PUBLICATIONS MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUES DE RENNES

J. RAPPAZ

Approximation du spectre d'un opérateur non compact

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1975, fascicule S3
« Journées « éléments finis » », , p. 1-16

<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1975___S3_A9_0>

© Département de mathématiques et informatique, université de Rennes, 1975, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications mathématiques et informatiques de Rennes » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

APPROXIMATION DU SPECTRE D'UN OPÉRATEUR NON COMPACT

J. RAPPAZ

1. INTRODUCTION

La méthode des éléments finis a été proposée par Ohto et al. [1] comme moyen pour calculer la stabilité magnétohydrodynamique d'un plasma et plusieurs auteurs [2], [3], [4] ont appliqué cette méthode à des plasmas infiniment longs, axisymétriques.

Dans le cas unidimensionnel, le problème est réduit à la recherche du spectre d'un opérateur A linéaire continu, auto-adjoint mais non compact. Le spectre de l'opérateur A peut être en partie continu, peut contenir des valeurs propres s'accumulant en un point ou une valeur propre infiniment dégénérée [4] , [7] [8] .

En utilisant la méthode standard de Galerkin pour approximer ce problème, on construit une suite $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ d'opérateurs compacts qui va converger fortement vers l'opérateur A . De façon générale le spectre de A_n ne va pas approximer convenablement le spectre de A [4], [7].

Le but de ce papier est de donner des conditions suffisantes sur les espaces de discrétisation afin que le spectre de A_n approxime, pour n suffisamment grand, le spectre de A dans un sens défini plus tard.

2. FORMULATION DU PROBLEME ET PREMIERES CONSIDERATIONS

Soit $U = H_0^1(0,1) \times (L_2(0,1))^N$ et $a : U \times U \to \mathbb{R}$ la forme bilinéaire définie sur U par :

$$a(\underline{u},\underline{v}) = \int_0^1 \{\alpha u_1' v_1' + u_1' \underline{\beta}^t \underline{v} + v_1' \underline{\beta}^t \underline{u} + \underline{u}^t \gamma \underline{v}\} \, dx \qquad (2.1)$$

où $\alpha \in C^\infty[0,1]$ et tel que $\alpha(x) > 0 \quad \forall x \in [0,1]$,

$\underline{\beta} \in C^\infty[0,1]$: $(N+1)$-vecteur,

$\gamma \in C^\infty[0,1]$: $(N+1) \times (N+1)$ - matrice symétrique

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \underline{u}_2 \end{pmatrix} , \quad \underline{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \underline{v}_2 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad u_1, v_1 \in H_0^1(0,1), \quad \underline{u}_2, \underline{v}_2 \in (L_2(0,1))^N$$

(^{t} : transposition et $\underline{u}^t\underline{v}$: produit scalaire dans $\mathbb{R}^{N+1}$)

Soit le produit scalaire dans $(L_2(0,1))^{N+1}$ défini par $(\underline{u},\underline{v}) = \int_0^1 \underline{u}^t \underline{v} \, dx$. (2.2)
On pose le problème :

PROBLEME 1

Trouver $\underline{u} \in U$, $\underline{u} \neq 0$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $a(\underline{u},\underline{v}) = \lambda(\underline{u},\underline{v}) \quad \forall \underline{v} \in U$.

La norme dans U étant définie par $\|\underline{u}\|_U = (\int_0^1 (u_1'^2 + \underline{u}^t\underline{u})dx)^{\frac{1}{2}}$, la forme bilinéaire a définie par (2.1) est continue symétrique sur U . De plus on peut la supposer coercive, c'est-à-dire $a(\underline{u},\underline{u}) \geq \varkappa \|\underline{u}\|_U^2 \quad \forall \underline{u} \in U$ ($\varkappa > 0$), car il suffit de faire un shift de λ_0 suffisamment grand dans le problème 1 pour la rendre coercive puisqu'on a supposé $\alpha > 0$.

Si $\underline{f} \in (L_2(0,1))^{N+1}$ alors $(\underline{f},\cdot)$ est une forme linéaire continue sur U et le problème "Trouver $\underline{u} \in U$ tel que $a(\underline{u},\underline{v}) = (\underline{f},\underline{v}) \quad \forall \underline{v} \in U$ " a une solution unique (Lax-Milgram).

Soit donc A l'opérateur qui a $\underline{f}$ fait correspondre la solution $\underline{u}$ de ce problème.

$$A : (L_2(0,1))^{N+1} \to U \subset (L_2(0,1))^{N+1}$$

$$\underline{f} \to \underline{u} = A\underline{f} \text{ tel que } a(\underline{u},\underline{v}) = (\underline{f},\underline{v}) \quad \forall\, \underline{v} \in U .$$

A est un opérateur linéaire, continu, auto-adjoint, positif de $(L_2(0,1))^{N+1}$ dans $(L_2(0,1))^{N+1}$.

On pose le problème aux valeurs propres :

PROBLEME 2

Trouver $\underline{u} \in (L_2(0,1))^{N+1}$, $\underline{u} \neq 0$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $A\underline{u} = \lambda\underline{u}$.

LEMME 2.1

Si $\underline{u}$ et λ sont solutions du problème 1 alors $\underline{u}$ et $\mu = 1/\lambda$ sont solutions du problème 2 et réciproquement.

Nous nous intéressons au problème 2 et plus généralement nous nous intéressons au spectre $\sigma(A)$ de A qui est réel puisque A est auto-adjoint et qui peut contenir une valeur propre infiniment dégénérée (exemple 1 §5), des valeurs propres s'accumulant en un point autre que zéro (exemple 2 §5), un spectre continu (exemple 3 §5).

3. DISCRETISATION DES PROBLEMES 1 ET 2

Soit $U_h \subset U$ un sous-espace de dimension finie. Une approximation du problème 1 sera :

PROBLEME 3

Trouver $\underline{u} \in U_h$, $\underline{u} \neq 0$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $a(\underline{u},\underline{v}) = \lambda(\underline{u},\underline{v})$ $\forall\ \underline{v} \in U_h$.

En pratiquant de façon identique à ce qui a été fait dans le précédent paragraphe on définit l'opérateur A_h par :

$$A_h : (L_2(0,1))^{N+1} \to U_h \subset (L_2(0,1))^{N+1}$$

$$\underline{f} \to \underline{u} = A\underline{f} \text{ tel que } a(\underline{u},\underline{v}) = (\underline{f},\underline{v}) \quad \forall\ \underline{v} \in U_h .$$

Ainsi on a une approximation du problème 2 :

PROBLEME 4

Trouver $\underline{u} \in (L_2(0,1))^{N+1}$, $\underline{u} \neq 0$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $A_h\underline{u} = \lambda\underline{u}$.

LEMME 3.1

Si $\underline{u}$ et λ sont solutions du problème 3 alors $\underline{u}$ et $\mu = 1/\lambda$ sont solutions du problème 4 et réciproquement. (pour $\mu \neq 0$).

Le spectre $\sigma(A_h)$ de A_h peut être calculé en résolvant le problème 3 , c'est-à-dire en résolvant un problème du type $R\vec{x} = \lambda M\vec{x}$ où R et M sont des matrices symétriques, définies positives.

Etant donné une suite $(U_h)_{0<h\leq h_0}$ de sous-espaces de dimension finie de U nous désirons requérir les conditions suivantes sur les spectres $\sigma(A_h)$ de A_h :

1- $\forall\ \mu \in \sigma(A)$ $\exists\ \mu_h \in \sigma(A_h)$, $0 < h \leq h_0$ tel que $\mu_h \xrightarrow{h\to 0} \mu$. (3.

2- $\forall \varepsilon > 0 \; \exists h_1 > 0$ tel que $\sigma(A_h) \subset \sigma(A) + \varepsilon \quad 0 < h \leqslant h_1$ où

$$\sigma(A) + \varepsilon = \bigcup_{\mu \in \sigma(A)}]\mu-\varepsilon, \mu+\varepsilon[\quad .$$

3- Soit $\mu \in \sigma(A)$ valeur propre isolée de multiplicité finie p et $\varepsilon > 0$ (3.1)
tel que $]\mu-\varepsilon,\mu+\varepsilon[\cap (\sigma(A) + \varepsilon) = \{\mu\}$ $\exists \; h_2 > 0$ tel que $\sigma(A_h) \cap]\mu-\varepsilon,\mu+\varepsilon[=$
$= \{ p$ valeurs propres de A_h multiplicité comprise $\}$, $0 < h \leqslant h_2$.

La première condition de (3.1) sera satisfaite si $\bigcup_{0<h\leqslant h_0} U_h$ est dense dans U . Les conditions 2 et 3 de (3.1) ne seront en général pas satisfaites (voir exemples 1,2,3 §5) mais nous pouvons énoncer des conditions (suffisantes) sur les espaces U_h pour qu'elles le soient.

4. QUELQUES RESULTATS

Les résultats partiels donnés ci-après font l'objet d'une thèse à paraître [8] et ne seront pas démontrés ici. Cependant quelques idées de démonstration seront mentionnées.

PROPOSITION 4.1

Soit $(U_h)_{0<h\leq h_0}$ une suite de sous-espaces de dimension finie de U telle que $\bigcup_{0<h\leq h_0} U_h$ dense dans U. Soient A, A_h, $\sigma(A)$, $\sigma(A_h)$ définis précédemment. Alors $\forall\, \mu \in \sigma(A)\ \exists\, \mu_h \in \sigma(A_h)$, $0 < h \leq h_0$, tel que $\mu_h \xrightarrow{h\to 0} \mu$.

Pour démontrer cette proposition on commence par montrer que $A_h \to A$ fortement, c'est-à-dire que $\|(A-A_h)\underline{f}\| \xrightarrow{h\to 0} 0 \quad \forall\, \underline{f} \in (L_2(0,1))^{N+1}$ où $\|\cdot\| = (\cdot,\cdot)^{\frac{1}{2}}$. On obtient ensuite la conclusion dans [10].

Remarquons ainsi que si $\bigcup_{0<h\leq h_0}^{\infty} U_h$ est dense dans U la condition 1 de (3.1) est satisfaite.

Décomposons maintenant le vecteur $\underline{\beta}$ et la matrice γ par bloc :

$$\underline{\beta} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \underline{\beta}_2 \end{pmatrix} \qquad \gamma = \begin{pmatrix} \gamma_1 & \underline{\gamma}_3^t \\ \underline{\gamma}_3 & \gamma_2 \end{pmatrix}$$

avec β_1, γ_1 : scalaires ; $\underline{\beta}_2, \underline{\gamma}_3$: N-vecteurs ; γ_2 : $N \times N$ matrice symétrique.

La forme bilinéaire $a(\cdot,\cdot)$ donnée dans (2.1) et le produit scalaire donné dans (2.2) peuvent s'écrire si $\underline{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \underline{u}_2 \end{pmatrix}$, $\underline{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \underline{v}_2 \end{pmatrix}$:

$$\left.\begin{aligned} a(\underline{u},\underline{v}) = \int_0^1 \{ & \alpha u_1' v_1' + \beta_1(u_1' v_1 + u_1 v_1') + \gamma_1 u_1 v_1 + \\ & + (u_1' \underline{\beta}_2^t + u_1 \underline{\gamma}_3^t)\underline{v}_2 + (v_1' \underline{\beta}_2^t + v_1 \underline{\gamma}_3^t)\underline{u}_2 + \underline{u}_2^t \gamma_2 \underline{v}_2 \} \, dx \\ \text{et} \quad (u,v) = \int_0^1 & \{u_1 v_1 + \underline{u}_2^t \underline{v}_2\} dx \end{aligned}\right\} \quad (4.1)$$

On voit apparaître le terme de couplage entre la composante 1 dans $H_0^1(0,1)$ et la composante 2 dans $(L_2(0,1))^N$. Ce couplage va apparaître dans la condition sur U_h .

DEFINITION

On dira que $(U_h)_{0<h\leq h_0}^{\infty}$ satisfait l'hypothèse H si $U_h = S_h \times V_h$, où S_h est un sous-espace de dimension finie de $H_0^1(0,1)$ et V_h un sous-espace de dimension finie de $(L_2(0,1))^N$, et si :

a) $\exists C$ indépendant de h telle que $\forall v \in H^t(0,1) \cap H_0^1(0,1)$, $t = 1,2$, on a $\inf_{\chi \in S_h} (\|v-\chi\|_0 + h\|v-\chi\|_1) \leq C h^t \|v\|_t$

b) $\bigcup_{0<h\leq h_0} V_h$ est dense dans $(L_2(0,1))^N$

c) $w'\underline{\beta}_2 + w\,\gamma_3 \in V_h \quad \forall w \in S_h$, $0 < h \leq h_0$.

Les hypothèses (a) et (b) sont des hypothèses d'approximation courantes ! L'hypothèse (c) est l'hypothèse de compatibilité entre les composantes de U_h pour obtenir le résultat suivant :

PROPOSITION 4.2

Supposons γ_2 matrice constante et diagonale. Soit $(U_h)_{0<h\leq h_0}$ satisfaisant l'hypothèse H et soit A, A_h, $\sigma(A)$, $\sigma(A_h)$ définis dans les paragraphes 2 et 3. Alors $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists h_1 > 0$ tel que $\sigma(A_h) \subset \sigma(A) + \varepsilon$, $0 < h \leq h_1$.

La condition (2) de (3.1) est ainsi satisfaite dans ce cas.

Remarque

γ_2 supposée diagonale n'est pas une grande restriction car étant symétrique, on peut la diagonaliser avant de résoudre le problème. Par contre l'hypothèse γ_2 constante peut être levée moyennant une hypothèse supplémentaire sur $(U_h)_{0<h\leq h_0}$. Ce cas faisant l'objet d'une analyse plus fine ne sera pas traité ici [8].

Idée de démonstration de la proposition 4.2 :

L'idée est de transformer le problème 1 en un problème dans $H_0^1(0,1)$ après avoir fait une élimination de $\underline{u}_2$ et $\underline{v}_2$ dans le problème 1.

Soit $V(\gamma_2) = \{$ valeurs propres de $\gamma_2 \}$

$\Lambda(\gamma_2) = \{ \mu : 1/\mu \in V(\gamma_2) \}$

Supposons $\underline{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \underline{u}_2 \end{pmatrix} \in U$, $\underline{u} \neq 0$ et $\lambda \in \mathbb{R} - V(\gamma_2)$ solution du problème 1.

Alors $$a(\underline{u},\underline{v}) = \lambda(\underline{u},\underline{v}) \quad \forall\, \underline{v} \in U \tag{1}$$

Soit $w \in H_0^1(0,1)$ et posons $\underline{v} = \begin{pmatrix} w \\ 0 \end{pmatrix}$ dans (1). On obtient :

$$\int_0^1 \{\alpha u_1' w' + \beta_1 (u_1' w + u_1 w') + \gamma_1 u_1 w + (w' \underline{\beta}_2^t + w \underline{\gamma}_3^t)\underline{u}_2 \}\, dx = \lambda \int_0^1 u_1 w\, dx \tag{2}$$

Posons maintenant $\underline{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ (\lambda - \gamma_2)^{-1}(w' \underline{\beta}_2 + w \underline{\gamma}_3) \end{pmatrix}$ dans (1). On obtient :

$$\int_0^1 \{(u_1' \underline{\beta}_2^t + u_1 \underline{\gamma}_3^t)(\lambda-\gamma_2)^{-1}(w' \underline{\beta}_2 + w \underline{\gamma}_3) + \underline{u}_2^t \gamma_2 (\lambda-\gamma_2)^{-1}(w' \underline{\beta}_2 + w \underline{\gamma}_3)\}\, dx =$$

$$= \lambda \int_0^1 \underline{u}_2^t (\lambda-\gamma_2)^{-1}(w' \underline{\beta}_2 + w \underline{\gamma}_3)\, dx \tag{3}$$

De (3) on tire

$$\int_0^1 \underline{u}_2^t (w' \underline{\beta}_2 + w \underline{\gamma}_3)\, dx = \int_0^1 \{(u_1' \underline{\beta}_2^t + u_1 \underline{\gamma}_3^t)(\lambda-\gamma_2)^{-1}(w' \underline{\beta}_2 + w \underline{\gamma}_3)\}\, dx$$

et en remplaçant dans 2 on aura : $b_\lambda(u_1,w) = \lambda(u_1,w)$.

$$\left.\begin{aligned} \text{où } b_\lambda(u,v) = \int_0^1 \{&(\alpha + \underline{\beta}_2^t(\lambda-\gamma_2)^{-1} \underline{\beta}_2) u'v' + (\beta_1 + \underline{\beta}_2^t(\lambda-\gamma_2)^{-1} \underline{\gamma}_3)(u'v + uv') \\ &+ (\gamma_1 + \underline{\gamma}_3^t(\lambda-\gamma_2)^{-1} \underline{\gamma}_3) uv \}\, dx \\ \text{et } (u,v)_0 = \int_0^1 u v\, dx &. \end{aligned}\right\} \tag{4.2}$$

On peut donc poser le problème suivant :

PROBLEME 5

Trouver $u \in H_0^1(0,1)$, $u \neq 0$ et $\lambda \in \mathbb{R} - V(\gamma_2)$ tel que $b_\lambda(u,v) = \lambda(u,v)_0$ $\forall\, v \in H_0^1(0,1)$.

On obtient facilement le lemme qui suit :

LEMME 4.1

Si $\underline{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \underline{u}_2 \end{pmatrix}$ et $\lambda \notin V(\gamma_2)$ sont solutions du problème 1 alors u_1 et λ sont solutions du problème 5 et de plus on a $\underline{u}_2 = (\lambda-\gamma_2)^{-1}(u_1' \underline{\beta}_2 + u_1 \underline{\gamma}_3)$.
Réciproquement si w et λ sont solutions du problème 5 alors

$\underline{u} = \begin{pmatrix} w \\ (\lambda-\gamma_2)^{-1}(w' \underline{\beta}_2 + w \underline{\gamma}_3) \end{pmatrix}$ et λ sont solutions du problème 1 .

Le problème 5 admet le problème approximé suivant :

PROBLEME 6

Trouver $u \in S_h$, $u \neq 0$ et $\lambda \in \mathbb{R} - V(\gamma_2)$ tel que $b_\lambda(u,v) = \lambda(u,v)_0$ $\forall\, v \in S_h$.

Si U_h satisfait l'hypothèse H alors $w'\underline{\beta}_2 + w\underline{\gamma}_3 \in V_h$ $\forall\, w \in S_h$, et donc si $\lambda \notin V(\gamma_2)$ on aura $(\lambda-\gamma_2)^{-1}(w'\underline{\beta}_2 + w\underline{\gamma}_3) \in V_h$ $\forall\, w \in S_h$. Ainsi si $\underline{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \underline{u}_2 \end{pmatrix} \in U_h$, $\underline{u} \neq 0$ et $\lambda \in \mathbb{R} - V(\gamma_2)$ sont solutions du problème 2 on peut faire la même élimination que précédemment sur le problème discrétisé et on obtient $b_\lambda(u_1,w) = \lambda(u_1,w)_0$ $\forall\, w \in S_h$. Ainsi on a sous les hypothèses de la proposition 2 un lemme analogue au lemme 4.1 pour les problèmes discrétisés :

LEMME 4.2

Si $\underline{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \underline{u}_2 \end{pmatrix}$ et $\lambda \notin V(\gamma_2)$ sont solutions du problème 2 alors u_1 et λ sont solutions du problème 6 et de plus on a $\underline{u}_2 = (\lambda-\gamma_2)^{-1}(u_1'\underline{\beta}_2 + u_1\underline{\gamma}_3)$.

Réciproquement si w et λ sont solutions du problème 6 alors

$\underline{u} = \begin{pmatrix} w \\ (\lambda-\gamma_2)^{-1}(w'\underline{\beta}_2 + w\gamma_3) \end{pmatrix}$ et λ sont solutions du problème 2.

Soit maintenant $\check{\sigma}_c = \{\lambda \notin V(\gamma_2) : \exists x \in [0,1]$ tel que $(\alpha+\underline{\beta}_2^t(\lambda-\gamma_2)^{-1}\underline{\beta}_2)(x) = 0\}$

$\hat{\sigma}_c = \{\mu : 1/\mu \in \sigma_c\}$

On montre :

LEMME 4.3 $\quad \hat{\sigma}_c \cup \Lambda(\gamma_2) \subset \sigma(A)$.

Sous les hypothèses de la proposition 2 on obtient le lemme fondamental :

LEMME 4.4

Soit $\mu_h \in \sigma(A_h)$, $0 < h \leq h_0$ tel que $\mu_h \xrightarrow{h\to 0} \mu \notin \Lambda(\gamma_2) \cup \hat{\sigma}_c$. Alors μ est valeur propre de A et par conséquent $\mu \in \sigma(A)$.

La démonstration de ce lemme tient compte des lemmes 2.1, 3.1, 4.1 et 4.2 et en traitant un problème elliptique dans $H_0^1(0,1)$.

On obtient la conclusion de la proposition 2 à partir des lemmes 4.3 et 4.4.

Concernant la multiplicité des valeurs propres de A_h on a la proposition suivante :

PROPOSITION 4.3

Supposons γ_2 matrice constante et diagonale et soit $(U_h)_{0<h\leq h_0}$ satisfaisant H .

Si $\mu \in \sigma(A) - \hat{\sigma}_c - \Lambda(\gamma_2) - \{0\}$ alors μ est valeur propre de A isolée dans $\sigma(A)$ et de multiplicité 1 et la condition (3) de (3.1) est satisfaite.

Remarque

On n'obtient pas la condition (3) de (3.1) dans sa totalité. En effet si $\mu \in \hat{\sigma}_c$, μ n'est pas valeur propre isolée de multiplicité finie. Par contre on peut donner des exemples où $\mu \in \Lambda(\gamma_2)$ est valeur propre isolée de multiplicité finie et où (3) de (3.1) n'est pas satisfaite [8].

5. EXEMPLES

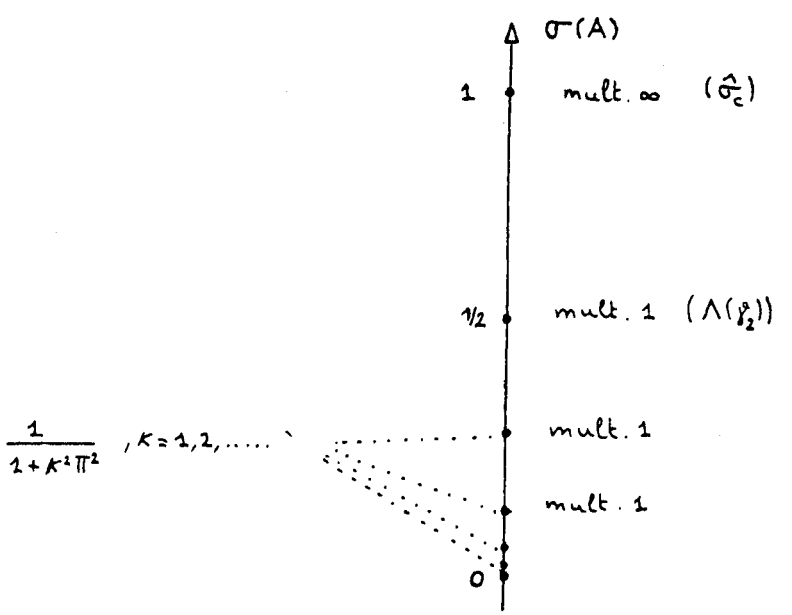
Les exemples suivants seront des exemples simples illustrant les paragraphes 2, 3 et 4. Des exemples plus complexes sont donnés dans [7].

On prendra 3 exemples avec N=1 c'est-à-dire $U = H_0^1(0,1) \times L_2(0,1)$ et $\underline{u} \in U$ noté $\underline{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$.

Exemple 1

$$a(\underline{u},\underline{v}) = \int_0^1 \{u_1'v_1' + u_1'v_2 + u_2v_1' + u_1v_1 + 2u_2v_2\}\, dx \quad .$$

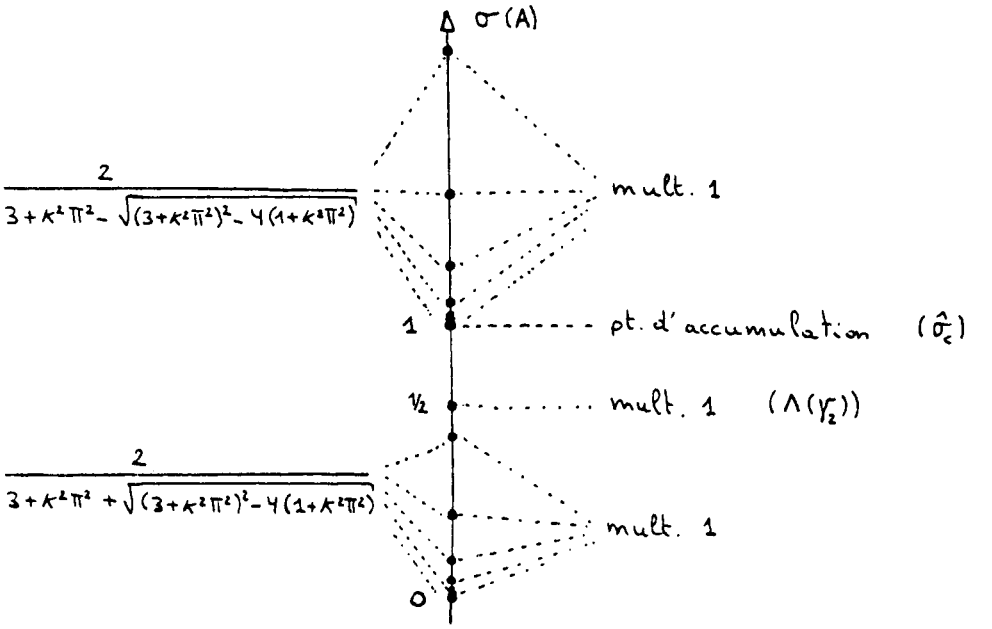
On peut voir que $\underline{u} = \begin{pmatrix} w \\ -w' \end{pmatrix}$ et $\lambda = 1$ sont solutions du problème 1 $\forall\, w \in H_0^1(0,1)$. Ainsi $\mu = 1$ est valeur propre de A infiniment dégénérée.



Exemple 2

$$a(\underline{u},\underline{v}) = \int_0^1 \{u_1'v_1' + u_1'v_2 + u_2v_1' + u_1v_1 + 2u_2v_2 + u_1v_2 + u_2v_1\}\, dx$$

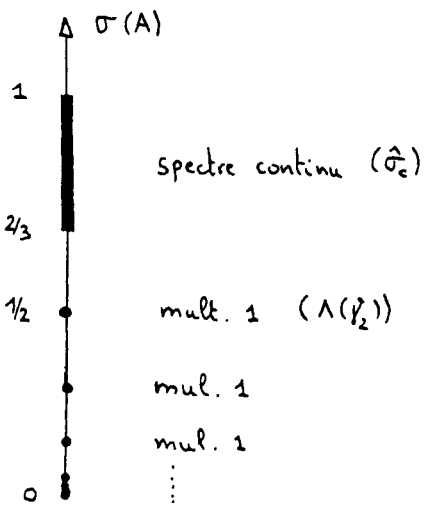
Ici la valeur propre infiniment dégénérée de l'exemple 1 "éclate" en une suite de valeurs propres s'accumulant en 1 .



Exemple 3

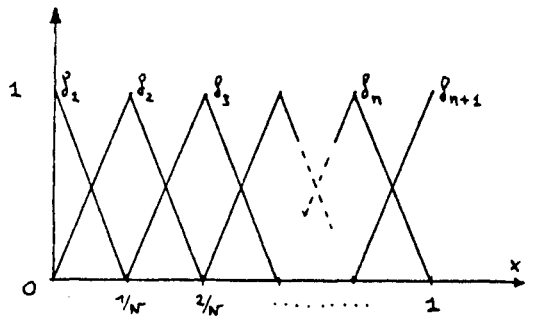
$$a(\underline{u},\underline{v}) = \int_0^1 \{(1+x)\, u_1'v_1' + u_1'v_2 + u_2v_1' + u_1v_1 + 2u_2v_2\}\, dx$$

Ici la valeur propre infiniment dégénérée de l'exemple 1 "éclate" en un spectre continu.



Pour illustrer le paragraphe 4 on discrétisera les exemples 1, 2 et 3 de deux manières différentes.

a) On prendra U_n définit par la base $e_1, e_2, \ldots, e_{2n}$ de fonctions "chapeaux" ci-dessous :

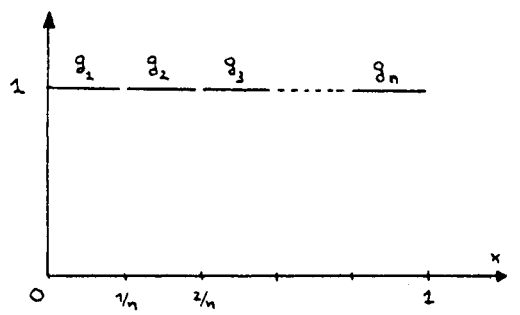


U_n engendré par :

$$e_1 = \begin{pmatrix} f_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} f_3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \ldots \; e_{n-1} = \begin{pmatrix} f_n \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ f_1 \end{pmatrix}, \quad \ldots \quad e_{2n} = \begin{pmatrix} 0 \\ f_{n+1} \end{pmatrix}$$

b) On prendra $\tilde{U}_n$ vérifiant l'hypothèse H . Dans les exemples 1 et 3 on définit $\tilde{U}_n$ par sa base $\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \ldots, \tilde{e}_{2n-1}$ dont la première composante est de type "fonction chapeau" et la deuxième composante "constante par morceau" comme ci-dessous :

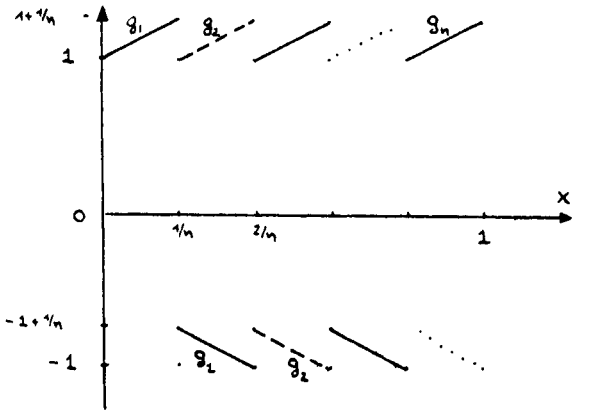


$\tilde{U}_n$ engendré par :

$$\tilde{e}_1 = \begin{pmatrix} f_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \; \tilde{e}_2 = \begin{pmatrix} f_3 \\ 0 \end{pmatrix}, \; \ldots \; \tilde{e}_{n-1} = \begin{pmatrix} f_n \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ g_1 \end{pmatrix}, \; \tilde{e}_{n+1} = \begin{pmatrix} 0 \\ g_2 \end{pmatrix} \; \ldots \; \tilde{e}_{2n-1} = \begin{pmatrix} 0 \\ g_n \end{pmatrix}$$

Dans l'exemple 2 on prendra comme première composante $f_1, f_2, \ldots, f_n$ et pour deuxième composante les fonctions données ci-dessous :



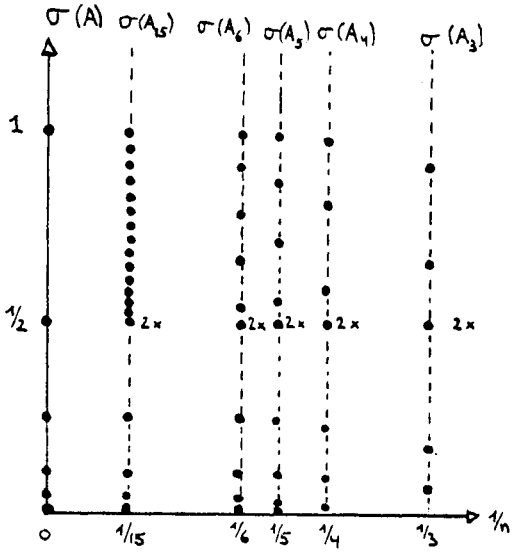
$\tilde{U}_n$ engendré par :

$$\tilde{e}_1 = \begin{pmatrix} f_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \; \tilde{e}_2 = \begin{pmatrix} f_3 \\ 0 \end{pmatrix}, \; \ldots \; \tilde{e}_{n-1} = \begin{pmatrix} f_n \\ 0 \end{pmatrix}$$

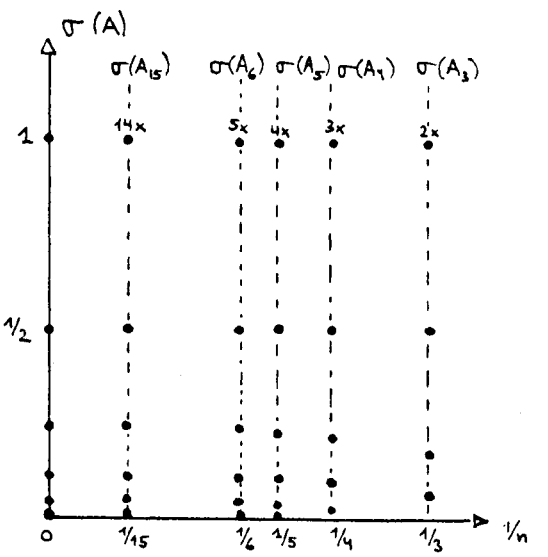
$$\tilde{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ g_1 \end{pmatrix}, \; \tilde{e}_{n+1} = \begin{pmatrix} 0 \\ g_2 \end{pmatrix} \; \ldots \; \tilde{e}_{2n-1} = \begin{pmatrix} 0 \\ g_n \end{pmatrix}$$

La discrétisation (a) ne satisfait pas H et la condition (2) de (3.1) n'est pas satisfaite. La discrétisation (b) satisfait H et donc la condition (2) de (3.1) est satisfaite. Schématiquement on obtient les diagrammes suivants :

EXEMPLE 1 :

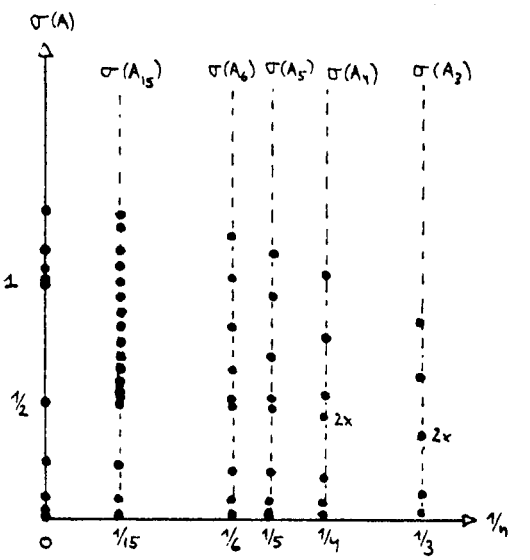


discrétisation (a)

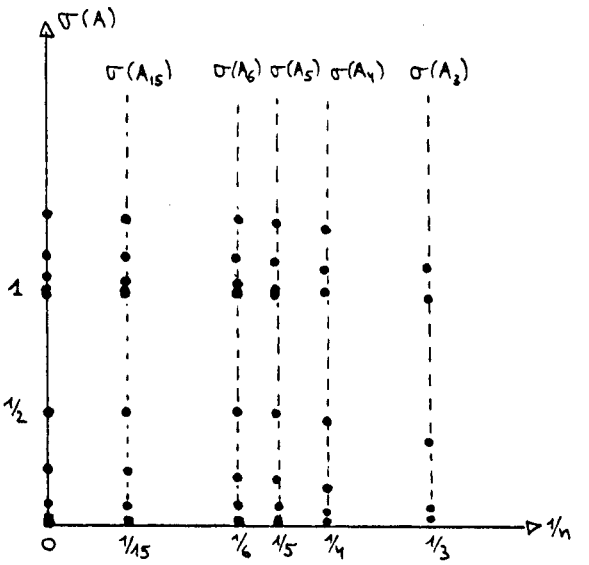


discrétisation (b)

EXEMPLE 2 :

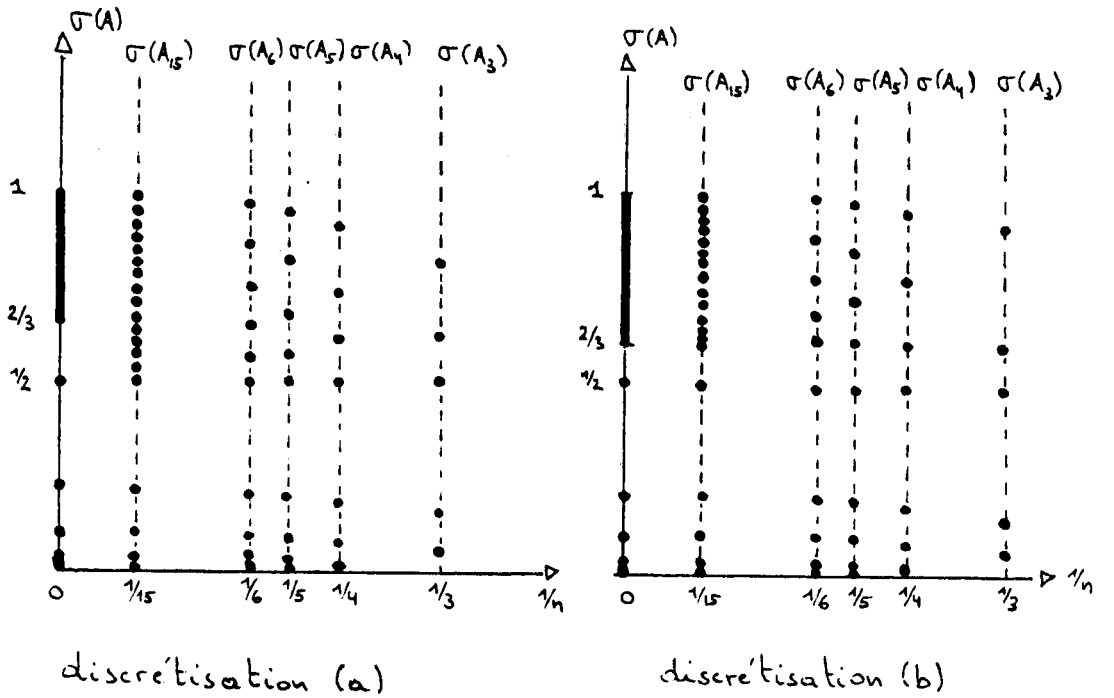


discrétisation (a)



discrétisation (b)

EXEMPLE 3 :



Des exemples plus significatifs sont donnés dans [3] et [4] où on peut voir que toutes les valeurs propres de A_n devant correspondre à la valeur propre infiniment dégénérée de A viennent se répartir dans tout le spectre de A si la discrétisation n'est pas convenable.

REFERENCES

[1] M. Ohto, Y. Shimomura, T. Takeda, Nucl. Fus. 12, 271 (1972)

[2] T. Takeda, Y. Shimomura, M. Ohto, M. Yoshikawa, Phys. Fluids 15, 2193 (1972)

[3] T.J.M. Boyd, G.A. Gardner, L.R.T. Gardner, Nucl. Fus. 13, 764 (1973)

[4] K. Appert, D. Berger, R. Gruber, J. Rappaz, F. Troyon, Zamp 25 229 (1974)

[5] H. Grad, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 70, 3277 (1973)

[6] J.H. Bramble, J.E. Osborn, Academic Press (1972) 387-408

[7] K. Appert, D. Berger, R. Gruber, J. Rappaz, J. Comp. Phys. (accepté pour publication)

[8] J. Rappaz, Thèse, Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne, à paraître

[9] F. Chatelin - Laborde : Thèse, Université de Grenoble, 1971

[10] Dunford, Schwartz : Linear operators, interscience publishers 1963