PUBLICATIONS MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUES DE RENNES

M. R. HERMAN

Sur les mesures invariantes

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1975, fascicule S4
« International Conference on Dynamical Systems in Mathematical Physics », , p. 1-2

<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1975___S4_A12_0>

© Département de mathématiques et informatique, université de Rennes, 1975, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications mathématiques et informatiques de Rennes » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

SUR LES MESURES INVARIANTES

par M. R. HERMAN

. Construction d'un homéomorphisme PL du cercle

On se donne $\lambda > 1$.

- Soit f l'homéomorphisme PL de [0,1] défini par

$$\begin{cases} \tilde{f}(x) = \lambda x & 0 \le x \le a \\ \tilde{f}(x) = \frac{1}{\lambda}(x-1) + 1 & a \le x \le 1 \end{cases}$$

avec $\lambda a = \frac{1}{\lambda}(a-1) + 1$.

On définit $\tilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par

$$\tilde{f}(x+n) = \tilde{f}(x) + n \qquad \text{si } n \in \mathbb{Z} \text{ et } x \in [0,1] \ .$$

Soit pour $b \in \mathbb{R}$ fixé, l'homémorphisme PL

$$\tilde{f}_b(x) = \tilde{f}(x) + b \qquad x \in \mathbb{R} \ .$$

Soit $T^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Par passage au quotient de $\tilde{f}_b$ on a l'homéomorphisme PL de T^1 f_b.

Remarquons que f_b et f_b^{-1} laissent invariants les ensembles de mesure de Haar nulle sur T^1.

. Nombre de rotation de f_b

On montre que $\lim_{n \to +\infty} \frac{\tilde{f}_b^{on}(0)}{n} = \rho(\tilde{f}_b)$ existe et dépend continuement de b, de plus on a $\rho(\tilde{f}_{b+1}) = \rho(\tilde{f}_b) + 1$.

On pose $\rho(f_b) = \rho(\tilde{f}_b) \mod(1)$.

- Soit b tel que $\rho(f_b) = \alpha \in T^1 - \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, alors on a le :

Théorème : 1) f_b est topologiquement conjugué sur T^1 à la translation $R_\alpha : x \to x+\alpha$.

2) f_b n'a pas de mesure σ finie (non nulle) invariante et absolument continue par rapport à la mesure de Haar.

On trouvera la démonstration dans M.R. Herman "Sur la conjugaison différentiable des difféomorphismes du cercle à des rotations".
La partie 1) est le théorème de A. Denjoy.
Le premier exemple de 2) (non continue) a été donné par D. Ornstein, puis un exemple a été donné par A. Brunel.

Remarque : Si μ est l'unique mesure de probabilité invariante par f_b alors μ est étrangère à la mesure de Haar ; de plus, si on écrit $f_b = h^{-1} \circ R_\alpha \circ h$, on a $Dh \underset{p.p.}{=} Dh^{-1} \underset{p.p.}{=} 0$.

Problème : Est-ce que f_b est ergodique par rapport à la mesure de Haar m au sens suivant : si A est m-mesurable et si $f_b(A) = A$ p.p., alors $m(A) = 0$ ou 1 ?

Centre de Mathématiques
de l'Ecole Polytechnique
Plateau de Palaiseau
91120 PALAISEAU