage de o ; pour s > o et pour $u = (\widehat{A}_x - \mu)_g^{-1}$, on a, compte tenu de l'homogénéïté des $\widehat{X}_{i,x}$ et de $\widehat{A}_x$:

$$(\widehat{\mathcal{G}}_x - \mu)(\zeta \circ h_s . u) = (\zeta \circ h_s) g - 2s \sum_{i=1}^{p} (\widehat{X}_{i,x} \zeta) \circ h_s \,.\, \widehat{X}_{i,x} u + s^2 (\widehat{\mathcal{G}}_x(\zeta) \circ h_s)\, u \;.$$

On déduit alors de (3.19), que C étant une constante indépendante de $\mu \in \Gamma$, $x \in \bar{\omega}_2$ et $g \in L^2(\mathbb{R}^n)$ on a :

$$\|(\widehat{G}_x-\mu)\,\zeta \circ h_s(\widehat{A}_x-\mu)^{-1}g - (\zeta \circ h_s)\,g\|_o \leq C(s+s^2)\|g\|_o \,.$$

Or $(\zeta \circ h_s)g \to g$ dans $L^2(\mathbb{R}^n)$ lorsque $s \to o$, uniformément pour $g \in B_1$; on en déduit qu'il existe s_o assez petit, pour que :

(3.20) $\forall\, g \in B_1$, $\forall\, \mu \in \bar{\omega}_2$: $\|(\widehat{G}_x-\mu)(\zeta \circ h_{s_o})(\widehat{A}_x-\mu)^{-1}g - g\| \leq \varepsilon/2$.

De plus (3.16) et la différentiabilité en x des champs $\widehat{X}_{i,x}$ nous permettent d'appliquer le théorème 2.1 sur tout compact de $\mathbb{R}^n$; on en déduit que $B_2 = \bigcup_{\mu \in \Gamma} \bigcup_{x \in \bar{\omega}_2} (\widehat{A}_x-\mu)^{-1} B_1$ est borné dans $C^\infty(\mathbb{R}^2)$. Par suite $(\zeta \circ h_{s_o})B_2$ est un borné de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ et le i) de la proposition résulte des estimations (3.18) et (3.20).

Il résulte de i) que pour tout $x \in \omega_1$, $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $D(\widehat{A}_x)$; par suite A_x est la plus petite extension fermée de $\left(\widehat{G}_x\, ,\, \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)\right)$ et par passage à l'adjoint $\widehat{A}_x$ est aussi l'extension maximale , i.e. : $D(A_x) = \{u \in L^2(\mathbb{R}^n) \,/\, G_x u \in L^2(\mathbb{R}^n)\}$.

le ii) de la proposition est alors clair.

Nous voulons donner maintenant quelques propriétés spectrales des opérateurs $\widehat{G}_x$; nous utiliserons le Théorème suivant (cf Kato [8]) :

soient $(A_n\, , D(A_n))_{n \in \mathbb{N}}$ et $(A.D(A))$ des opérateurs auto-adjoints positifs dans un espace de Hilbert H ; on note $E_n(\lambda)$ et $E(\lambda)$ les résolutions de l'identité associées à ces opérateurs. On suppose que A_n converge vers A au sens suivant :

Il existe un sous espace $\mathcal{D}$ dense dans $D(A)$, tel que pour tout u de $\mathcal{D}$, u est dans $D(A_n)$ pour n assez grand et

$\lim_{n\mapsto\infty} \|A_n u - Au\|_H = 0$.

<u>Théorème 3.6.</u> : i) pour tout $\mu\in \mathbb{C}\setminus[0,\infty[$ et pour tout $f\in H$:

$$\lim_{n\mapsto\infty} \|(A_n-\mu)^{-1}f-(A-\mu)^{-1}f\|_H = 0 .$$

ii) pour tout λ non valeur propre de A, et pour tout $f\in H$:

$$\lim_{n\mapsto\infty} \|E_n(\lambda)f - E(\lambda)f\|_H = 0 .$$

Nous notons $\hat{A}_x$ la réalisation de $\hat{\mathcal{Q}}_x$ de domaine $D(A_x)$ et $\hat{E}_x(\lambda)$ la résolution de l'identité associée à $\hat{A}_x$.

<u>Lemme 3.7.</u> : soit $f\in L^2(\mathbb{R}^n)$:

i) l'application $(x,\mu)\to(\hat{A}_x-\mu)^{-1} f$ est continue de $\omega_1\times \mathbb{C}\setminus[0,\infty[$ dans $L^2(\mathbb{R}^n)$

ii) l'application $(x,\lambda)\to\hat{E}_x(\lambda)f$ est continue de $\omega_1\times\,]0,\infty[$ dans $L^2(\mathbb{R}^n)$ et $\hat{A}_x$ n'a pas de valeurs propres.

<u>Démonstration</u> : soit $H_t(t>0)$ l'isométrie dans $L^2(\mathbb{R}^n)$ définie par :

$$(H_t f)\,(\xi) = t^{\nu/2}(f\circ h_t)\,(\xi) \tag{3.21}$$

où $\nu = \sum_{k=1}^{r} k(\nu_k-\nu_{k-1})$ est la dimension homogène de $\mathbb{R}^n$ ([3]) .

Il résulte de l'homogénéité de $\hat{\mathcal{Q}}_x$ que $H_t\big(D(\hat{A}_x)\big) = D(\hat{A}_x)$ et que :

$$H_t^{-1} \widehat{A}_x H_t = t^2 \widehat{A}_x$$

Par suite on a :

(3.22) $$H_t^{-1} \widehat{E}_x(\lambda) H_t = \widehat{E}_x(t^{-2}\lambda)$$

On en déduit que :

$$\|\widehat{E}_x(\lambda)f - \widehat{E}_x(t^{-2}\lambda)f\|_o^2 = |(\widehat{E}_x(\lambda)f , f) - (\widehat{E}_x(\lambda)H_t f , H_t f)| \quad \text{et}$$

$$\|(\widehat{E}_x(\lambda) - \widehat{E}_x(t^{-2}\lambda))f\|_o^2 \leq 2\|f\|_o \|H_t f - f\|_o .$$

Lorsque $t \mapsto 1$ $\|H_t f - f\|_o \mapsto o$ et on a pour $\lambda_o > o$:

(3.23) $$\lim_{\lambda \mapsto \lambda_o} \left\{ \sup_{x \in \omega_1} \|\widehat{E}_x(\lambda)f - \widehat{E}_x(\lambda_o)f\|_o \right\} = o .$$

On en déduit que tout $\lambda_o > o$ n'est pas valeur propre de $\widehat{A}_x$.

Il résulte directement de l'équation résolvante :

$$(\widehat{A}_x - \mu)^{-1} - (\widehat{A}_x - \mu_o)^{-1} = (\mu - \mu_o)(\widehat{A}_x - \mu)^{-1}(\widehat{A}_x - \mu_o)^{-1}$$

et de (3.19) que pour tout $\mu_o \in \mathbb{C} \setminus [o, \infty[$ on a :

(3.24) $$\lim_{\mu \to \mu_o} \left\{ \sup_{x \in \omega_1} \|(\widehat{A}_x - \mu)^{-1} f - (\widehat{A}_x - \mu_o)^{-1} f\|_o \right\} = o .$$

Fixons $x_1 \in \omega_1$; on a vu que $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $D(\widehat{A}_{x_1})$ et il est clair, d'après la différentiabilité en x des champs $\widehat{X}_{i,x}$, que pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \subset D(\widehat{A}_x)$:

$$\lim_{x \mapsto x_1} \|A_x \varphi - A_{x_1} \varphi\|_o = o .$$

On déduit alors du Théorème 3.6. que :

(3.25) $$\lim_{x \mapsto x_1} \|(\widehat{A}_x - \mu_o)^{-1} f - (\widehat{A}_{x_1} - \mu_o)^{-1} f\|_o = o$$

(3.26) $$\lim_{x \mapsto x_1} \|\widehat{E}_x(\lambda_o)f - \widehat{E}_{x_1}(\lambda_o)f\|_o = o$$

(3.24) et (3.25) donnent le i) ; (3.23) et (3.26) donnent le ii).

Pour être tout à fait complet il ne nous reste qu'à vérifier que o n'est pas valeur propre de $\hat{A}_x$; supposons que $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$ vérifie $\hat{G}_x u = o$. On déduit de la densité de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ dans $D(\hat{A}_x)$, ou du fait que $\hat{A}_x$ est aussi l'opérateur variationnel défini plus haut, que :

$$o = (\hat{G}_x u\,,\,u) = a_x(u\,,\,u)\;.$$

Par suite $\hat{X}_{i,x} u = o$ et pour tout I, $\hat{X}_{I,x} u = o$; il résulte alors de (3.16) que u est une constante et donc u est nulle.

<u>Proposition 3.8.</u> : le noyau $\hat{e}_x(\lambda)$ de $\hat{E}_x(\lambda)$ est C^∞ sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, et l'application $(x\,,\lambda) \to \hat{e}_x(\lambda)$ est continue de $\omega_1 \times]o\,,\infty[$ dans $C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$. De plus pour tout $x \in \omega_1$, la fonction $\lambda \to \hat{e}_x(\lambda\,;o\,,o)$ est strictement positive et homogène de degré $\nu/2$ où $\nu = \sum_{k=1}^{r} k\,(\nu_k - \nu_{k-1})$.

<u>Remarque</u> : pour tout $x \in \omega_1$ on peut munir $\mathbb{R}^n$ d'une structure de groupe de Lie nilpotent telle que l'algèbre de Lie engendrée par les $\hat{X}_{i,x}$ soit précisément l'algèbre de Lie des champs de vecteurs invariants à gauche. On en déduit que $\hat{e}_x(\lambda)$ est un noyau de convolution sur ce groupe et en particulier on a :

$$(3.27) \qquad \forall\, \xi \in \mathbb{R}^n \;:\; \hat{e}_x(\lambda\,;\xi\,,\xi) = \hat{e}_x(\lambda\,;o\,,o)$$

<u>Démonstration</u> : soit $\bar{\omega}_2$ un compact inclus dans ω_1 et soit $[a\,,b]$ un compact de $]o\,,\infty[$; nous appliquons la proposition (2.7) en prenant comme espace de paramètre $T = \bar{\omega}_2 \times [a\,,b]$, comme champs de vecteurs $X_{i,t} = \hat{X}_{i,x}$ si $t = (x,\lambda)$, comme ouvert ω $\mathbb{R}^n$ et

comme opérateurs $E_t = \widehat{E}_x(\lambda)$. Les hypothèses (2.9) et (2.10) sont satisfaites grâce à (3.16) ; $\widehat{E}_x(\lambda)$ étant de norme majorée par $(1+\lambda)^k$ en tant qu'opérateur de $L^2(\mathbb{R}^n)$ dans $D(\widehat{A}_x^k)$ l'hypothèse (2.11) est aussi satisfaite. On en déduit que les noyaux $\hat{e}_x(\lambda)$ sont pour $x \in \bar{\omega}_2$ et $\lambda \in [a, b]$ dans un borné $\mathcal{B}$ de $C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$.

Or il résulte du Lemme 2.6 et du Lemme 3.7 que l'application $(x, \lambda) \to \hat{e}_x(\lambda)$ est continue de $\bar{\omega}_1 \times]o, \infty[$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$; par suite elle est continue de $\bar{\omega}_2 \times [a, b]$ dans $C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ puisque sur le borné $\mathcal{B}$ les topologies C^∞ et $\mathcal{D}'$ coïncident.

On déduit de (3.22) que l'on a, pour tout $t > o$:

$$\hat{e}_x(t^2\lambda ; \xi, \eta) = t^\nu\, \hat{e}_x(\lambda ; h_t\xi, h_t\eta) .$$

En particulier on a

$$\hat{e}_x(t^2\lambda ; o, o) = t^\nu\, \hat{e}_x(\lambda ; o, o) . \tag{3.28}$$

Il nous faut encore vérifier que $\hat{e}_x(\lambda ; o, o) > o$; cela résulterait directement de (3.27) mais on peut le voir de la manière suivante :

$E_x(\lambda)$ étant un projecteur orthogonal, on a :

$$\hat{e}_x(\lambda ; o, o) = \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{e}_x(\lambda ; o, \xi)|^2\, d\xi \geq o . \tag{3.29}$$

Supposons que $\hat{e}_x(\lambda_o ; o, o) = o$, par (3.28) $\hat{e}_x(\lambda ; o, o) = o$ pour tout $\lambda > o$, et par (3.29) on a $\left(\widehat{E}_x(\lambda)f\right)(o) = o$ pour tout $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$; or pour $f \in D(\widehat{A}_x^k)$ $E_x(\lambda) \mapsto f$ dans $D(A_x^k)$ lorsque $\lambda \mapsto +\infty$, et par suite $\widehat{E}_x(\lambda)\, f \mapsto f$ dans $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ lorsque $\lambda \to +\infty$ si $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. On en déduit donc que $f(o) = \lim_{\lambda \mapsto \infty} \left(\widehat{E}_x(\lambda)f\right)(o) = o$ pour tout $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ ce qui est évidemment faux, et cette contradiction achève la démonstration de la proposition 3.8 .

4. DEMONSTRATION DES THEOREMES 1.1. ET 1.3.

4.1. Localisation

Nous reprenons les notations du paragraphe 1 : M est une variété C^∞ munie d'une densité positive dy (2) ; ω et Ω ouverts de M ; les champs $X_1,\dots,X_p$ vérifient (1.2.) et (1.3.). $(A , D(A))$ est une réalisation minorée autoadjointe dans $L^2(\Omega)$ de l'opérateur (1.1.) $\mathcal{G}$; sans nuire à la généralité, nous supposons que A est positif.

On note $E(\lambda)$ la résolution de l'identité associée à A ; il résulte de la sous-ellipticité de $\mathcal{G}$ (voir Théorème 2.1.) que les fonctions de $D(A^\infty) = \bigcap_{k \geq 0} D(A^k)$ sont C^∞ sur $\omega \cap \Omega$; par suite le noyau de $E(\lambda)$ est C^∞ sur $(\omega \cap \Omega) \times (\omega \cap \Omega)$ (voir proposition 2.7.). On note $e(\lambda ; x , y)$ ce noyau.

Le point $x_0 \in \omega \cap \bar{\Omega}$ est fixé: on note ω_1 , ω_0 , U_0 et θ les voisinages et l'application construits au théorème 3.1. ; on supposera que U_0 est une boule de centre o.

Pour tout $x \in \omega_1$ la densité dy peut s'écrire dans la carte locale θ_x sous la forme : $\delta^2(x , \xi) d\xi$, la fonction δ étant strictement positive et C^∞ sur un voisinage de (x_0, o) qui contient $\omega_1 \times U_0$; on note δ_x l'application $\xi \mapsto \delta(x , \xi)$.

Pour $x \in \omega_1$ on définit les opérateurs Θ_x de $L^2(\mathbb{R}^n)$ dans $L^2(\omega_o)$ et Φ_x de $L^2(M)$ dans $L^2(U_o)$ par :

$$(4.1) \quad \begin{cases} \forall\, u \in L^2(\mathbb{R}^n) \quad \forall\, y \in \omega_o : (\Theta_x u)(y) = (u/_{\delta_x}) \circ \theta_x(y) \\ \forall\, v \in L^2(M) \quad \forall\, \xi \in U_o : (\Phi_x v)(\xi) = (v \circ \theta_x^{-1})(\xi) \end{cases}$$

On a les relations :

$$(4.2) \quad \begin{cases} \|\Theta_x u\|_{L^2(\omega_o)} = \|u\|_{L^2(\theta_x(\omega_o))} \leq \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\ \|\Phi_x v\|_{L^2(U_o)} = \|v\|_{L^2(\theta_x^{-1}(U_o))} \leq \|v\|_{L^2(M)} \end{cases}$$

De plus Φ_x et Θ_x sont adjoints l'un de l'autre au sens suivant : pour tout u de $L^2(\mathbb{R}^n)$ à support dans U_o et pour tout $v \in L^2(M)$, on a :

$$(4.3) \qquad \int_{\omega_o} (\Theta_x u).v \, dy = \int_{U_o} u.(\Phi_x v) \, d\xi$$

On remarque encore que Θ_x opère de $\mathcal{D}(U_o)$ dans $\mathcal{D}(\omega_o)$ et se prolonge de $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ dans $\mathcal{D}'(\omega_o)$ et que Φ_x opère de $C^\infty(M)$ dans $C^\infty(U_o)$ et se prolonge de $\mathcal{D}'(M)$ dans $\mathcal{D}'(U_o)$.

Conformément au théorème 3.1 on note $X_{i,x} = (\theta_x)_* X_i$ l'image de X_i par θ_x ; pour $u \in C^\infty(M)$ on a donc :

$$(X_i u) \circ \theta_x^{-1} = X_{i,x}(u \circ \theta_x^{-1})$$
$$(X_i^* u) \circ \theta_x^{-1} = \delta_x^{-2} X_{i,x}^*(\delta_x^2 u \circ \theta_x^{-1}) .$$

Utilisant en outre le fait que :

$$X^*_{i,x}(u.v) = (X^*_{i,x}u).v - u.(X_{i,x}v)$$

on obtient que :

(4.4) $\qquad \forall\, u \in C^\infty(M) \qquad \Phi_x \mathcal{a}\, u = \mathcal{a}_x \Phi_x u$

où $\mathcal{a}_x$ est l'opérateur

(4.5) $\qquad \mathcal{a}_x = \sum_{i=1}^{p} X^*_{i,x} \cdot X_{i,x} + c_x$

avec

(4.6) $\qquad c_x = c \circ \theta_x^{-1} + \left\{ \sum_{i=1}^{p} (X^*_{i,x}\, X_{i,x})(\delta_x) \right\} / \delta_x$

Notons que $(x, \xi) \to c_x(\xi)$ est C^∞ sur $\omega_1 \times U_0$

Utilisant (4.3.) pour $v \in \mathcal{D}(\omega_0)$ on obtient aussi que

(4.7) $\qquad \forall\, u \in \mathcal{D}(U_0) \quad \mathcal{a}\, \theta_x u = \theta_x \mathcal{a}_x u$.

Nous transformons les $\mathcal{a}_x$ par h_t et nous définissons pour $t \geq 1$ sur $h_t(U_0) \supset U_0$ les opérateurs $\mathcal{a}_{t,x}$ et $X_{i,t,x}$ par :

$$(4.8) \qquad \begin{aligned} X_{i,t,x}u &= t^{-1}\left\{X_{i,x}(u \circ h_t)\right\} \circ h_t^{-1} \\ \mathcal{a}_{t,x}u &= t^{-2}\left\{\mathcal{a}_x(u \circ h_t)\right\} \circ h_t^{-1} \end{aligned}$$

et on a :

$$\mathcal{a}_{t,x} = \sum_{i=1}^{p} X^*_{i,t,x}\, X_{i,t,x} + c_{t,x}$$

avec

$$c_{t,x} = t^{-2}.\ c_x \circ h_t^{-1} \qquad .$$

Suivant le théorème 3.1 on introduit encore les champs $\hat{X}_{i,x}$ partie homogène de degré 1 de $X_{i,x}$ et les opérateurs $\hat{\mathcal{a}}_x$ de (3.17) partie homogène de degré 2 de $\mathcal{a}_x$. Il sera agréable de convenir que pour $t = +\infty$ $X_{i,t,x} = \hat{X}_{i,x}$, $c_{t,x} = 0$ et $\mathcal{a}_{t,x} = \hat{\mathcal{a}}_x$.

<u>Lemme</u> 4.1. soit $\bar{\omega}_2$ un compact de ω_1 ; les opérateurs $\mathcal{A}_{t,x}$ et les champs $X_{i,t,x}$, pour $(t,x) \in [1, \infty] \times \bar{\omega}_2$ vérifient les hypothèses (2.9) et (2.10) sur l'ouvert U_o .

<u>Démonstration</u> : $(\theta_x)_*$ étant un homomorphisme d'algèbre de Lie on a :

$$\forall\, x \in \omega_1 ,\quad \forall\, \xi \in U_o ,\ \forall\, k = 1,\ldots,r : \dim V_k(\xi ; X_{1,x},\ldots,X_{p,x}) = \nu_k$$

on en déduit que pour $t \in [1, \infty[$

$$\text{(4.9)} \quad \forall\, x \in \omega_1 ,\ \forall\, \xi \in U_o \subset h_t(U_o)\ \forall\, k = 1,\ldots,r : \dim V_k(\xi ; X_{1,t,x},\ldots,X_{p,t,x}) = \nu_k$$

Le point iii) du théorème 3.1 affirme que (4.9) a encore lieu pour $t = +\infty$; l'hypothèse (2.10) est donc satisfaite.

Ecrivons le champ $X_{i,x}$ sous la forme $\sum_{j=1}^{n} a_j(x,\xi) \frac{\partial}{\partial \xi_j}$.

Les fonctions a_j sont C^∞ sur $\omega_1 \times U_o$ et puisque $X_{i,x}$ est d'ordre ≤ 1 en o , pour tout $x \in \omega_1$ $a_j(x,.) \in C^\infty_{[j]-1}(U_o)$; on peut donc écrire :

$$X_{i,x} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{[\alpha]=[j]-1} a_j^\alpha(x,\xi) . \xi^\alpha \frac{\partial}{\partial \xi_j}$$

les fonctions $a_j^\alpha(x,\xi)$ étant C^∞ sur $\omega_1 \times U_o$.

On a :

$$X_{i,t,x} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{[\alpha]=[j]-1} a_j^\alpha(x, h_t^{-1}.\xi) . \xi^\alpha \frac{\partial}{\partial \xi_j}$$

et

$$\hat{X}_{i,x} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{[\alpha]=[j]-1} a_j^\alpha(x, o) . \xi^\alpha \frac{\partial}{\partial \xi_j} .$$

Le lemme 4.1 résulte donc du lemme suivant :

<u>Lemme 4.2.</u> : soit c une fonction C^∞ sur $\omega_1 \times U_o$; pour $t \in [1,\infty[$ on pose $c_t(x, \xi) = c(x, h_t^{-1}\xi)$ et $C_\infty(x,\xi) = c(x,o)$. Alors l'application $t \to c_t$ est continue de $[1,\infty]$ dans $C^\infty(\omega_1 \times U_o)$, et l'application $(t,x) \to c_t(x, .)$ est continue de $[1, \infty] \times \omega_1$ dans $C^\infty(U_o)$.

Nous avons aussi :

<u>Lemme 4.3.</u> : soit $\bar{\omega}_2$ un compact de ω_1 ; soit $\mathcal{B}$ un borné de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Alors $G_{t,x}u$ converge dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ vers $\hat{G}_x u$ lorsque $t \to +\infty$ uniformément par rapport à $(x, u) \in \bar{\omega}_2 \times \mathcal{B}$.

<u>Démonstration</u> : il existe un compact K tel que supp $u \subset K$ pour tout u de $\mathcal{B}$; pour $t \geq t_1 \geq 1$ on a $K \subset h_t(U_o)$ et $G_{t,x}\mathcal{B} \subset \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.

On vérifie comme ci-dessus que les coefficients de $\hat{G}_{t,x}$ sont des fonctions continues de $(t,x) \in [t_1,\infty] \times \omega_1$ à valeurs dans $C^\infty(K)$; par suite les coefficients de $G_{t,x}$ convergent lorsque $t \to +\infty$, dans $C^\infty(K)$, vers les coefficients de G_x, uniformément en $x \in \bar{\omega}_2$, et le lemme en découle aussitôt.

Pour $u \in L^2(U_o)$ [resp. $L^2(\omega_o)$] on convient de noter $\tilde{u}$ le prolongement de u par o sur $\mathbb{R}^n \setminus U_o$ [resp $M \setminus \omega_o$] ; en particulier on note $\tilde{\Theta}_x$ et $\tilde{\Phi}_x$ les opérateurs $\tilde{\Theta}_x u = \widetilde{\Theta_x u}$ et $\tilde{\Phi}_x v = \widetilde{\Phi_x v}$.

De même on prolonge $E(\lambda)$ en un projecteur orthogonal dans $L^2(M)$, $\tilde{E}(\lambda)$, en définissant $\tilde{E}(\lambda)v$ comme étant le prolongement par o sur $M \setminus \Omega$ de $E(\lambda)(v_{|\Omega})$.

Pour $t \in [1,\infty[$, $x \in \omega_1$ et $\lambda > o$ on introduit l'opérateur

(4.10) $$E_{t,x}(\lambda) = H_t^{-1}\,\tilde{\Phi}_x\,\tilde{E}(t^2\lambda)\,\tilde{\theta}_x\,H_t$$

où H_t est l'isométrie de $L^2(\mathbb{R}^n)$ définie en (3.21)

$E_{t,x}(\lambda)$ est un opérateur borné dans $L^2(\mathbb{R}^n)$, de norme ≤ 1.

Notant $\Omega_x = U_o \cap \theta_x(\omega_o \cap \Omega)$ et $\Omega_{t,x} = h_t(\Omega_x)$,

on déduit de la définition (4.10) que le noyau de $E_{t,x}(\lambda)$ est C^∞ sur $\Omega_{t,x} \times \Omega_{t,x}$ et est donné pour $(\xi,\eta) \in \Omega_{t,x} \times \Omega_{t,x}$ par :

(4.11) $$e_{t,x}(\lambda\,;\xi,\eta) = t^{-\nu}\,\delta_x(h_t^{-1}\xi)\cdot\delta_x(h_t^{-1}\eta)\cdot e(t^2\lambda;\,\theta_x^{-1}h_t^{-1}\xi;\,\theta_x^{-1}h_t^{-1}\eta)$$

En particulier pour tout $x \in \omega_1 \cap \Omega$, $o \in \Omega_{t,x}$ et

(4.12) $$\forall x \in \omega_1 \cap \Omega : e(t^2\lambda\,;x,x) = t^\nu\big(\delta_x(o)\big)^{-2}\cdot e_{t,x}(\lambda\,;o,o)$$

On introduit encore les opérateurs $F_{t,x}(\lambda)$, bornés dans $L^2(U_o)$ et de normes ≤ 1 définis par :

(4.13) $$\forall\, u \in L^2(U_o) : F_{t,x}(\lambda)u = \big(E_{t,x}(\lambda)\tilde{u}\big)\big|_{U_o}$$

Le noyau de $F_{t,x}(\lambda)$ est C^∞ sur $(U_o \cap \Omega_{t,x}) \times (U_o \cap \Omega_{t,x})$ et y est égal à $e_{t,x}(\lambda\,;\xi,\eta)$.

Pour u et v dans $L^2(U_o)$ on a :

$$\int_{U_o} F_{t,x}(\lambda)u\cdot v\,d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} (\tilde{\Phi}_x\,\tilde{E}(t^2\lambda)\,\tilde{\theta}_x H_t\tilde{u})\,H_t\tilde{v}\;d\xi\,.$$

Or $H_t\tilde{v}$ est à support dans $h_t^{-1}v_o \subset U_o$; par (4.3) on a alors :

$$\int_{U_o}\big(F_{t,x}(\lambda)u\big)v\;d\xi = \int_M \big(\tilde{E}(t^2\lambda)\tilde{\theta}_x H_t\tilde{u}\big)\cdot\big(\tilde{\theta}_x H_t\tilde{v}\big)\,dy$$

et il est alors clair que $F_{t,x}(\lambda)$ est positif autoadjoint dans $L^2(U_o)$.

4.2 Etude à l'intérieur

Nous passons à la démonstration du Théorème 1.1 : fixons nous un compact $\overline{\omega}_2 \subset \omega_1 \cap \Omega$; il existe $t_1 \geq 1$ tel que pour tout $t \geq t_1$ et tout $x \in \overline{\omega}_2$, $\Omega_{t,x}$ contienne U_o ; le schéma de la démonstration est le suivant : utilisant la proposition 2.7, on prouve le

> Lemme 4.4. l'ensemble des fonctions $e_{t,x}(\lambda; ., .)$ pour $t \geq t_1$, $x \in \overline{\omega}_2$ et $\lambda \leq 1$ est un borné $\mathcal{B}$ de $C^{\infty}(U_o \times U_o)$.

Ensuite on déduit de la convergence $\mathcal{Q}_{t,x} \longrightarrow \hat{\mathcal{Q}}_x$ par une adaptation du théorème 3.6 le

> Lemme 4.5. pour tout λ et tout $f \in L^2(R^n)$, on a :
>
> $$\lim_{t \to +\infty} \{ \sup_{x \in \overline{\omega}_2} \|E_{t,x}(\lambda)f - \hat{E}_x(\lambda)f\|_{L^2(R^n)} \} = 0$$

On en déduit alors, avec le lemme 2.6, la convergence dans $\mathcal{D}'(R^n \times R^n)$ du noyau $e_{t,x}(\lambda)$ de $E_{t,x}(\lambda)$ vers $\hat{e}_x(\lambda)$, uniformément par rapport à $x \in \overline{\omega}_2$; mais sur le borné $\mathcal{B}$ la topologie de $\mathcal{D}'(U_o \times U_o)$ et la topologie de $C^{\infty}(U_o \times U_o)$ coïncident ; par suite $e_{t,x}(\lambda; ., .)$ converge vers $\hat{e}_x(\lambda ; ., .)$ dans $C^{\infty}(U_o \times U_o)$ uniformément par rapport à $x \in \overline{\omega}_2$. En particulier :

$$(4.14) \qquad \lim_{t \to +\infty} \{ \sup_{x \in \overline{\omega}_2} |e_{t,x}(\lambda; 0, 0) - \hat{e}_x(\lambda, 0, 0)| \} = 0$$

Rappelons (cf proposition 3.8) que la fonction $x \to \hat{e}_x(\lambda; 0, 0)$ est continue et strictement positive ; prenant $\lambda = 1$, regroupant (4.12) et (4.14), nous voyons que nous avons démontré la :

Proposition 4.6. sous les hypothèses du théorème 1.1, pour tout $x_o \in \omega \cap \bar{\Omega}$, il existe un voisinage ω_1 de x_o, une fonction γ continue et strictement positive sur ω_1 telle que pour tout compact $K \subset \omega_1 \cap \Omega$, on ait :

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \{ \sup_{x \in K} |\lambda^{-\nu/2} e(\lambda; x, x) - \gamma(x)| \} = 0$$

Il en résulte que la fonction

$$\gamma(x) = \lim_{\lambda \to +\infty} \lambda^{-\nu/2} e(\lambda; x, x)$$

est définie sur $\omega \cap \Omega$, et se prolonge (de manière unique !) en fonction continue strictement positive sur $\omega \cap \bar{\Omega}$.

Il nous suffit donc de prouver les lemmes 4.4 et 4.5 pour achever la démonstration du théorème 1.1.

Démonstration du Lemme 4.4.

Nous avons déjà vérifié que les opérateurs $G_{t,x}$ satisfont aux hypothèses (2.9) et (2.10) (Lemme 4.1) (ici $t \in [1, \infty]$, avec la convention $G_{\infty,x} = \hat{G}_x$). Nous allons prouver que les opérateurs $F_{t,x}(\lambda)$, autoadjoints dans $L^2(U_o)$, vérifient (2.11), la proposition 2.7 donnant directement le lemme 4.4.

Soit $u \in L^2(U_o)$; posons $v = \tilde{\Theta}_x H_t \tilde{u}$; on a :

$$\|v\|_{L^2(M)} \leq \|u\|_{L^2(U_o)}$$

soit $w = E(t^2 \lambda)\,(v_{|\Omega})$; alors $w \in D(A^\infty)$ et :

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \mathcal{C}^k w \in L^2(\Omega) \text{ et } \|\mathcal{C}^k w\|_{L^2(\Omega)} \leq t^{2k} \lambda^k \|v_{|\Omega}\|_{L^2(\Omega)}$$

Utilisant (4.4) on obtient que :

$$\Phi_x \mathcal{C}^k w = \mathcal{C}_x^k \Phi_x w \qquad \text{dans} \quad \Omega_x$$

et :

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \mathcal{C}_x^k \Phi_x w \in L^2(\Omega_x) \text{ et}$$

$$\|\mathcal{C}_x^k \Phi_x w\|_{L^2(\Omega_x)} \leq \lambda^k . t^{2k} \|u\|_{L^2(U_o)}$$

Par (4.8) on a aussi :

$$\mathcal{C}_{t,x}^k H_t^{-1} \tilde{\Phi}_x w = t^{-2k} H_t^{-1} \widetilde{\mathcal{C}_x^k \Phi_x w} \qquad \text{sur} \quad \Omega_{t,x}$$

Par suite, pour $t \geq t_1$ on a puisque $\Omega_{t,x} \supset U_o$:

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \mathcal{C}_{t,x}^k F_{t,x}(\lambda)\, u \in L^2(U_o) \text{ et}$$

$$\|\mathcal{C}_{t,x}^k F_{t,x}(\lambda)\, u\|_{L^2(U_o)} \leq \lambda^k \|u\|_{L^2(U_o)}$$

ce qui achève la vérification de l'hypothèse (2.11) .

<u>Démonstration du Lemme 4.5</u>

Nous reprenons la démonstration du théorème 3.6 (cf [8]).

Fixons nous $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, $\lambda > 0$ et $\varepsilon > 0$ ($\varepsilon < 1$) . D'après la proposition 3.7 il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in \overline{\omega}_2$:

$$(4.16) \quad \left\{ \begin{aligned} &\|\hat{E}_x(\lambda + \eta) f - \hat{E}_x(\lambda)\, f\|_o \leq \varepsilon \\ &\|\hat{E}_x(\lambda)\, f - \hat{E}_x(\lambda - \eta)\, f\|_o \leq \varepsilon \end{aligned} \right.$$

Pour alléger les notations nous posons $E_x^+ = 1 - \hat{E}_x(\lambda + \eta)$ et $E_x^- = \hat{E}_x(\lambda - \eta)$. D'après la proposition 3.7 les ensembles $K_\pm = \{ E_x^\pm f \; ; x \in \bar{\omega}_2 \}$, images d'un compact par une application continue, sont des compacts de $L^2(R^n)$.

On désigne par Γ_+ [resp. Γ_-] le cercle dans le plan complexe de centre 0 de rayon $(\lambda + \eta/2)$ [resp $\lambda - \eta/2$] , et par Γ'_+ [resp Γ'_-] l'arc de cercle des $\mu \in \Gamma_+$ [resp $\mu \in \Gamma_-$] tels $|\mu - \lambda - \eta/2| \geq \epsilon\eta$ [resp $|\mu - \lambda + \eta/2| \geq \epsilon\eta$] .

On déduit de la proposition 3.5 qu'il existe des bornés $\mathcal{B}_+$ et $\mathcal{B}_-$ de $\mathcal{D}(R^n)$ tels que

$$(4.17) \qquad \forall (x, \mu) \in \bar{\omega}_2 \times \Gamma'_\pm \qquad \exists g \in \mathcal{B}_\pm : \|(\hat{\mathcal{A}}_x - \mu)g - E_x^\pm f\|_0 \leq \epsilon^2 \eta$$

Notant la majoration :

$$\forall \mu \in \Gamma'_\pm \qquad \|(\hat{A}_x - \mu)^{-1}\|_{L^2(R^n) \to L^2(R^n)} \leq \frac{1}{\epsilon\eta}$$

on a avec les notations de (4.17)

$$(4.18) \qquad \|g - (\hat{A}_x - \mu)^{-1} E_x^\pm f\|_0 \leq \epsilon$$

D'après le lemme 4.3 il existe $t_0 \geq t_1$ tel que pour tout $t \geq t_0$ on ait :

$$(4.19) \qquad \sup_{x \in \bar{\omega}_2} \; \sup_{u \in \mathcal{B}_+ \cup \mathcal{B}_-} \|\mathcal{A}_{t,x} u - \hat{\mathcal{A}}_x u\|_0 \leq \epsilon^2 \eta$$

D'autre part, on déduit de l'inclusion $\bar{\omega}_2 \subset \omega_1 \cap \Omega$ et de la compacité de $\bar{\omega}_2$ qu'il existe un voisinage $U_1 \subset U_0$ de 0 tel que pour tout $x \in \bar{\omega}_2$ $\theta_x(\omega_1 \cap \Omega) \supset U_1$. On peut supposer t_0 assez grand pour que pour tout $t \geq t_0$ on ait

$$\forall u \in \mathcal{B}_+ \cup \mathcal{B}_- \quad \operatorname{supp}(u \circ h_t) = \operatorname{supp} H_t\, u \subset U_1$$

Pour $u \in \mathcal{B}_+ \cup \mathcal{B}_-$ et $t \geq t_0$ on a donc $H_t\, u \subset \mathscr{D}(U_1)$ et par suite $\Theta_x\, H_t\, u \in \mathscr{D}(\omega_1 \cap \Omega)$. Par (4.7) et (4.8) on a alors :

$$(4.20) \quad (\mathcal{A} - t^2\,\mu)\, \Theta_x\, H_t\, u = t^2\, \Theta_x(\mathcal{A}_{t,x} - \mu)\, u \in \mathscr{D}(\omega_1 \cap \Omega)$$

Nous notons $R(\mu) = (A - \mu)^{-1}$ la résolvante de A et $\widetilde{R}(\mu)$ l'opérateur défini par : $\widetilde{R}(\mu)v$ est le prolongement par 0 sur $M \setminus \Omega$ de $R(\mu)(v_{|\Omega})$. Pour $u \in \mathcal{B}_+ \cup \mathcal{B}_-$ on a $\Theta_x\, H_t\, u \in \mathscr{D}(\omega_1 \cap \Omega) \subset D(A)$; on déduit alors de (4.20) que

$$\Theta_x\, H_t\, u = t^2\, R(t^2\,\mu)\, \Theta_x\, H_t(\mathcal{A}_{t,x} - \mu)\, u$$

et

$$(4.21) \qquad \widetilde{\Theta}_x\, H_t\, u = t^2\, \widetilde{R}(t^2\,\mu)\, .\, \widetilde{\Theta}_x\, H_t(\mathcal{A}_{t,x} - \mu)\, u$$

On a la majoration suivante :

$$(4.22) \qquad \|t^2\, \widetilde{R}(t^2\,\mu)\| \leq \frac{1}{\epsilon\eta} \qquad (\mu \in \Gamma'_\pm)$$

On pose pour simplifier :

$$S_{t,x}(\mu) = \widetilde{\Theta}_x\, H_t(\hat{A}_x - \mu)^{-1} - t^2\, \widetilde{R}(t^2\,\mu)\, \widetilde{\Theta}_x\, H_t \quad .$$

On déduit alors des estimations (4.17) à (4.22) que :

$$(4.23) \quad \sup_{t \geq t_0}\ \sup_{x \in \overline{\omega}_2}\ \sup_{\mu \in \Gamma'_\pm} \|S_{t,x}(\mu) . E_x^\pm\, f\|_0 \leq 3\epsilon$$

On définit encore les opérateurs :

$$\Delta^{+}_{t,x}(\mu) = \tilde{E}(t^2 \lambda)\, S_{t,x}(\mu)\, E^{+}_{x}$$

$$\Delta^{-}_{t,x}(\mu) = (1 - \tilde{E}(t^2 \lambda))\, S_{t,x}(\mu)\, E^{-}_{x}$$

Notons les majorations :

$$\sup_{\mu \in \Gamma_\pm} \|(\hat{A}_x - \mu)^{-1} E^{\pm}_{x}\| \leq 2/\eta$$

$$\sup_{\mu \in \Gamma_+} \|\tilde{E}(t^2 \lambda) t^2 . \tilde{R}(t^2 \mu)\| \leq 2/\eta$$

$$\sup_{\mu \in \Gamma_-} \|(1 - \tilde{E}(t^2 \lambda))\, t^2\, \tilde{R}(t^2 \mu)\| \leq 2/\eta$$

les normes étant celles d'opérateurs de L^2

On en déduit la majoration :

$$(4.24) \qquad \sup_{\mu \in \Gamma_\pm} \|\Delta^{\pm}_{t,x}(x)\|_{L^2(R^n) \to L^2(M)} \leq 4/\eta$$

On considère maintenant les intégrales $\frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma_\pm} \Delta^{\pm}_{t,x}(\mu) f . d\mu$.

On majore l'intégrale sur $\Gamma'_\pm$ par (4.23) et l'intégrale sur $\Gamma_\pm \setminus \Gamma'_\pm$ par (4.24) pour obtenir :

(4.25) $\quad \forall x \in \bar{\omega}_2$,

$$\forall t \geq t_0 \quad \left\| \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma_\pm} \Delta^{\pm}_{t,x}(\mu) f \, d\mu \right\|_{L^2(M)} \leq (3\lambda + 8)\epsilon$$

Or, on a :

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma_+} \Delta^{+}_{t,x}(\mu) f . d\mu = - \tilde{E}(t^2 \lambda)\, \tilde{\Theta}_x\, H_t (1 - \hat{E}_x(\lambda + \eta))\, f$$

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma_-} \Delta^{-}_{t,x}(\mu) f . d\mu = (1 - \tilde{E}(t^2 \lambda))\, \tilde{\Theta}_x\, H_t\, \hat{E}_x(\lambda - \eta)\, f$$

Ajoutant ces égalités et tenant compte de (4.16) et (4.25), on obtient finalement que :

$$(4.26)\quad \sup_{t \geq t_o} \sup_{x \in \overline{\omega}_2} \|\widetilde{E}(t^2 \lambda)\, \widetilde{\Theta}_x H_t f - \widetilde{\Theta}_x H_t \hat{E}_x(\lambda) f\|_{L^2(M)} \leq (6\lambda + 18)\, \epsilon$$

Revenant à la définition de $E_{t,x}(\lambda)$ ((4.10)) , en notant $G_{t,x} = H_t^{-1} \widetilde{\Phi}_x \widetilde{\Theta}_x H_t$, et utilisant une fois de plus que $\widetilde{\Phi}_x$ et H_t^{-1} sont de norme ≤ 1 , on a :

$$(4.27)\quad \sup_{t \geq t_o} \sup_{x \in \overline{\omega}_2} \|E_{t,x}(\lambda) f - G_{t,x}.\hat{E}_x(\lambda) f\|_{L^2(R^n)} \leq (6\lambda + 18)\epsilon$$

On aura terminé la démonstration si l'on prouve que pour tout $u \in L^2(R^n)$ $G_{t,x}\, u \to u$ quand $t \to +\infty$, uniformément en $x \in \overline{\omega}_2$; en effet, par la proposition 3.7 l'ensemble des $\hat{E}_x(\lambda) f$ $(x \in \overline{\omega}_2)$ est un compact K de $L^2(R^n)$ et alors la convergence $G_{t,x}\, u \to u$ sera uniforme en $(x, u) \in \overline{\omega}_2 \times K$ et par suite, on aura :

$$\lim_{t \to +\infty} \{ \sup_{x \in \overline{\omega}_2} \|(G_{t,x} - 1)\, \hat{E}_x(\lambda) f\|_{L^2(R^n)} \} = 0$$

ce qui, joint à (4.27) , donne bien la proposition.

Or, pour $\varphi \in \mathcal{D}(R^n)$, pour t assez grand, on a $H_t\, \varphi \in \mathcal{D}(U_o)$ et $\Theta_x H_t\, \varphi \in \mathcal{D}(\omega_o)$; mais alors on a $\Phi_x \widetilde{\Theta}_x H_t\, \varphi = H_t\, \varphi \in \mathcal{D}(U_o)$ et $G_{t,x}\, \varphi = \varphi$. Comme de plus $\|G_{t,x}\|_{L^2(R^n) \to L^2(R^n)} \leq 1$, il en résulte que $G_{t,x}$ converge fortement vers l'identité uniformément en $x \in \overline{\omega}_2$.

4.3 Etude au voisinage du bord

Nous abordons maintenant la démonstration du théorème 1.3 : nous supposons donc en plus des hypothèses précédentes que $\bar{\Omega}$ est compact, que $\bar{\Omega} \subset \omega$ et que $(A, D(A))$ est l'extension de Friedrichs de $(G, \mathcal{D}(\Omega))$. On introduit l'espace $V = D(A^{\frac{1}{2}})$ qui est l'adhérence de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans l'espace :

$$\{ u \in L^2(\Omega) \mid \forall i = 1, \ldots, p : X_i u \in L^2(\Omega) \} .$$

Nous reprenons les notations du paragraphe 4.1 et nous fixons $x_0 \in \partial\Omega$ et $\bar{\omega}_2 \subset \omega_1$ un voisinage compact de x_0. On pose $\Omega'_{t,x} = \Omega_{t,x} \cap U_0$ et l'on définit $V_{t,x}$ comme étant l'adhérence de $\mathcal{D}(\Omega'_{t,x})$ dans

$$(4.28) \qquad \{ u \in L^2(\Omega'_{t,x}) \, / \, \forall i = 1,\ldots,p : X_{i,t,x} u \in L^2(\Omega'_{t,x}) \}$$

Nous notons d'abord le

> Lemme 4.7. Pour $u \in L^2(\Omega)$ $H_t^{-1} \Phi_x u$ est défini sur $\Omega'_{t,x}$; de plus si $u \in V$ et si $\zeta \in \mathcal{D}(U_0)$ alors $\zeta H_t^{-1} \Phi_x u \in V_{t,x}$.

Démonstration. si $u \in L^2(\Omega)$, $\Phi_x u$ est défini sur Ω_x, et $H_t^{-1} \Phi_x u$ est défini sur $h_t(\Omega_x) = \Omega_{t,x} \supset \Omega'_{t,x}$. De plus, on a, pour $\zeta \in \mathcal{D}(U_0)$:

$$\zeta H_t^{-1} \Phi_x u = H_t^{-1} \Phi_x(\zeta \circ h_t \circ \theta_x) u .$$

On en déduit que pour $u \in \mathcal{D}(\Omega)$, $(\zeta \circ h_t \circ \theta_x) u$ est à support compact dans $\theta_x^{-1}(h_t^{-1}(U_0)) \cap \Omega$ et par suite que $\zeta . H_t^{-1} \Phi_x u \in \mathcal{D}(\Omega'_{t,x})$.

On a d'autre part pour $v \in V$:

$$X_{i,t,x}\, H_t^{-1}\, \Phi_x\, v \;=\; t^{-1}\, H_t\, \Phi_x\, X_i\, v$$

d'où il résulte la continuité de l'application $u \to \zeta\, h_t^{-1}\, \Phi_x\, u$ de V dans l'espace (4.28) .

La conjonction des deux remarques donne le Lemme.

Pour $(t, x) \in [\, 1, \infty\, [\, \times \overline{\omega}_2$ nous définissons les opérateurs $E'_{t,x}$ positifs autoadjoints dans $L^2(\Omega'_{t,x})$ en posant :

$$(E'_{t,x}\, u) \;=\; (F_{t,x}(\lambda)\, \tilde{u})_{|\Omega'_{t,x}}$$

$\tilde{u}$ étant le prolongement de u par 0 sur $U_0 \setminus \Omega'_{t,x}$

Notre but est d'appliquer la proposition 2.8 : nous savons déjà que les hypothèses (2.9) et (2.10) sont satisfaites par les opérateurs $\mathfrak{a}_{t,x}$ $(t \in [\, 1, \infty\,],\ x \in \overline{\omega}_2)$ sur U_0 ; c et les X_i étant bornés sur un voisinage de $\overline{\Omega}$, l'hypothèse (2.13) est aussi satisfaite, quitte à restreindre ω_0 .

Soit $u \in L^2(\Omega'_{t,x})$; soit $v = (\tilde{\Theta}_x\, H_t\, \tilde{u})_{|\Omega}$.

Sur $\Omega'_{t,x}$, on a :

$$E'_{t,x}\; u \;=\; H_t^{-1}\, \Phi_x\, E(t^2\, \lambda)\, v$$

Comme pour le lemme 4.4 on a

$$(4.29) \qquad \mathfrak{a}^k_{t,x}\, E'_{t,x}\, u \;=\; H_t^{-1}\, \Phi_x\;\; t^{-2k}\, \mathfrak{a}^k\, E(t^2\, \lambda)\, v \quad \text{sur} \quad \Omega'_{t,x}$$

D'où l'on tire que $\mathfrak{a}^k_{t,x}\, E'_{t,x}\, u \in L^2(\Omega'_{t,x})$ et puisque $\|v\|_{L^2(\Omega)} \leq \|u\|_{L^2(\Omega'_{t,x})}$ on a :

$$\|\mathfrak{a}^k_{t,x}\, E'_{t,x}\, u\|_{L^2(\Omega'_{t,x})} \leq \lambda^k \|u\|_{L^2(\Omega'_{t,x})}$$

C'est-à-dire que les hypothèses (2.15) et (2.16) sont satisfaites. De plus, on déduit immédiatement de (4.29), du lemme 4.7 et de l'appartenance : $\mathfrak{a}^k\, E(t^2\lambda) \in D(A) \subset V$, que l'hypothèse (2.17) est aussi satisfaite.

Le noyau de $E'_{t,x}$ est la restriction à $\Omega'_{t,x} \times \Omega'_{t,x}$ du noyau de $F_{t,x}(\lambda)$ et est donc aussi la restriction à $\Omega'_{t,x} \times \Omega'_{t,x}$ du noyau de $E_{t,x}(\lambda)$.

Appliquant la proposition 2.8 et utilisant (4.11) on obtient le

<u>Lemme 4.8</u>. Pour tout $\lambda > 0$, la fonction

$$K(t, x) = \int_{\Omega \cap \theta_x^{-1}(h_t^{-1}(U_o))} e(t^2\lambda;\, y, y)\, dy$$

est bornée sur $[1, \infty[\times \overline{\omega}_2$.

Nous aurons besoin du lemme suivant :

<u>Lemme 4.9</u>. Posant $\Gamma_{t,y} = \{ x \in \overline{\omega}_2 \ / \ \theta(x, y) \in h_t^{-1}(U_o) \}$, il existe $t_1 \geq 1$, $c_o > 0$ et un voisinage $\overline{\omega}'_o \subset \omega_2$ de x_o tels que :

$$\forall t \geq t_1 \ , \ \forall y \in \overline{\omega}'_o \ : \ \int_{\Gamma_{t,y}} dx \ \geq \ c_o . t^{-\nu}$$

<u>Démonstration</u>.

Notons θ^y l'application $x \to \theta(x, y)$.

Pour tout x on a $\theta(x, x) = 0$; différentiant on obtient que :

$$d\theta_{x_0}(x_0) + d\theta^{x_0}(x_0) = 0$$

Puisque $d\theta_{x_0}(x_0)$ est bijective, l'application $(x, y) \longmapsto (\theta(x, y), y)$ est un difféomorphisme d'un voisinage $\omega_3 \times \omega_3$ de (x_0, x_0) sur un voisinage de $(0, x_0)$ qui contient un voisinage de la forme $U_1 \times \overline{\omega}'_0$. On a $\overline{\omega}'_0 \subset \omega_3$ et l'on peut supposer $\omega_3 \subset \omega_2$. Donc, pour $y \in \overline{\omega}'_0$ θ^y est un difféomorphisme de ω_3 sur $\theta^y(\omega_3) \supset U_1$.

Pour t assez grand, on a $h_t^{-1}(U_0) \subset U_1$ et $\Gamma_{t,y} \subset \omega_3$. Restreignant au besoin les voisinages, on a $\Gamma_{t,y} = (\theta^y)^{-1}(H_t^{-1}(U_0))$ et :

$$\int_{\Gamma_{t,y}} dx \geq c_0 \int_{h_t^{-1}(U_0)} d\xi = c_0\, t^{-\nu} \int_{U_0} d\xi$$

et le lemme suit.

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer :

<u>Proposition 4.10</u>. sous les hypothèses du théorème 1.3, pour tout $x_0 \in \partial\Omega$, il existe un voisinage ω_0 de x_0 , et une constante C tels que : quel que soit l'ouvert $\omega' \subset \omega_0$, on a :

$$(4.30) \quad \limsup_{t \to +\infty} \int_{\omega' \cap \Omega} t^{-\nu} e(t^2; x, x)dx \leq C \int_{\overline{\omega' \cap \Omega}} dx.$$

<u>Démonstration</u>. : avec les notations des lemmes 4.8 et 4.9, pour $\omega' \subset \overline{\omega}'_0$, on a

$$\omega'_t = \bigcup_{y \in \omega' \cap \Omega} \Gamma_{t,y} \subset \omega_2 \quad \text{et pour} \quad t \geq t_1 \quad :$$

$$\int_{\Omega \cap \omega'} c_o\, t^{-\nu}.e(t^2 ; y, y)\, dy \leq \int_{\omega'_t} K(t, x)\, dx$$

On obtient la proposition en remarquant que $\bigcap_t \omega' = \overline{\omega' \cap \Omega}$

Il nous reste à vérifier que la proposition 4.10 et le théorème 1.1 impliquent le théorème 1.3 : considérant un recouvrement fini de $\partial\Omega$, on obtient l'estimation 4.30 pour $\omega' \subset \omega_o$ ω_o étant un voisinage de $\partial\Omega$. Il en résulte que si $\partial\Omega$ est de mesure nulle, on peut trouver une suite de compacts $K_p \subset \Omega$ tels que :

$$\Big\{ \limsup_{t \to +\infty} \int_{\Omega \setminus K_p} t^{-\nu}\, e(t^2 ; x, x)\, dx \Big\} \xrightarrow[p \to +\infty]{} 0$$

Appliquant le théorème 1.1 sur chaque K_p on obtient :

$$\lim_{t \to +\infty} \int_{\Omega} t^{-\nu}\, e(t^2 ; x, x)\, dx = \int_{\Omega} \gamma(x)\, dx$$

c'est-à-dire l'estimation cherchée.

NOTES

(1) Variété est pris au sens de DE RHAM (variétés différentiables, HERMAN, 1955) : M est supposée séparable et donc σ- compacte.

(2) La notation $\omega_1 \subset\subset \omega$ signifie que $\overline{\omega_1}$ est un compact inclus dans ω .

[1] N. DUNFORD - J.T. SCHWARTZ Linear Operators : New York Interscience

[2] A. EL KOLLI n-ième épaisseur dans les espaces de Sobolev, C.R. Ac. Sc. t 272 (1971)

[3] G.B. FOLLAND Subelliptic estimates and function spaces on nilpotent Lie groups. ; Arkiv. för Mat, 13, (1975)

[4] G.B. FOLLAND - E. STEIN Parametrices and estimates for the $\bar{\partial}_b$ complex on strongly pseudo convex boundaries ; Bull. Amer. Math. Soc., 80, (1974)

[5] G.B. FOLLAND - E. STEIN Estimates for the $\bar{\partial}_b$ complex and analysis on the Heisenberg group ; Comm. Pure Appl. Math, 27, (1974).

[6] R. GOODMAN Lifting vector fields to nilpotent Lie groups, Publications I.H.E.S.

[7] L. HORMANDER Hypoelliptic second order differential equations ; Acta. Math, 119, (1967)

[8] T. KATO Perturbation theory for linear operators ; Springer Verlag (1966)

[9] J.J. KOHN Pseudo differential operators and non elliptic problems ; C.I.M.E. (1968)

[10] J.J. KOHN Pseudo differential operators and hypoellipticity ; Proc. Symp. Pure Math, 23, Amer. Math. Soc., (1973)

[11] KOLMOGOROV Uber die beste Annäherung ... ; Ann. of Math, 37, (1936)

[12] O.A. OLEINIK - E.V. RADKEVIC Second order equations with non negative characteristic form ; Amer. Math. Soc., Providence, (1973)

[13] E.V. RADKEVIC Hypoelliptic operators with multiple characteristics, Mat Sb, 121, (1969), Math. USSR Sb, 8, (1969)

[14] L. ROTHCHILD - E. STEIN Hypoelliptic differential operators and nilpotent groups ; Princeton (Preprint) (1975)

[15] L. SCHWARTZ Théorie des distributions à valeurs vectorielles ; Ann. Institut Fourier, 7, (1957)