PUBLICATIONS MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUES DE RENNES

J. C. NEDELEC

Méthodes d'éléments finis courbes pour la résolution des équations intégrales singulières sur des surfaces de R^3

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1975, fascicule S3
« Journées « éléments finis » », , p. 1-31

<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1975___S3_A5_0>

© Département de mathématiques et informatique, université de Rennes, 1975, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications mathématiques et informatiques de Rennes » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

METHODES D'ELEMENTS FINIS COURBES POUR LA RESOLUTION DES EQUATIONS INTEGRALES SINGULIERES SUR DES SURFACES DE R^3 .

par J.C. NEDELEC.*

RESUME : Dans NEDELEC-PLANCHARD [N.P] , nous avons montré que l'équation intégrale singulière sur une surface fermée Γ de $\mathbb{R}^3$:

(0) $$\frac{1}{4\pi} \int_\Gamma \frac{q(x)}{|x-y|} dx = u(y) \quad ; \quad y \in \Gamma \ .$$

admet une solution unique et est variationnelle coercive dans l'espace de Hilbert $H^{-1/2}(\Gamma)$. Nous introduisons, dans cet article, à l'aide d'éléments finis courbes, une surface approchée Γ_h et un problème approché sur Γ_h, dont la solution est q_h . Nous étudions, alors, l'erreur d'approximation, dans des espaces de Hilbert, entre q solution de (0) et q_h , et aussi entre les deux potentiels u et u_h correspondants.

nota : La lettre C désigne toujours une constante indépendante de h .

---

* Ecole Polytechnique - Centre de Mathématiques Appliquées
Route de Saclay - 91120 PALAISEAU

I - RAPPELS SUR LE PROBLEME DE POTENTIEL ET SUR L'ETUDE D'ERREUR DES PROBLEMES VARIATIONNELS.

Dans un premier article [N.P] , nous avons étudié le problème du potentiel électrique dans l'espace R^3 en présence d'un conducteur Ω dont la frontière est Γ. (Ω^c désignera l'extérieur du conducteur). Les équations sont

$$(1.1) \qquad \begin{cases} \Delta u = 0 \quad ; \text{ dans } \Omega \\ \Delta u = 0 \quad ; \text{ dans } \Omega^c \\ u|_\Gamma = u_0 \end{cases}$$

Il est classique, pour résoudre ce problème, d'utiliser un "potentiel de simple couche". On cherche, alors, la charge électrique superficielle du conducteur, soit q , solution de :

$$(1.2) \qquad \frac{1}{4\pi} \int_\Gamma \frac{q(y)}{|x-y|}\, dy = u(x) \quad ; \quad \forall\, x \in \Gamma \ ,$$

et alors, le potentiel u , solution de (1.1), est donné par l'expression

$$(1.3) \qquad u(x) = \frac{1}{4\pi} \int_\Gamma \frac{q(y)}{|x-y|}\, dy \quad ; \quad \forall\, x \in R^3.$$

Dans [N.P] , nous avons montré que (1.2) est un isomorphisme de l'espace de Hilbert $H^{1/2}(\Gamma)$ sur l'espace de Hilbert $H^{-1/2}(\Gamma)$, et que de plus, la forme bilinéaire associée :

$$(1.4) \qquad a(q, q') = \frac{1}{4\pi} \int_\Gamma \int_\Gamma \frac{q(x)\, q'(y)}{|x-y|}\, dx\, dy$$

vérifie la condition de coercivité suivante :

$$(1.5) \qquad a(q, q) \geq \alpha \, \| q \|^2_{H^{-1/2}(\Gamma)} \quad ; \quad \forall\, q \in H^{-1/2}(\Gamma) \ ; \ \alpha > 0 \ .$$

Nous avons également montré que, si la surface Γ est régulière, le problème (1.3) est un isomorphisme de l'espace de Hilbert $H^{s+1}(\Gamma)$ sur $H^{s}(\Gamma)$ pour tout s réél. (Nous renvoyons à LIONS-MAGENES [L.M] pour la définition de ces espaces).

L'expression (1.3) qui définit la solution du problème (1.1), à partir de la charge q, est telle que,

$$
\text{(1.6)} \quad \begin{cases} q \in H^{m-1/2}(\Gamma) \rightarrow u \in H^{m+1}(\Omega) \cap W_m^{m+1}(\Omega^c) \ ; \ m \text{ entier} \geq 0 \\ H^{m+1}(\Omega) = \{ u \in L^2(\Omega) \ ; \ \partial^\alpha u \in L^2(\Omega) \ ; \ |\alpha| \leq m+1 \} \\ W_m^{m+1}(\Omega^c) = \{ u \in \mathcal{D}'(\Omega^c) ; \ (1+r^2)^{\frac{|\alpha|-1}{2}} \partial^\alpha u \in L^2(\Omega^c) \ ; \ |\alpha| \leq m+1 \} . \end{cases}
$$

Rappelons, maintenant, quelques résultats classiques sur l'étude d'erreur des approximations variationnelles.

Soit à approcher la solution de

$$
\text{(1.7)} \quad a(q, q') = \langle u_0, q' \rangle \ ; \ \forall q' \in H^{-1/2}(\Gamma) .
$$

Nous introduisons un sous-espace de dimension finie V_h de l'espace $H^{-1/2}(\Gamma)$ et une forme bilinéaire approchée de a_h et nous résolvons

$$
\text{(1.8)} \quad a_h(q_h, q'_h) = \langle u_{0h}, q'_h \rangle \ ; \ \forall q'_h \in V_h .
$$

Alors, si

$$
\text{(1.9)} \quad a_h(q_h, q_h) \geq \alpha \| q_h \|^2_{H^{-1/2}(\Gamma)} \ ; \ \forall q_h \in V_h \ ; \ \alpha > 0 \ ;
$$

nous avons

PROPOSITION 1.1 : Soit q *la solution de* (1.7) *et* q_h *la solution de* (1.8), *nous avons*

$$(1.10)\qquad \|q-q_h\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} \leq C\left[\|u_0-u_{0h}\|_{H^{1/2}(\Gamma)} + \inf_{q'_h\in V_h}\left[\|q-q'_h\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} + \sup_{w_h\in V_h}\frac{a(q'_h,w_h)-a_h(q'_h,w_h)}{\|w_h\|_{H^{-1/2}(\Gamma)}}\right]\right]$$

II - DESCRIPTION DES ELEMENTS FINIS COURBES. ETUDE D'ERREUR.

2.1 - Construction d'une surface approchée et de l'espace V_h .

Nous supposons la surface Γ régulière et munie d'un système fini de p cartes, qui sont des applications suffisamment dérivables d'une partie de R^2 dans R^3 , telle que les différentielles $D\Phi_i$ soient des applications linéaires de rang 2, d'inverse borné en tant qu'application linéaire de R^2 dans le plan tangent à Γ au point $\Phi_i(x)$.

Nous supposons donné un découpage de Γ en p parties Γ_i fermées telles que

$$\bigcup_{i=1}^{p}\Gamma_i = \Gamma$$

$\Gamma_i \cap \Gamma_j$, est une courbe de Γ si $i \neq j$.

et telles que l'application Φ_i est une bijection de S_i sur Γ_i. Les domaines S_i sont donc des fermés de R^2 que nous supposons polygonaux. Soit, alors, une "triangulation" $\mathcal{T}_{hi}$ de S_i (par des triangles ou des quadrangles). Sur chacun de ces éléments T nous définissons alors un interpolé de Φ_i , soit F_T , tel que l'application ainsi définie Φ_{ih} de S_i dans R^3 soit continue. Nous supposons, de plus, que l'opérateur d'interpolation est, sur chaque élément, invariant sur l'espace P_k des polynomes de degré k (avec $k \geq 1$), et que la triangulation est regulière (voir CIARLET-RAVIART [C.R.1]).

Notons $\mathcal{T}_h = \bigcup_i \mathcal{T}_{hi}$.

La surface Γ_h est alors la surface fermée définie par les cartes Φ_{ih}. Nous supposons que le long de la courbe $\Gamma_i \cap \Gamma_j$, les triangulations sont telles que les cartes Φ_{ih} et Φ_{jh} coïncident.

LEMME 1 : Soit h *le plus grand des diamètres des éléments* T *de* $\mathcal{T}_h$ *; alors, nous avons :*

$$(2.1) \qquad \max_{i=1,p} \sup_{x \in S_i} |\Phi_i(x) - \Phi_{ih}(x)| \leq C\, h^{k+1} \max_{i=1,p} \sup_{x \in S_i} \|D^{k+1} \Phi_i(x)\| \; ;$$

$$(2.2) \qquad \max_{i=1,p} \sup_{x \in S_i} |D^{\ell} \Phi_i(x) - D^{\ell} \Phi_{ih}(x)| \leq C\, h^{k+1-\ell} \max_{i=1,p} \sup_{x \in S_i} \|D^{k+1} \Phi_i(x)\| \; ; \; 1 \leq \ell \leq k+1;$$

et donc, pour h *assez petit,* $D\Phi_{ih}(x)$ *est de rang 2 exactement.*

Exemple : Supposons que la surface Γ possède une seule nappe. Il sera alors possible d'y inscrire un polyèdre, de telle façon que la projection stéréographique à partir d'un point intérieur à ce polyèdre, sur les facettes, soit des cartes régulières. Dans ce cas, il suffit de trianguler les facettes du polyèdre, de telle façon que les sommets, sur les arêtes, soient les mêmes pour chaque facette adjacente. Si nous choisissons des éléments affines :

$$\longleftarrow\!\!\!\!\!\!\longrightarrow \qquad F_T \text{ affine,}$$

la surface Γ_h sera un polyèdre, dont les facettes sont des triangles et les sommets sur Γ.

Si, de manière plus générale, nous utilisons, pour F_T, des polynomes de degré k, alors la surface Γ_h sera constituée de triangles curvilignes raccordés, qui sont des surfaces paramétriques de degré k. ■

Construisons, maintenant, l'espace V_h.

Nous associons, à chaque élément T de $\mathcal{T}_h$, un espace vectoriel de fonctions P, et un opérateur d'interpolation associé, noté π.

Nous supposons que :

(2.3) $$P_m \subset P \ .$$

L'espace V_h sera, alors, constitué des fonctions qui sont sur chaque élément curviligne de Γ_h, les images, par l'application F_T des fonctions de P. On pourra, aussi, afin de réduire, éventuellement, le nombre d'inconnues, imposer aux fonctions de V_h d'être continues sur Γ_h.

2.2 - Le problème approché.

Nous résoudrons le problème variationnel approché suivant :

(2.4) $$\frac{1}{4\pi}\int_{\Gamma_h}\int_{\Gamma_h}\frac{q_h(x)\ q'_h(y)}{|x-y|}\,dx\,dy = \int_{\Gamma_h} u_{0h}(y)\ q'_h(y)\,dy \ ; \forall\ q'_h \in V_h \ ,$$

où u_{0h} est une approximation définie sur Γ_h de u_0.

Il résulte de (1.4), utilisé pour Γ_h, que

$$\left(\int_{\Gamma_h}\int_{\Gamma_h}\frac{q(x)\ q(y)}{|x-y|}\,dx\,dy\right)^{1/2}$$

est une norme sur $H^{-1/2}(\Gamma_h)$. Donc, le problème (2.4) admet une solution unique bornée uniformément dans cet espace.

Exemple : Le cas le plus simple sera celui où Γ_h est constitué de triangles plans, définis par leurs sommets sur Γ, et l'espace V_h est l'espace des fonctions constantes sur chacun de ces triangles.

Alors, la résolution de (2.4) conduit à un système linéaire dont les coefficients sont :

$$\alpha_{ij} = \frac{1}{4\pi} \int_{T_i}\int_{T_j} \frac{dx\,dy}{|x-y|} \quad . \tag{2.5}$$

Dans ce cas, on connait explicitement (par primitive) l'expression :

$$\varphi_j(x) = \frac{1}{4\pi} \int_{T_j} \frac{dy}{|x-y|} \quad .$$

Le calcul approché de α_{ij} peut, alors, se faire en utilisant cette expression et une formule de quadrature sur T_i . Nous renvoyons à Stroud [St] pour une étude de telles formules.

Le cas général conduit à évaluer des intégrales de la forme :

$$\alpha_{ij} = \frac{1}{4\pi} \int_{T_i}\int_{T_j} \frac{w_i(x)\, w_j(y)}{|F_{T_i}(x)-F_{T_j}(y)|} J(F_{T_i})\, J(F_{T_j})\, dx\, dy \quad . \tag{2.6}$$

où T_i et T_j sont des triangles de $\mathcal{T}_h$, F_T , les cartes associées, et $J(F_T)$, l'élément d'aire correspondant. Les fonctions w_i sont, alors, les fonctions de base de l'espace P .

Cette intégrale est singulière dès que T_i et T_j sont adjacents.

Remarque : La matrice associée au problème (2.4) est définie positive et symétrique. C'est, d'autre part, une matrice dont tous les coéfficients sont non nuls.

2.3 - Etude d'erreur.

Afin de comparer la solution q_h de (2.4) à la solution q de (1.2), il est nécessaire de définir une application de Γ_h sur Γ .

Nous allons, alors, comparer la fonction q à l'image, par cette application de q_h . On pourrait penser à utiliser l'application $\Phi_i \circ \Phi_{i_h}^{-1}$. Mais, nous allons voir qu'ainsi, nous n'obtiendrons pas une estimation optimale de l'erreur. Nous introduisons, donc, l'application Ψ suivante.

{ Pour $x \in \Gamma$, $\Psi^{-1}(x)$ est le point de Γ_h situé sur la normale à Γ au point x .

Soit des voisinages de la surface Γ dans R^3 définis par :

$$U_\delta = \{ y \in R^3 \ ; \ \text{dist}\,(y, \Gamma) \leq \delta \} \ ;$$

Alors, pour δ assez petit, tout point y de U_δ admet une projection unique sur Γ . Cette application Ψ est régulière de U_δ sur Γ ; c'est-à-dire, que les applications $\Phi_i \circ \Psi$ sont régulières de U_δ dans S_i .

Pour h assez petit, la surface Γ_h sera contenue dans U_δ . Donc, Ψ est aussi une application de Γ_h sur Γ . régulière. Nous verrons que c'est une bijection pour h assez petit. Donc, Ψ^{-1} sera, alors, définie de Γ sur Γ_h .

THEOREME 2.1 : Soit q *la solution de (1.2) et* q_h *la solution de (2.4); nous avons les estimations d'erreur suivantes (si* $k \geq m$ *) :*

$$(2.7) \qquad \|q - q_h \circ \Psi^{-1}\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} \leq C \left[\|u_0 - u_{0h} \circ \Psi^{-1}\|_{H^{1/2}(\Gamma)} + h^{m+3/2} \|q\|_{H^{m+1}(\Gamma)} + h^{k+1/2} \|q\|_{L^2(\Gamma)} \right]$$

$$(2.8) \qquad \|q - q_h \circ \Psi^{-1}\|_{L^2(\Gamma)} \leq C \left[\frac{1}{\sqrt{h}} \|u_0 - u_{0h} \circ \Psi^{-1}\|_{H^{1/2}(\Gamma)} + h^{m+1} \|q\|_{H^{m+1}(\Gamma)} + h^k \|q\|_{L^2(\Gamma)} \right]$$

Démonstration : Nous allons la décomposer en quelques lemmes de nature géométrique.

LEMME 2 : Pour chaque triangle T *de* $\mathcal{C}_h$ *, l'application* $\Psi \circ F_T$ *est bornée ainsi que ses dérivées jusqu'à l'ordre* $k+1$, $D(\Psi \circ F_T)$ *est une application linéaire de rang 2 et d'inverse borné (en tant qu'application de* R^2 *dans le plan tangent à* Γ *), et*

(2.9) $$\sup_{x\in T} |\Psi \circ F_\tau (x) - F_\tau (x)| \leq C\, h^{k+1} \sup_{x\in T} |D^{k+1} \Phi_i(x)| ;$$

(2.10) $$\sup_{x\in T} |D(\Psi \circ F_\tau)(x) - D F_\tau(x)| \leq C\, h^{k} \sup_{x\in T} |D^{k+1} \Phi_i| .$$

Démonstration : Nous savons, d'après le Lemme 1, que F_τ admet des dérivées bornées jusqu'à l'ordre $k+1$. L'application Ψ étant régulière (pour h assez petit) il en est de même de $\Psi \circ F_\tau$.

Evaluons les différences :

$$\Phi_i^{-1} \circ \Psi \circ F_\tau(x) - x = \Phi_i^{-1} \circ \Psi \circ F_\tau(x) - \Phi_i^{-1} \circ \Psi \circ \Phi_i(x)$$

$$D\Phi_i^{-1} \circ D(\Psi \circ F_\tau) - I = D(\Phi_i^{-1} \circ \Psi)(F_\tau(x)) \circ D F_\tau(x) - D(\Phi_i^{-1} \circ \Psi)(\Phi_i(x)) \circ D\Phi_i(x)$$

d'où, $\Phi_i^{-1} \circ \Psi$ étant lipschitzienne et à dérivées lipschitziennes :

$$\sup_{x\in T} |\Phi_i^{-1} \circ \Psi \circ F_\tau(x) - x| \leq C \sup_{x\in T} |\Phi_i(x) - F_\tau(x)| .$$

On en déduit (2.9), en utilisant le fait que Φ_i est lipschitzienne.

On a aussi :

(2.11) $$\sup_{x\in T} \|(D\Phi_i)^{-1} \circ D(\Psi \circ F_\tau) - I\| \leq C \sup_{x\in T} |F_\tau(x) - \Phi_i(x)|\, |DF_\tau(x)| + C \sup_{x\in T} |DF_\tau(x) - D\Phi_i(x)| \leq C\, h^{k} \sup_{x\in T} |D^{k+1} \Phi_i(x)|$$

On en déduit (2.10), en écrivant alors :

$$D(\Psi \circ F_\tau) - D F_\tau = D(\Psi \circ F_\tau) - D\Phi_i + D\Phi_i - D F_\tau$$

et

$$D(\Psi \circ F_\tau) - D\Phi_i = D\Phi_i \circ (D\Phi_i^{-1} \circ D(\Psi \circ F_\tau) - I)$$

L'inégalité (2.11) montre aussi que, pour h assez petit, $D(\Psi \circ F_T)$ est de rang 2 et d'inverse borné en tant qu'application linéaire de R^2 dans le plan tangent à Γ au point $\Psi \circ F_T(x)$.

Nous allons comparer, maintenant, les éléments d'aires sur Γ_h et sur Γ respectivement. Choisissons des axes orthonormés (coordonnées x_1 , x_2) dans l'élément T . Les éléments d'aires sont, alors, respectivement :

$$J(F_T) = \left| \frac{\partial F_T}{\partial x_1} \wedge \frac{\partial F_T}{\partial x_2} \right|$$

$$J(\Psi \circ F_T) = \left| \frac{\partial (\Psi \circ F_T)}{\partial x_1} \wedge \frac{\partial (\Psi \circ F_T)}{\partial x_2} \right|$$

Il faut remarquer que la différence $J(\Phi_i) - J(F_T)$ est en $O(h^k)$. Le choix de Ψ va nous donner une différence en $O(h^{k+1})$.

LEMME 3 : Nous avons les inégalités, pour tout T dans la triangulation $\mathcal{C}_h$:

$$\sup_{x \in T} |J(F_T)(x) - J(\Psi \circ F_T)(x)| \leq C \; h^{k+1} \sup_{x \in T} |D^{k+1} \Phi_i(x)| \; . \tag{2.12}$$

$\forall \; T, T' \in \mathcal{C}_h$; $\forall \; x \in T, \; y \in T$:

$$C \; |F_T(x) - F_{T'}(y)| \leq |\Psi \circ F_T(x) - \Psi \circ F_{T'}(y)| \leq C \; |F_T(x) - F_{T'}(y)| \tag{2.13}$$

$$\left| |F_T(x) - F_{T'}(y)|^2 - |\Psi \circ F_T(x) - \Psi \circ F_{T'}(y)|^2 \right| \leq C \; h^{k+1} \; |F_T(x) - F_{T'}(y)|^2 \tag{2.14}$$

Démonstration : Nous savons d'après le Lemme 2, que $J(F_T)$ et $J(\Psi \circ F_T)$ sont bornés inférieurement par une constante non nulle (car $D F_T$ et $D(\Psi \circ F_T)$ sont d'inverse borné). Il suffit, donc, d'évaluer la différence de leur carré qui vaut :

$$J(F_T)^2 - J(\Psi \circ F_T)^2 = \left| \frac{\partial F_T}{\partial x_1} \wedge \frac{\partial F_T}{\partial x_2} \right|^2 - \left| \frac{\partial (\Psi \circ F_T)}{\partial x_1} \wedge \frac{\partial (\Psi \circ F_T)}{\partial x_2} \right|^2$$

$$= \left(\left(\frac{\partial F_T}{\partial x_1} - \frac{\partial (\Psi \circ F_T)}{\partial x_1} \right) \wedge \frac{\partial F_T}{\partial x_1} + \frac{\partial (\Psi \circ F_T)}{\partial x_1} \wedge \left(\frac{\partial F_T}{\partial x_2} - \frac{\partial (\Psi \circ F_T)}{\partial x_2} \right), \frac{\partial F_T}{\partial x_1} \wedge \frac{\partial F_T}{\partial x_2} + \frac{\partial (\Psi \circ F_T)}{\partial x_1} \wedge \frac{\partial (\Psi \circ F_T)}{\partial x_2} \right)$$

$$= \left(\left(\frac{\partial F_T}{\partial x_1} - \frac{\partial (\Psi \circ F_T)}{\partial x_1} \right) \wedge \frac{\partial (\Psi \circ F_T)}{\partial x_1} + \frac{\partial (\Psi \circ F_T)}{\partial x_1} \wedge \left(\frac{\partial F_T}{\partial x_2} - \frac{\partial (\Psi \circ F_T)}{\partial x_2} \right), \frac{\partial (\Psi \circ F_T)}{\partial x_1} \wedge \frac{\partial (\Psi \circ F_T)}{\partial x_2} \right) + R$$

et le reste R est, d'après le Lemme 2, majoré par :

$$|R| \leq C\, h^{2k} \sup_{x \in T} |D^{k+1} \phi_i(x)|$$

or : $2k \geq k+1$ car $k \geq 1$. Il reste, donc, à majorer le terme suivant (l'autre terme se majore de façon analogue) :

$$R' = \left(\left(\frac{\partial F_T}{\partial x_1} - \frac{\partial (\Psi \circ F_T)}{\partial x_1} \right) \wedge \frac{\partial (\Psi \circ F_T)}{\partial x_1}, \frac{\partial (\Psi \circ F_T)}{\partial x_1} \wedge \frac{\partial (\Psi \circ F_T)}{\partial x_2} \right)^*$$

$$= \left(\frac{\partial F_T}{\partial x_1} - \frac{\partial (\Psi \circ F_T)}{\partial x_1}, \frac{\partial (\Psi \circ F_T)}{\partial x_1} \wedge \left(\frac{\partial (\Psi \circ F_T)}{\partial x_1} \wedge \frac{\partial (\Psi \circ F_T)}{\partial x_2} \right) \right)$$

Mais, le vecteur :

$$t = \frac{\partial (\Psi \circ F_T)}{\partial x_1} \wedge \left(\frac{\partial (\Psi \circ F_T)}{\partial x_1} \wedge \frac{\partial (\Psi \circ F_T)}{\partial x_2} \right)$$

est un vecteur tangent à la surface Γ au point $(\Psi \circ F_T)(x)$ de norme uniformément bornée, d'après le Lemme 2. Nous avons :

$$t = D(\Psi \circ F_T)(x) \cdot y \quad ; \quad y \in R^2 \ , \ |y| < C \ .$$

D'où, d'après la construction de Ψ :

$$(\Psi \circ F_T(x) - F_T(x) \ , \ D(\Psi \circ F_T)(x) \cdot y) = 0$$

En dérivant par rapport à x_i , y fixé, nous obtenons :

$$\left(\frac{\partial \Psi \circ F_T(x)}{\partial x_i} - \frac{\partial F_T(x)}{\partial x_i} \ , \ D(\Psi \circ F_T)(x) \cdot y \right) + \left(\Psi \circ F_T(x) - F_T(x), \frac{\partial}{\partial x_i} D(\Psi \circ F_T)(x) \cdot y \right) = 0$$

D'où l'on déduit :

$$|R'| \leq C\, h^{k+1} \sup_{x \in T} |D^{k+1}\Phi_i(x)|.$$

Démontrons, maintenant, (2.12). L'une des inégalités est une conséquence du fait que l'application Ψ est lipschitzienne du voisinage U_δ sur la surface Γ. L'autre inégalité résulte du fait que l'application Ψ^{-1} de la surface Γ sur Γ_h est continue (i.e. $\Phi_{ih}^{-1} \circ \Psi^{-1} \circ \Phi_i$ est continue de S_i dans R^2), et admet des dérivées bornées (i.e. ses images par les cartes de Γ et Γ_h respectivement), d'après le Lemme 2.

Démontrons, enfin, (2.14). La différence à majorer s'écrit :

$$2\Big(F_T(x)-(\Psi\circ F_T)(x)-(F_{T'}(y)-(\Psi\circ F_{T'})(y)),(\Psi\circ F_T)(x)-(\Psi\circ F_{T'})(y)\Big)+\big|F_T(x)-(\Psi\circ F_T)(x)-(F_{T'}(y)-(\Psi\circ F_{T'})(y))\big|^2$$

Le premier terme se décompose en deux termes que l'on majore séparément :

$$\Big(F_T(x)-(\Psi\circ F_T)(x),(\Psi\circ F_T)(x)-(\Psi\circ F_{T'})(y)\Big) = \Big(F_T(x)-(\Psi\circ F_T)(x),(\Psi\circ F_T)(x)-(\Psi\circ F_{T'})(y) - t_x\Big)$$

où t_x est la projection, sur le plan tangent à Γ au point $(\Psi\circ F_T)(x)$, du vecteur $(\Psi\circ F_T)(x) - (\Psi\circ F_{T'})(y)$. Alors, la surface Γ étant régulière, nous savons que :

$$|(\Psi\circ F_T)(x) - (\Psi\circ F_{T'})(y) - t_x| \leq C\ |(\Psi\circ F_T)(x) - (\Psi\circ F_{T'})(y)|^2$$

La majoration de ce terme s'en déduit, alors, facilement, d'après le Lemme 2. Reste le terme :

$$S = \Big|F_T(x) - (\Psi\circ F_T)(x) - \Big(F_{T'}(y) - (\Psi\circ F_{T'})(y)\Big)\Big|^2$$

On considère deux cas ; ou bien : $|F_T(x) - F_{T'}(y)| \geq C\, h$; ($C > 0$ fixé), et alors, le Lemme 2 nous montre que :

$$|S'| \leq C\, h^{2k+2} \leq C\, h^{2k} \times |F_T(x) - F_T'(y)|^2 \leq C\, h^{k+1}\, |F_T(x) - F_T'(y)|^2$$

ou bien : $F_T(x)$ et $F_T'(y)$ sont voisins et alors, nous pouvons supposer que x et y sont dans le domaine d'une même carte Φ_i (débordant éventuellement de S_i) ; $F_T - \Psi \circ F_T$ est la restriction à T d'une fonction continue dont les dérivées sont bornées par : $C\, h^k$ (d'après le Lemme 2). Donc

$$|S| \leq C\, h^{2k}\, |x - y|^2 \leq C\, h^{k+1}\, |F_T(x) - F_T'(y)|^2 \ . \ \blacksquare$$

LEMME 4 : Soit $\tilde{V}_h$ *le sous-espace de dimension finie de* $H^{-1/2}(\Gamma)$

$$\tilde{V}_h = \{ \tilde{q}_h \ ; \ \tilde{q}_h(x) = q_h(\Psi^{-1}(x)) \ , \ q_h \in V_h \} \ .$$

Alors, nous avons :

$$\|\tilde{q}_h\|_{L^2(\Gamma)} \leq \frac{C}{\sqrt{h}}\, \|\tilde{q}_h\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} \quad ; \ \forall \ \tilde{q}_h \in \tilde{V}_h \ . \tag{2.15}$$

Soit s_h *le projecteur dans* $L^2(\Gamma)$ *sur le sous-espace* $\tilde{V}_h$ *; alors, nous avons (si* $k \geq m$ *) :*

$$\|q - s_h\, q\|_{L^2(\Gamma)} \leq C\, h^{m+1} \|q\|_{H^{m+1}(\Gamma)} \quad ; \forall \ q \in H^{m+1}(\Gamma) \ . \tag{2.16}$$

$$\|q - s_h\, q\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} \leq C\, h^{m+3/2} \|q\|_{H^{m+1}(\Gamma)} \quad ; \forall \ q \in H^{m+1}(\Gamma) \ . \tag{2.17}$$

Démonstration : D'après le Lemme 2, nous savons que la norme dans $L^2(\Gamma)$ est uniformément équivalente à :

$$\left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T q_{hT}^2(x)\, dx \right)^{1/2} \ ; \quad q_{hT} \in P \ .$$

Pour chaque élément T , nous introduisons une fonction φ_T nulle sur ∂T telle que :

$$\begin{cases} \sup_{x \in T} |\varphi_T| \leq 1 \\ \sup_{x \in T} |D\varphi_T| \leq \frac{C}{h} \\ \varphi_T(x) > 0 \quad \text{pour} \quad x \in \overset{\bullet}{T} \\ \int_T \varphi_T \, dx \geq \frac{1}{2} \text{ mes } (T) \ . \end{cases}$$

Alors, nous savons que (car P est de dimension finie) :

$$\left(\sum_{T \in \mathcal{C}_h} \int_T q_{hT}^{\sim 2}(x) \, dx \right)^{1/2} \leq C \left(\sum_{T \in \mathcal{C}_h} \int_T q_{hT} \cdot \varphi_T \, q_{hT} \, dx \right)^{1/2} \ .$$

On en déduit :

$$\| q_h^{\sim} \|^2_{L^2(\Gamma)} \leq C \int_\Gamma q_h^{\sim} \cdot \Big(\sum_{T \in \mathcal{C}_h} \widetilde{\varphi_T q_{hT}} \, J(\Psi \circ F_T) \Big) \, dx \leq \| q_h^{\sim} \|_{H^{-1}(\Gamma)} \Big\| \sum_{T \in \mathcal{C}_h} \widetilde{\varphi_T q_{hT}} \, J(\Psi \circ F_T) \Big\|_{H^1(\Gamma)} \ .$$

Il est facile de voir, en utilisant les propriétés de φ_T et le Lemme 2, que :

$$\Big\| \sum_{T \in \mathcal{C}_h} \widetilde{\varphi_T q_{hT}} \, J(\Psi \circ F_T) \Big\|_{H^1(\Gamma)} \leq \frac{C}{h} \| q_h^{\sim} \|_{L^2(\Gamma)} \ .$$

On en déduit :

$$\| q_h^{\sim} \|_{L^2(\Gamma)} \leq \frac{C}{h} \| q_h^{\sim} \|_{H^{-1}(\Gamma)} \ .$$

L'inégalité (2.15) resulte alors de l'inégalité d'interpolation (voir [B.E])

$$\| u \|_{H^{-1/2}(\Gamma)} \leq C \| u \|^{1/2}_{L^2(\Gamma)} \| u \|^{1/2}_{\dot{H}^{-1}(\Gamma)} \ .$$

Pour établir (2.16), nous utilisons l'interpolé de $q \circ (\Psi \circ F_T)^{-1}$ sur chaque élément T de $\mathcal{T}_h$:

$$\| q \circ (\Psi \circ F_T)^{-1} - \pi q \circ (\Psi \circ F_T)^{-1} \|_{L^2(T)} \leq C\, h^{m+1} \| q \circ (\Psi \circ F_T)^{-1} \|_{H^{m+1}(T)}$$

D'où, en utilisant les équivalences de normes :

$$\| q - \pi_h q \|_{L^2(\Gamma)} \leq C\, h^{m+1} \| q \|_{H^{m+1}(\Gamma)} .$$

D'où (2.16), car nous avons :

$$\| q - s_h q \|_{L^2(\Gamma)} \leq \| q - \pi_h q \|_{L^2(\Gamma)} .$$

Par interpolation, nous en déduisons alors :

$$\| q - s_h q \|_{L^2(\Gamma)} \leq C \sqrt{h}\, \| q \|_{H^{1/2}(\Gamma)} \quad ; \quad \forall\, q \in H^{1/2}(\Gamma) .$$

(Nous avons supposé que l'opérateur π est défini et continu sur $H^{m+1}(\Gamma)$. Ceci est toujours vrai dans les cas considérés ici ; Cf [N.P]). Nous avons :

$$\| q - s_h q \|_{H^{-1/2}(\Gamma)} = \sup_{\varphi \in H^{1/2}(\Gamma)} \frac{(q - s_h q, \varphi)_{L^2(\Gamma)}}{\| \varphi \|_{H^{1/2}(\Gamma)}} = \sup_{\varphi \in H^{1/2}(\Gamma)} \frac{(q - s_h q, \varphi - s_h \varphi)_{L^2(\Gamma)}}{\| \varphi \|_{H^{1/2}(\Gamma)}} \leq C \sqrt{h}\, \| q - s_h q \|_{L^2(\Gamma)} .$$

Démonstration du Théorème 2.1 : Nous n'allons pas appliquer directement la Proposition 1.1. Pour cela, nous transformons les intégrales dans (2.4) en intégrales sur Γ par l'application Ψ. D'où :

$$\int_\Gamma \int_\Gamma \frac{q_h(\Psi^{-1}(x))\; q'_h(\Psi^{-1}(y))}{|\Psi^{-1}(x) - \Psi^{-1}(y)|}\, J(\Psi^{-1}(x))\, J(\Psi^{-1}(y))\, dx\, dy = \int_\Gamma \pi_0 h(\Psi^{-1}(y))\; q'_h(\Psi^{-1}(y))\, J(\Psi^{-1}(y))\, dy$$

Nous avons, donc, à évaluer l'erreur sur le second membre, d'une part :

$$\| u_0 - u_{0h} \circ \psi^{-1} \|_{H^{1/2}(\Gamma)} + \sup_{q'_h \in V_h} \frac{\int_\Gamma |u_{0h} \circ \psi^{-1}| \, |q'_h \circ \psi^{-1}| \, |1 - J(\psi^{-1})| \, dy}{\|q'_h\|_{H^{-1/2}(\Gamma)}}$$

et, en utilisant (2.12) et (2.15), nous avons :

$$\leq \| u_0 - \tilde{u}_{0h} \|_{H^{1/2}(\Gamma)} + C \, \| u_{0h} \circ \psi^{-1} \|_{L^2(\Gamma)} \, h^{k+1} \, \frac{1}{\sqrt{h}} \, .$$

D'autre part, l'erreur d'interpolation, qui est donnée par le Lemme 4, en choisissant $q'_h = s_h q$:

$$\| q - q'_h \|_{H^{-1/2}(\Gamma)} \leq C \, h^{m+3/2} \| q \|_{H^{m+1}(\Gamma)} \, .$$

Enfin, l'erreur sur le changement de forme bilinéaire :

$$4\pi (a(q'_h, w_h) - a_h(q'_h, w_h)) = \sum_{T \in \mathcal{C}_h} \sum_{T \in \mathcal{C}_h} \left[\int_T \int_{T'} \frac{q'_h(x) w_h(y) . J(\psi \circ F_T)(x) \; J(\psi \circ F_{T'})(y)}{|\psi \circ F_T(x) - \psi \circ F_{T'}(y)|} \, dx \, dy \right.$$

$$\left. - \int_T \int_{T'} \frac{q'_h(x) w_h(y) . J(F_T(x)) \; J(F_{T'}(y))}{|F_T(x) - F_{T'}(y)|} \, dx \, dy \right]$$

On décompose cette différence en deux ; d'une part :

$$R = \sum_{T \in \mathcal{C}_h} \sum_{T' \in \mathcal{C}_h} \int_T \int_{T'} \frac{q'_h(x) w_h(y)}{|\psi \circ F_T(x) - \psi \circ F_{T'}(y)|} \Big(J(\psi \circ F_T(x)) . J(\psi \circ F_{T'}(y)) - J(F_T(x)) . J(F_{T'}(y)) \Big) \, dx \, dy$$

que nous majorerons par :

$$|R| \leq \sum_{T\in\mathcal{C}_h} \sum_{T'\in\mathcal{C}_h} C \int_T \int_{T'} \frac{|q'_h(x)||w_h(y)|}{|\Psi\circ F_T(x)-\Psi\circ F_{T'}(y)|}\, h^{k+1}\,dx\,dy \leq C\,h^{k+1} \int_\Gamma \int_\Gamma \frac{|\tilde{q}'_h(x)||w_h(y)|\,dx\,dy}{|x-y|}$$

$$\leq C\,h^{k+1}\,\|\tilde{q}'_h\|_{L^2(\Gamma)}\,\|w_h\|_{L^2(\Gamma)}\,.$$

La dernière inégalité résulte du fait que, d'après [N.P.] , la forme bilinéaire est continue sur $H^{-1/2}(\Gamma) \times H^{-1/2}(\Gamma)$, et donc, sur $L^2(\Gamma) \times L^2(\Gamma)$. Nous terminons la majoration de ce terme, en utilisant le Lemme 4 :

$$|R| \leq C\,h^{k+1/2}\,\|q\|_{L^2(\Gamma)}\,\|w_h\|_{H^{-1/2}(\Gamma)}\,.$$

D'autre part, le second terme sera :

$$S = \sum_{T\in\mathcal{C}_h} \sum_{T'\in\mathcal{C}_h} \int_T \int_{T'} q'_h(x)\,w_h(y) \left(\frac{1}{|\Psi\circ F_T(x) - \Psi\circ F_{T'}(y)|} - \frac{1}{|F_T(x)-F_{T'}(y)|}\right) J(F_T(x))\,J(F_{T'}(y))\,dx\,dy$$

que l'on majore en utilisant :

$$\frac{1}{|\Psi\circ F_T(x)-\Psi\circ F_{T'}(y)|} - \frac{1}{|F_T(x)-F_{T'}(y)|} = \frac{|F_T(x)-F_T(y)|^2 - |\Psi\circ F_T(x)-\Psi\circ F_T(y)|^2}{|\Psi\circ F_T(x)-\Psi\circ F_{T'}(y)|\,|F_T(x)-F_{T'}(y)|\,(|\Psi\circ F_T(x)-\Psi\circ F_{T'}(y)|+|F_T(x)-F_{T'}(y)|)}$$

En utilisant, alors, le Lemme 3, nous en déduisons :

$$|S| \leq C\,h^{k+1/2} \int_\Gamma \int_\Gamma \frac{|q'_h(x)|\,|w_h(y)|}{|x-y|}\,dx\,dy \leq C\,h^{k+1/2}\,\|q'_h\|_{L^2(\Gamma)}\,\|w_h\|_{H^{-1/2}(\Gamma)}\,.$$

Le choix de $q'_h = s_h\,q$, nous assure alors que :

$$|S| \leq C\,h^{k+1/2}\,\|q\|_{L^2(\Gamma)}\,\|w_h\|_{H^{-1/2}(\Gamma)}\,. \quad \blacksquare$$

THEOREME 2.2. : Soit le potentiel u *donné par* (1.3) *et le potentiel approché* u_h :

$$u_h(x) = \frac{1}{4\pi} \int_\Gamma \frac{q_h(y)}{|x-y|}\, dy \quad ; \tag{2.18}$$

Alors, pour x *tel que : dist* $(x,\Gamma) \geqslant \delta > 0$ *et* h *assez petit, nous avons :*

$$|u(x)-u_h(x)| \leqslant \frac{C}{(\mathrm{dist}(x,\Gamma)+\mathrm{dist}^2(x,\Gamma))} \left[h^{k+1}\|q\|_{L^2(\Gamma)} + h^{m+2}\|q\|_{H^{m+1}(\Gamma)} + \|u_0-\tilde{u}_{0h}\|_{L^2(\Gamma)} + \sqrt{h}\,\|u_0-\tilde{u}_{0h}\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \right] \tag{2.19}$$

$$|\partial^\alpha u(x)-\partial^\alpha u_h(x)| \leqslant \frac{C}{(\mathrm{dist}(x,\Gamma)^{|\alpha|+1}+\mathrm{dist}(x,\Gamma)^{|\alpha|+2})} \left[h^{k+1}\|q\|_{L^2(\Gamma)} + h^{m+2}\|q\|_{H^{m+1}(\Gamma)} + \|u_0-\tilde{u}_{0h}\|_{L^2(\Gamma)} + \sqrt{h}\,\|u_0-\tilde{u}_{0h}\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \right] \tag{2.20}$$

Démonstration : Nous évaluons, d'abord, par un argument de dualité classique, l'erreur entre q et $\tilde{q}_h J(\Psi)$ dans l'espace $H^{-1}(\Gamma)$.

$$\|q - \tilde{q}_h J(\Psi^{-1})\|_{H^{-1}(\Gamma)} = \sup_{\varphi \in H^1(\Gamma)} \frac{(q-\tilde{q}_h J(\Psi^{-1}), \varphi)_{L^2(\Gamma)}}{\|\varphi\|_{H^1(\Gamma)}}$$

Nous résolvons alors :

$$\varphi(x) = \frac{1}{4\pi} \int_\Gamma \frac{g(y)}{|x-y|}\, dy \quad ; \ \forall \ x \in \Gamma \quad ;$$

Et, nous savons alors :

$$\|g\|_{L^2(\Gamma)} \leqslant C \|\varphi\|_{H^1(\Gamma)}$$

D'où :

$$\|q - \tilde{q}_h J(\Psi^{-1})\|_{H^{-1}(\Gamma)} = \sup_{g \in L^2(\Gamma)} \frac{a(q-\tilde{q}_h J(\Psi^{-1}), g)}{\|g\|_{L^2(\Gamma)}}$$

On calcule alors :

$$a(q-\tilde{q_h}\, J(\Psi^{-1}),g) = a(q-\tilde{q_h}\, J(\Psi^{-1}),g - s_h g) + a(q-\tilde{q_h}\, J(\Psi^{-1}), s_h g) \ .$$

On majore le premier terme par le Lemme 4 :

$$C \| q-\tilde{q_h}\, J(\Psi^{-1})\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} \|g-s_h g\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} \leq C \sqrt{h} \|q-\tilde{q_h}\, J(\Psi^{-1})\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} \|q\|_{L^2(\Gamma)} \ .$$

Le deuxième terme s'écrit :

$$(u_0, s_h g)_{L^2(\Gamma)} - \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma_h}\int_{\Gamma_h} \frac{q_h(x)\ s_h g(y)\ J(\Psi^{-1}(y))}{|\Psi^{-1}(x) - \Psi^{-1}(y)|}\, dx\, dy$$

$$= (u_0, s_h g)_{L^2(\Gamma)} - (u_{0h}, s_h g)_{L^2(\Gamma)} + \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma_h}\int_{\Gamma_h} \frac{q_h(x)\ s_h g(y)(1-J(\Psi^{-1}(y)))}{|\Psi^{-1}(x) - \Psi^{-1}(y)|}\, dx\, dy$$

$$- \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma_h}\int_{\Gamma_h} q_h(x) s_h g(y) \left(\frac{1}{|\Psi^{-1}(x)-\Psi^{-1}(y)|} - \frac{1}{|x-y|} \right) dx\, dy$$

On majore alors, en utilisant les Lemmes 3 et 4, par :

$$(C\|u_0-\tilde{u_{0h}}\|_{L^2(\Gamma)} + C\, h^{k+1} \|u_0\|_{L^2(\Gamma)} + C\, h^{k+1} \|q_h\|_{L^2(\Gamma)} \|g\|_{L^2(\Gamma)}$$

On en déduit donc :

$$\| q-\tilde{q_h}\, J(\Psi^{-1})\|_{H^{-1}(\Gamma)} \leq C \left[h^{k+1} \|q\|_{L^2(\Gamma)} + H^{m+2} \|q\|_{H^{m+1}(\Gamma)} + \|u_0-\tilde{u_{0h}}\|_{L^2(\Gamma)} + \sqrt{h}\, \|u_0-\tilde{u_{0h}}\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \right]$$

On transforme l'expression de u_h par l'application Ψ :

$$u_h(y) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \frac{q_h(\Psi^{-1}(x))\ J(\Psi^{-1}(x))}{|y - \Psi^{-1}(x)|}\, dx \ ;$$

D'où :

$$u(y)-u_h(y) = \frac{1}{4\pi} \int_\Gamma \frac{q(x)-\tilde{q_h} J(\psi^{-1})}{|y-x|} dx + \frac{1}{4\pi} \int_\Gamma \tilde{q_h} J(\psi^{-1}) \left(\frac{1}{|y-x|} - \frac{1}{|y-\psi^{-1}(x)|} \right) dx .$$

On utilise, alors, le fait que si la distance de y à la surface Γ est plus grande que δ fixé, nous avons :

$$\left\| \frac{1}{|y-x|} \right\|_{H^1(\Gamma)} < \frac{C}{dist(y,\Gamma)^2} + \frac{C}{dist(y,\Gamma)} ;$$

$$\left| \frac{1}{|y-x|} - \frac{1}{|y-\psi^{-1}(x)|} \right| < \frac{C\, h^{k+1}}{(dist(y,\Gamma))^2} .$$

Nous avons :

$$\text{grad } u(x) = \frac{1}{4\pi} \int_\Gamma \frac{q(y)\,(x-y)}{|x-y|^3} dy ;$$

$$\text{grad } u_h(x) = \frac{1}{4\pi} \int_\Gamma \frac{q_h(y)\,(x-y)}{|x-y|^3} dy = \frac{1}{4\pi} \int_\Gamma \frac{\tilde{q_h}(y)\, J(\psi^{-1}(y))\,(x-\psi^{-1}(y))}{|x-\psi^{-1}(y)|^3} dy .$$

On majore alors la différence de la même manière que précédemment. Le résultat, sur les dérivées successives, est analogue.

Remarque 1 : L'estimation d'erreur, obtenue sur le potentiel, ne donne aucune information au voisinage de la surface Γ. Nous n'avons pas obtenu d'estimation globale. La difficulté provient du fait, qu'à la traversée de la surface Γ, le gradient de u a une discontinuité, tandis que le gradient de u_h a une discontinuité, à la traversée de Γ_h. Donc, l'erreur $(u-u_h)(x)$ est très mauvaise en un point x situé entre Γ et Γ_h. On montre, très facilement, que l'erreur entre le potentiel u et

$$\tilde{u_h}(x) = \frac{1}{4\pi} \int_\Gamma \frac{\tilde{q_h}(y)}{|x-y|} dy ,$$

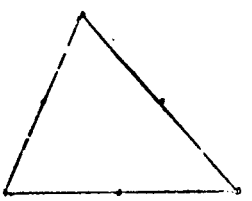
est en $h^{k+1/2} + h^{m+3/2}$, dans l'espace $W_0^1(R^3)$.

Remarque 2 : Contrairement à ce qui se passe dans le cas des méthodes par éléments finis, l'erreur sur les dérivées successives du potentiel est du même ordre que celle sur le potentiel lui-même, en un point x non sur la surface Γ.

III - ETUDE D'UNE VARIANTE.

Nous allons exposer cette méthode dans le cas particulier de l'approximation, par des polynômes de degré 2, pour la géométrie, et de degré 1, pour la fonction, l'espace V_h étant constitué de fonctions continues. Le principe consiste à remplacer le noyau $\frac{1}{|x-y|}$, calculé sur Γ_h , par un développement à deux termes. L'étude d'erreur sera identique, sauf dans le choix de la forme bilinéaire approchée.

Soit, donc, une triangulation par des éléments finis avec $k=2$ du type Lagrange :



F_T est un polynôme de degré 2 qui interpole Φ_i aux sommets des triangles et aux milieux des côtés.

Ces éléments définissent une surface Γ_h approchée, qui est fermée. Soit Γ_h^* la surface approchée, correspondant à l'élément fini affine, construit sur la même triangulation. Nous noterons B_T l'application affine correspondante.

Le problème approché sera alors :

$$a_h^*(q_h^*, q'_h) = \int_{\Gamma_h} u_{0h} \cdot q'_h \, d\nu \quad ; \quad \forall \; q'_h \in V_h \; . \tag{3.1}$$

$$(3.2)\qquad a_h^*(q_h , q'_h) = \sum_{T\in \mathcal{G}_h} \sum_{T'\in \mathcal{G}_h} \frac{1}{4\pi} \int_T \int_{T'} \frac{q_h(s)\, q'_h(t)\, J^*(F_T(s))\, J^*(F_{T'}(t))}{N^*(s,t)}\, ds\, dt ;$$

$$(3.3)\qquad \frac{1}{N^*(s,t)} = \frac{1}{|B_T(s)-B_{T'}(t)|} + \frac{(F_T(s)-B_T(s)-F_{T'}(t)+B_{T'}(t),\ B_T(s)-B_{T'}(t))}{|B_T(s)-B_{T'}(t)|^3} .$$

$J^*(F_T)$ est une approximation (polynômiale, de degré 2) de $J(F_T)$ à l'ordre 2.

Les coéfficients du système linéaire à résoudre se calculent, alors, à partir des intégrales de la forme :

$$\int_{T_1}\int_{T_2} \frac{p_1(x)\, p_2(y)}{|x-y|}\, dx\, dy \quad ; \quad p_1 , p_2 \in P_3 \ ;$$

$$\int_{T_1}\int_{T_2} \frac{p(x,y)}{|x-y|^3}\, dx\, dy \quad ; \quad \text{où} \quad p(x,y)$$

est un polynôme de degré 5, par rapport à x et à y, qui a un zéro double pour $x = y$. Alors, chacune des intégrales

$$\int_{T_2} \frac{p_2(y)}{|x-y|}\, dy \qquad \text{et} \qquad \int_{T_2} \frac{p(x,y)}{|x-y|^3}$$

peut se calculer par primitive, pour y fixé. Les intégrales doubles correspondantes seront calculées de manière approchée, par une formule d'intégration numérique.

Nous donnons, ci-dessous, les estimations d'erreur correspondantes.

THEOREME 3.1 . Soit q_h^* *la solution de* (3.1) *et* q *la solution de* (1.2); *nous avons :*

$$(3.4)\qquad \|q-q_h^*\circ\psi^{-1}\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} \leq C_\varepsilon \left[\|u_0-u_{0h}\circ\psi^{-1}\|_{H^{1/2}(\Gamma)} + h^{5/2-\varepsilon}\, \|q\|_{H^2(\Gamma)} \right] ;$$

$$(3.5)\qquad \|q-q_h^*\circ\psi^{-1}\|_{L^2(\Gamma)} \leq C_\varepsilon \left[\frac{\|u_0-u_{0h}\circ\psi^{-1}\|_{H^{1/2}(\Gamma)}}{\sqrt{h}} + h^{2-\varepsilon}\|q\|_{H^2(\Gamma)} \right] ;$$

et si u *est le potentiel donné par* (1.3) *et* u_h^* *le potentiel suivant :*

$$(3.6)\qquad u_h^*(y) = \frac{1}{4\pi}\int_{\Gamma_h^*} \frac{q_h^*(x)}{N^*(x,y)}\,\varphi^*(x)\,dx ,$$

où

$$\varphi^*(x) = \frac{J^*(F_T(s))}{J(B_T(s))} , \quad \textit{avec} \quad x = F_T(s) ,$$

$$\frac{1}{N^*(x,y)} = \frac{1}{|x-y|} - \frac{(F_T(B^{-1}(x))-x,\ x-y)}{|x-y|^3} ,$$

alors, pour $\operatorname{dist}(y,\Gamma) \geq \delta$ *fixé, nous avons :*

$$(3.7)\qquad |u(y)-u_h^*(y)| \leq \frac{C_\varepsilon\left(\|u_0-\tilde{u}_{0h}\|_{L^2(\Gamma)} + \sqrt{h}\,\|u_0-\tilde{u}_{0h}\|_{H^{1/2}(\Gamma)} + h^{3-\varepsilon}\|q\|_{H^2(\Gamma)}\right)}{\operatorname{dist}(y,\Gamma)+\operatorname{dist}(y,\Gamma)^3} ;$$

$$(3.8)\qquad |\operatorname{grad} u(y)-\operatorname{grad} u^*(y)| \leq \frac{C_\varepsilon\left(\|u_0-\tilde{u}_{0h}\|_{L^2(\Gamma)} + \sqrt{h}\,\|u_0-\tilde{u}_{0h}\|_{H^{1/2}(\Gamma)} + h^{3-\varepsilon}\|q\|_{H^2(\Gamma)}\right)}{\operatorname{dist}(y,\Gamma)^2+\operatorname{dist}(y,\Gamma)^5} ;$$

Démonstration : Nous utilisons les résultats déjà établis dans le Théorème 2.1. Il est facile de voir, alors, qu'il y a un seul terme d'erreur supplémentaire, qui est :

$$\sup_{w_h \in V_h} \frac{|a_h(q'_h, w_h) - a_h^*(q'_h, w_h)|}{\|w_h\|_{H^{-1/2}(\Gamma)}} \quad ; \text{ avec } \quad q'_h = s_h q .$$

Nous allons montrer que :

$$(3.9)\qquad |a_h(s_h q, w_h) - a_h^*(s_h q, w_h)| \leq C_\varepsilon\, h^{3-\varepsilon}\,\|q\|_{L^2(\Gamma)}\,\|w_h\|_{L^2(\Gamma)} .$$

Nous en déduisons, en utilisant les inégalités inverses, que :

(3.10 $$a_h^*(\tilde{q_h}, \tilde{q_h}) \geq \alpha \|\tilde{q_h}\|^2_{H^{-1/2}(\Gamma)} \quad ; \alpha > 0 \text{ , pour } h \text{ assez petit.}$$

Les inégalités (3.5) et (3.6) résultent, alors, de (3.9) et (3.10), et au Théorème 2.1, déjà établi.

Pour démontrer (3.9), nous utilisons deux Lemmes.

LEMME 5 : Soit u *et* v *, deux vecteurs de* R^3 *avec* $|v| \leq C\,|u|$ *, alors :*

$$\left| \frac{1}{|u|} - \frac{1}{|v|} - \frac{(v-u,\, v)}{|v|^3} \right| \leq C \quad \frac{|v-u|^2}{|v|^3}$$

Démonstration : Nous avons :

$$\frac{1}{|u|} - \frac{1}{|v|} - \frac{(v-u,\, v)}{|v|^3} = \frac{|v|^2\,(|v|^2-|u|^2) - (v-u,\, v)\,|u|\,(|u| + |v|)}{|u|\,|v|^3(|u| + |v|)}$$

$$= \frac{((v-u,\, u+v) - 2(v-u,v))\,|u|^2 + (v-u,\, u+v)(|v|^2-|u|^2) - (v-u,v)(|u||v| - |u|^2)}{|u|\,|v|^3\,(|u| + |v|)}$$

$$= \frac{|v-u|^2}{|v|^3}\,\frac{|u|}{|u|+|v|} - \frac{(v-u,\, u+v)^2}{|v|^3|u|(|u|+|v|)} - \frac{(v-u,\, v)\,(v-u,\, v+u)}{|v|^3(|u| + |v|)^2} \quad .$$

LEMME 6 : L'opérateur

$$A\,q(y) = \int_\Gamma \frac{q(x)}{|x-y|^{2-\varepsilon}}\, d\Gamma$$

est continu de $L^2(\Gamma)$ *dans* $H^\varepsilon(\Gamma)$ *, pour tout réel* ε *positif.*

Démonstration : Nous renvoyons à SEELEY [3] , pour ce résultat classique sur les opérateurs pseudo-différentiels sur des variétés compactes. ■

Etablissons, alors, l'inégalité (3.9) :

$$a_h(q_h,q'_h)-a_h^*(q_h,q'_h) = \sum_{T\in\mathcal{C}_h}\sum_{T'\in\mathcal{C}_h}\frac{1}{4\pi}\left[\int_T\int_{T'}\frac{q_h(s)\,q'_h(t)\,J(F_T(s))\,J(F_{T'}(t))}{|F_T(s)-F_{T'}(t)|}\,ds\,dt\right.$$

$$\left. -\int_T\int_{T'}\frac{q_h(s)\,q'_h(t)\,J^*(F_T(s))\,J^*(F_{T'}(t))}{N^*(s,t)}\,ds\,dt\right]$$

Nous séparons en deux termes. D'une part :

$$\left|\sum_{T\in\mathcal{C}_h}\sum_{T'\in\mathcal{C}_h}\int_T\int_{T'}\frac{q_h(s)\,q'_h(t)\,\left(J(F_T(s))\,J(F_{T'}(t))-J^*(F_T(s))\,J^*(F_{T'}(t))\right)}{|F_T(s)-F_{T'}(t)|}\,ds\,dt\right|$$

$$\leq C\,h^3\int_{\Gamma_h}\int_{\Gamma_h}\frac{|q_h(x)|\,|q'_h(y)|}{|x-y|}\,dx\,dy \leq C\,h^3\,\|\tilde{q_h}\|_{L^2(\Gamma)}\,\|\tilde{q'_h}\|_{L^2(\Gamma)}\,.$$

D'autre part :

$$\left|\sum_{T\in\mathcal{C}_h}\sum_{T'\in\mathcal{C}_h}\int_T\int_{T'}q_h(s)\,q'_h(t)\,J^*(F_T(s))\,J^*(F_{T'}(t))\left(\frac{1}{|F_T(s)-F_{T'}(t)|}-\frac{1}{N^*(s,t)}\right)ds\,dt\right|$$

$$\leq C\sum_{T\in\mathcal{C}_h}\sum_{T'\in\mathcal{C}_h}\int_T\int_{T'}\frac{|q_h(s)\,q'_h(t)\,J^*(F_T(s))\,J^*(F_{T'}(t))|\,|F_T(s)-B_T(s)-F_{T'}(t)+B_{T'}(t)|^2}{|B_T(s)-B_{T'}(t)|^3}\,ds\,dt$$

Nous utilisons, alors, les inégalités suivantes, qui résultent du Lemme 3 :

$$|F_T(s)-B_T(s)| \leq C\,h^2$$

$$|F_T(s)-B_T(s)-F_{T'}(t)+B_{T'}(t)| \leq C\,h\,|B_T(s)-B_{T'}(t)|$$

D'où :

$$\frac{|F_T(s)-B_T(s)-F_{T'}(t)+B_{T'}(t)|^2}{|B_T(s)-B_{T'}(t)|^3} \leq \frac{C\,h^{3-\varepsilon}}{|B_T(s)-B_{T'}(t)|^{2-\varepsilon}}$$

Le dernier terme de $a_h - a_h^*$ se majore donc par (d'après les Lemmes 5 et 6) :

$$C \int_\Gamma \int_\Gamma \frac{|\tilde{q_h}(x)||\hat{q^\gamma}_h(y)|}{|x-y|^{2-\varepsilon}}\, dx\, dy \leq C_\varepsilon\, h^{3-\varepsilon}\, \|\tilde{q_h}\|_{L^2(\Gamma)}\, \|\hat{q^\gamma}_h\|_{L^2(\Gamma)}.$$

Démontrons (3.7) et (3.8). Comme pour le Théorème 2.2, il faut, d'abord, estimer la quantité :

$$\|q - q_h^*\, J(\Psi^{-1})\|_{H^{-1}(\Gamma)}$$

ce qui se fait, exactement de la même façon, que pour le Théorème 2.2.

D'où :

$$\|q-q_h^*\, J(\Psi^{-1})\|_{H^{-1}(\Gamma)} \leq C_\varepsilon \left[\|u_0-\tilde{u_{0h}}\|_{L^2(\Gamma)} + \sqrt{h}\, \|u_0-\tilde{u_{0h}}\|_{H^{1/2}(\Gamma)} + h^{3-\varepsilon}\, \|q\|_{L^2(\Gamma)}\right]$$

Nous avons :

$$u(y)-u_h^*(y) = \frac{1}{4\pi}\left(\int_\Gamma \frac{q(x)}{|x-y|}\, dx - \int_{\Gamma_h^*} \frac{q_h^*(x)}{N^*(x,y)}\, \varphi^*(x)\, dx\right) = \frac{1}{4\pi}\int_\Gamma \left(\frac{q(x)}{|x-y|} - \frac{\tilde{q_h}(x)}{N^*(B\circ F^{-1}\circ\Psi^{-1}(x),y)}\, \frac{J^*(F(s))}{J(\Psi\circ F(s))}\, dx\right)$$

avec $\Psi\circ F(s) = x$, F et B étant associées à un élement Γ de $\mathcal{T}_h$, que nous omettrons de noter.

Nous décomposons, alors, l'erreur en les trois termes suivants :

$$u(y)-u_h^*(y) = \frac{1}{4\pi}\int_\Gamma \frac{q(x)-\tilde{q_h^*}(x)\, J(\Psi^{-1})(x))}{|x-y|}\, dx + \frac{1}{4\pi}\int_\Gamma \frac{\tilde{q_h^*}(x)\,(J(F(s))-J^*(F(s)))}{|x-y|\;J(\Psi\circ F(s))}\, dx$$

$$+ \frac{1}{4\pi}\int_\Gamma \frac{\tilde{q_h}(x)\, J^*(F(s))}{J(\Psi\circ F(s))}\left(\frac{1}{|x-y|} - \frac{1}{N^*(B\circ F^{-1}\circ\Psi^{-1}(x),y)}\right) dx$$

Les deux premiers termes se majorent, alors, comme dans le cas du Théorème 2.2.

Le dernier terme se majore par :

$$C \int_{\Gamma} |\tilde{q_h}(x)| \left| \frac{1}{|x-y|} - \frac{1}{N^*(B\circ F^{-1}\circ\Psi^{-1}(x),y)} \right| dx \quad .$$

Or, si $s = (\Psi \circ F)^{-1}(x) \in T$, nous avons :

$$\frac{1}{|x-y|} - \frac{1}{N^*(B\circ F^{-1}\circ\Psi^{-1}(x),y)} = \frac{1}{|\Psi\circ F_T(s)-y|} - \frac{1}{|B_T(s)-y|} + \frac{(F_T(s)-B_T(s),\ B_T(s)-y)}{|B_T(s)-y|^3}$$

$$= \frac{1}{|\Psi\circ F_T(s)-y|} - \frac{1}{|F_T(s)-y|} + \frac{1}{|F_T(s)-y|} - \frac{1}{|B_T(s)-y|} \cdot \frac{(F_T(s)-B_T(s),\ B_T(s)-y)}{|B_T(s)-y|^3}$$

que l'on majore, en utilisant les Lemmes 3 et 5, par :

$$\frac{C\,h^3}{|F_T(s)-y|^2} + \frac{C\,h^4}{|B_T(s)-y|^3} \quad .$$

En regroupant ces résulats, on en déduit (3.7).

Evaluons, enfin, la différence : grad u - grad u_h^* .

$$\text{grad } u\ (y) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \frac{q(x)\ (x-y)}{|x-y|^3}\ dx$$

$$\text{grad } u_h^*(y) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma^*} \frac{q_h^*(x)\,\varphi^*(x)}{|x-y|^3}\ (x-y+F_T(B_T^{-1}(x))+3\frac{(F_T(B_T^{-1}(x))-x,x-y)}{|x-y|^2}y-x.dx$$

On transforme la dernière intégrale en une intégrale sur Γ par l'application $\Psi \circ F \circ B^{-1}$:

$$\text{grad } u_h^*(y) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \frac{\tilde{q_h^*}(x)\ J^*(F_T(s))}{J(\Psi\circ F_T(s))} \left[\frac{F_T(s)-y}{|B_T(s)-y|^3} + 3\frac{(F_T(s)-B_T(s),B_T(s)-y)}{|B_T(s)-y|^5} B_T(s)-B_T(s).dx \right]$$

avec $x = \Psi \circ F_T(s)$; $T \in \mathcal{T}_h$.

On décompose encore la différence en trois termes, et le dernier de ces termes à majorer fait intervenir la quantité :

$$\frac{\Psi\circ F_T(s) - y}{|\Psi\circ F_T(s) - y|^3} - \frac{F_T(s) - y}{|B_T(s) - y|^3} - 3\,\frac{(F_T(s) - B_T(s),\ B_T(s) - y).(y - B_T(s))}{|B_T(s) - y|^5}$$

$$= \frac{\Psi\circ F_T(s)-y}{|\Psi\circ F_T(s)-y|^3} - \frac{F_T(s)-y}{|F_T(s)-y|^3} + (F_T(s)-y)\left(\frac{1}{|F_T(s)-y|^3} - \frac{1}{|B_T(s)-y|^3} + \frac{3(F_T(s)-B_T(s),\ B_T(s)-v)}{|B_T(s) - y|^3}\right)$$

$$- 3\,\frac{(F_T(s)-B_T(s),\ B_T(s)-y)\,(F_T(s)-B_T(s))}{|B_T(s) - y|^5}\ .$$

La majoration finale résulte, alors, du fait que, si $|v| \leq C\,|u|$, on a aussi :

$$\left| \frac{1}{|u|^3} - \frac{1}{|v|^3} - \frac{3(v-u,\ v)}{|v|^5} \right| \leq C\ \frac{|v-u|^2}{|v|^5}\ .$$

(démonstration analogue à celle du Lemme 5). ■

Remarque : La fonction u_h^* construite est harmonique en dehors de Γ_h^*. Elle n'est pas définie pour y sur Γ_h^*, car l'intégrale correspondante a un noyau en $\frac{1}{|x - y|^3}$ non intégrable. Il y a donc peu d'espoir d'obtenir une estimation d'erreur globale entre u et u_h^*.

CONCLUSION

Il résulte, de notre étude, que si l'on approxime, par éléments finis d'ordre k, la surface Γ, et par éléments finis d'ordre m, la fonction à approcher, les deux termes d'erreur seront du même ordre pour $k = m+1$. Mme LEROUX [L] a obtenu un résultat analogue si le noyau est $\log r$ dans le cas d'une équation intégrale sur une courbe fermée de R^2. Les résultats numériques semblent confirmer son résultat. Dans notre cas, des études numériques sont en cours.

Nous renvoyons à diverses études de M. LACHAT sur l'utilisation des méthodes d'éléments finis, dans les équations intégrales, pour le cas de l'élasticité.

Nous renvoyons, enfin, aux différents travaux de J.L. HESS qui décrivent des méthodes d'éléments finis pour résoudre le potentiel de simple couche, mais en vue de résoudre un problème extérieur de Neumann. Il n'obtient pas, à notre connaissance, une analyse de l'erreur.

BIBLIOGRAPHIE

[A] J. H. ARGYRIS : "Energy theorems and structural analysis." - Butterworths Scientific Publications - London - 1971.

[B.B.] P.L. BUTZER, H. BERENS : "Semi-groups of operators and approximations." - Springer Verlag - Berlin - 1967.

[C.R.1] P.G. CIARLET, P.A. RAVIART : "General Lagrange and Hermite interpolation in R^n with applications to finite element methods." - Arch. Rat. Mech. Anal., 46 (1972), 177-199.

[C.R.2] P.G. CIARLET, P.A. RAVIART : "Interpolation theory over curved elements with applications to finite element methods." - Comp. Meth. in Appl. Mech. and Eng., 1, (1972), 217-249.

[C] P.G. CIARLET : "La méthode des éléments finis appliquée aux coques." - LABORIA - Rapport de Recherche N° 113 - 1975.

[Cr] T.A. CRUSE : "Application of the boundary integral equation method to three-dimensional stress analysis." - Computers Structury, 3 (1973), 509.

[D.L.] M. DUBOIS, J.C. LACHAT : "The integral formulation of boundary value problems. Variational methods in engineering." - University of Southampton - 1972 - 989.

[H] B. HANOUZET : "Espace de Sobolev avec poids. Application au problème de Dirichlet dans un demi-espace. " - Rend. del Semin. Math. della Univ. di Padova, XLVI (1971), 247-272.

[H.1] J.L. HESS : "Review of integral equation techniques for solving potential flow problems with emphasis on the surface source method." - Comp. Meth. in Appl. Mech. and Eng., 5 (1975), 145-196.

[H.2] J.L. HESS : "Improved solution for potential flow about arbitrary axisymmetric bodies by the use of a higher-order surface source method." Comp. Meth. in Appl. Mech. and Eng., 5 (1975), 297-308.

[H.S.] J.L. HESS, A.M.O. SMITH : "Calculation of nonlifting potential flow about arbitrary three-dimensional bodies." - J. of Ship Resarch, 8 (1964), 22-44.

[Ho] HORMANDER : "Linear partial differential operators." - Springer Verlag - Berlin - 1963.

[K] V.D. KUPRADZE : "Potential methods in the theory of elasticity." - Darvey - 1965.

[L] J.L. LACHAT : "Application de la méthode des éléments finis à l'élasticité plande et aux corps de révolution." - Mémoires Techniques du C.E.T.I.M., N° 9 (Sept. 1971).

[L.F.] J. LELONG-FERRAND : "Géométrie différentielle." - Masson - Paris - 1963.

[L.1] M.N. LEROUX : "Equations intégrales pour le problème du potentiel électrique dans le plan." - C.R.A.S. - Paris - Série Math. (A) T. 278 (18.02.1974), 541-544.

[L.2] M.N. LEROUX : "Résolution numérique du problème du potentiel dans le plan par une méthode variationnelle d'éléments finis." - Thèse de 3ème Cycle - Université de Rennes - 1974.

[L.M.] J.L. LIONS, E. MAGENES : "Problèmes aux limites non homogènes." - T. 1 - Dunod - Paris - 1968.

[M] S.G. MIKHLIN : "Linear integral equations." - T. 2 - Gordon and Breach, Science Publ. Inc. - New York - 1960.

[N.P.] J.C. NEDELEC, J. PLANCHARD : "Une méthode variationnelle d'éléments finis pour la résolution numérique d'un problème exterieur dans R^3." R.A.I.R.O., 7 (1973), R3, 105-129.

[S] R. SEELEY : Cours C.I.M.E - Stresa, 1968 - Ed. Cremonese - Roma - 1969.

[St] A.H. STROUD : "Approximate calculation of multiple integrals." - Prentice Hall Inc. - 1972.

[Z] O.C. ZIENKIEWICZ : "The finite element method in engineering science." - Mc Graw Hill - London - 1971.