PUBLICATIONS MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUES DE RENNES

J. COUOT

Décomposition des champs de vecteurs, application à la mécanique des fluides de la méthode des éléments finis

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1975, fascicule S3
« Journées « éléments finis » », , p. 1-19

<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1975___S3_A1_0>

© Département de mathématiques et informatique, université de Rennes, 1975, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications mathématiques et informatiques de Rennes » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

JOURNEES "ELEMENTS FINIS" DE RENNES

(les 12, 13 et 14 Mai 1975)

Conférencier : J. COUOT (U.E.R. Mathématiques, Toulouse, Sup'Aero).

Titre de la Conférence :

DECOMPOSITION DES CHAMPS DE VECTEURS, APPLICATION A LA MECANIQUE DES FLUIDES DE LA METHODE DES ELEMENTS FINIS.

- Université de Toulouse - Département de Mathématiques
  118, Route de Narbonne
  31077 TOULOUSE CEDEX

- SUP'AERO : Ecole Nationale Superieure de l'Aéronautique
  et de l'Espace.
  B.P. 4032
  1C, Avenue Edouard Belin
  31055 TOULOUSE CEDEX

1 - INTRODUCTION

De façon générale, on s'intéresse à la résolution numérique par la méthode des éléments finis des équations de l'aérodynamique dans un domaine Ω à deux dimensions dont une partie de la frontière $\partial\Omega$ représente des obstacles à l'écoulement. En particulier, on cherche à obtenir une bonne approximation du champ $\vec{V}$ des vitesses des particules fluides.
Dès lors des problèmes de représentation se posent: on choisit ici la représentation des particules fluides en coordonnées eulériennes $x \equiv (x_1, x_2) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$. On sait "fermer" un système d'équations aux dérivées partielles permettant de déterminer $\vec{V}$: le système de Navier-Stokes comprenant les équations de conservation de la masse, de la quantité de mouvement, de l'énergie et les équations d'état thermodynamique du fluide, les lois de comportement rhéologique du fluide, les lois relatives aux échanges thermiques. Ces équations font intervenir des inconnues auxilliaires telles que la pression p, la masse spécifique ρ, la température T (ou l'enthalpie, l'entropie, l'énergie interne). Elles sont complétées par des conditions aux limites essentielles pour assurer que le problème mathématique est "bien posé" ([11], [8]). La résolution du système est difficile car le problème est non linéaire et fait intervenir divers types d'opérateur : diffusion, convection. Pour différents cas particuliers des méthodes non linéaires ([1]) peuvent être mises en oeuvre apres une reformulation variationnelle des problèmes ([6], [7]).

De façon particulière ici (cf. 2), on montre qu'indépendamment de toute équation, un champ de vecteur de carré sommable $\vec{V} \in [L^2(\Omega)]^2$, c'est à dire un couple (v_1, v_2) de fonctions de $L^2(\Omega)$ peut être décrit à l'aide d'autres couples de fonctions et ceci de façon régulière au sens de la théorie de l'approximation pourvu que $\vec{V}$ ait au moins des dérivées partielles du premier ordre de carré sommable, $\vec{V} \in [H^1(\Omega)]^2$, (cf. [11]) , et que le domaine Ω soit assez regulier pour que les traces de $\vec{V}$ sur $\partial\Omega$ soit des distributions de régularité convenable (la composante normale de $\vec{V}$ sur $\partial\Omega$, par exemple, soit $\vec{V}.\vec{n}\,|_{\partial\Omega}$, est un élément de $H^{1/2}(\partial\Omega)$, cf [11] , [8]).

Ainsi la donnée de $\vec{V} \in [H^1(\Omega)]^2$ est au sens de la théorie de l'approximation et par là même en ce qui concerne les méthodes des éléments finis ([2] , [12] , [3] , [9] , [10]) équivalente à la donnée du couple $\operatorname{div} \vec{V} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \in L^2(\Omega)$,
$\operatorname{rot} \vec{V} = \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \in L^2(\Omega)$, diverses données frontières telles que $V|_{\partial\Omega} \in [H^{1/2}(\Omega)]^2$
Ou encore à la donnée d'un couple $(\varphi, \psi) \in H^2(\Omega)/\mathbb{R}$
(fonctions numériques définie à une constante additive près et ayant des dérivées partielles jusqu'à l'ordre 2 de carré sommable.)
tel que $\vec{V} = \nabla\varphi + \operatorname{curl}\psi$, où $\nabla\varphi = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}, \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\right)$
et $\operatorname{curl}\psi = \left(\frac{\partial\psi}{\partial x_2}, -\frac{\partial\psi}{\partial x_1}\right)$.

Cette dernière équivalence est établie à l'aide de la résolution de problèmes de Poisson avec conditions aux limites de type Dirichlet ou de type Newmann (de type mixte au niveau des applications) : problèmes bien posés au sens de LIONS et MAGENES ([8]) et dont la résolution par la méthode des éléments finis a été assez complètement étudiée (cf. [2] , [9] , [10] , [12]).

Notre étude introduit de façon essentielle une décomposition de l'énergie cinétique (cf [7]), et indique que les composantes $L^2(\Omega)$ - orthogonales du champ $\vec{V}$ sont associées à des opérateurs différentiels (div, rot) et des conditions aux limites (flux, circulation) bien précis.
On rencontre, à ce niveau, la nécessité des conditions d'obstacles (circulation) bien connues des aérodynamiciens (conditions de Kutta-Joukowski).

Nous donnons ensuite (cf 3) des indications sur deux résolutions d'écoulements permanents d'un fluide parfait (un cas compressible irrotationnel et un cas incompressible rotationnel) dont la structure mathématique est analogue et a pu être ramenée à l'optimisation d'une fonctionnelle convexe sur un domaine convexe de $[H^1(\Omega)]^2$. (cf. [4], [5]) .

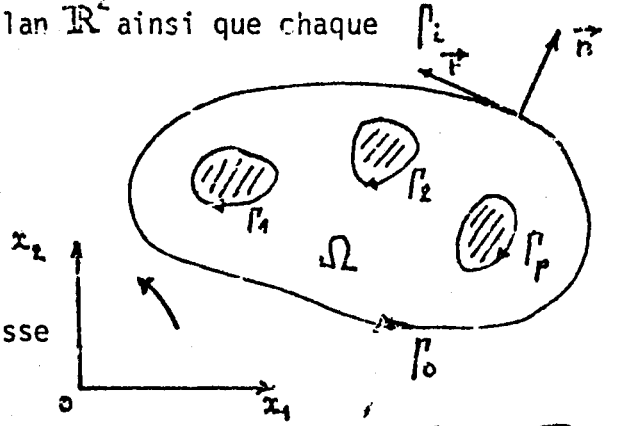
2 - ANALYSE ENERGETIQUE D'UN CHAMP DE VECTEURS BIDIMENSIONNEL SUR UN DOMAINE DE $\mathbb{R}^2$ BORNE ET MULTIPLEMENT CONNEXE.

Soit $x \equiv (x_1, x_2) \quad \in \mathbb{R}^2$.

On se donne un domaine Ω de $\mathbb{R}^2$, borné et multiplement connexe d'ordre $p > 0$. On suppose sa frontière $\partial\Omega$ régulière et on désigne par Γ_i , $i = 0, p$, ses composantes connexes : $\partial\Omega = \bigcup_{i=0}^{p} \Gamma_i$.

On oriente le plan $\mathbb{R}^2$ ainsi que chaque Γ_i conformément à la figure.

$\vec{t}$ et $\vec{n}$ désignent les vecteurs unitaires portés respectivement par la tangente positive et la normale extérieure en un point de $\partial\Omega$. s désigne l'abscisse curviligne le long de Γ_i .



On considère par la suite un champ de vecteurs $\Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ soit $\vec{V} \equiv (v_1, v_2)$, dont chaque composante v_j, $j=1, 2$, est élément de $H^1(\Omega)$:

$$\vec{V} \in \left[H^1(\Omega) \right]^2 \quad .$$

2 - 1 - Opérateurs linéaires sur les champs.

Les opérateurs différentiels $\frac{\partial}{\partial x_j}$, $j = 1,2$ sont linéaires et continus de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$. Les opérateurs de trace (restriction à Γ_i) sont linéaires et continus de $H^1(\Omega)$ dans $H^{1/2}(\Gamma_i) \subset L^2(\Gamma_i)$. On a alors linéarité et continuité des opérateurs suivants :

$$\text{div} : \quad \vec{V} \in \left[H^1(\Omega)\right]^2 \rightsquigarrow \quad \text{div}\,\vec{V} \equiv \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial V_i}{\partial x_i} \in L^2(\Omega) ,$$

$$\text{rot} : \quad \vec{V} \in \left[H^1(\Omega)\right]^2 \rightsquigarrow \quad \text{rot}\,\vec{V} \equiv \frac{\partial V_2}{\partial x_1} - \frac{\partial V_1}{\partial x_2} \in L^2(\Omega) ,$$

$$\gamma_n : \quad \vec{V} \in \left[H^1(\Omega)\right]^2 \rightsquigarrow \quad \gamma_n \vec{V} \equiv \vec{V}.\vec{n}\,\big|_{\partial\Omega} \in H^{1/2}(\partial\Omega) ,$$

$$\gamma_t : \quad \vec{V} \in \left[H^1(\Omega)\right]^2 \rightsquigarrow \quad \gamma_t \vec{V} \equiv \vec{V}.\vec{t}\,\big|_{\partial\Omega} \in H^{1/2}(\partial\Omega) ,$$

$$\gamma_{\Gamma_i} : \quad \vec{V} \in \left[H^1(\Omega)\right]^2 \rightsquigarrow \quad \gamma_{\Gamma_i}(\vec{V}) \equiv \int_{\Gamma_i} \vec{V}.\vec{t}\, ds \in \mathbb{R} ,$$

$$\Phi_{\Gamma_i} : \quad \vec{V} \in \left[H^1(\Omega)\right]^2 \rightsquigarrow \quad \Phi_{\Gamma_i}(\vec{V}) \equiv \int_{\Gamma_i} \vec{V}.\vec{n}\, ds \in \mathbb{R} .$$

Ceux-ci représentent respectivement la "divergence", le "rotationnel", la "composante normale" et "tangentielle" à la frontière, la "circulation" sur Γ_i, le "flux" à travers Γ_i du champ $\vec{V}$.

On a les relations suivantes :

$$\int_\Omega \text{rot}\,\vec{V}\, dx = \int_{\partial\Omega} \gamma_t \vec{V}\, ds \quad , \quad \int_\Omega \text{div}\,\vec{V}\, dx = \int_{\partial\Omega} \gamma_n \vec{V}\, ds \; ;$$

$$\int_{\partial\Omega} \gamma_t \vec{V}\, ds = \sum_{i=0}^{P} \gamma_{\Gamma_i}(\vec{V}) \; \left(= \gamma_{\partial\Omega} \vec{V}\right) , \quad \int_{\partial\Omega} \gamma_n \vec{V} = \sum_{i=0}^{P} \Phi_{\Gamma_i}(\vec{V}) \; \left(= \Phi_{\partial\Omega} \vec{V}\right) .$$

On remarque que $\left[H^1(\Omega)\right]^2$ est dense dans $\left[L^2(\Omega)\right]^2$ et qu'on peut définir l'orthogonalité suivante :

$$\vec{V}, \vec{W} \in \left[H^1(\Omega)\right]^2 , \quad \vec{V} \perp \vec{W} \quad \text{si} \quad \int_\Omega \vec{V}.\vec{W}\, dx = 0$$

(où $\vec{V}.\vec{W} \equiv v_1 w_1 + v_2 w_2$) .

2 - 2 -Trois sous-espaces vectoriels de $[H^1(\Omega)]^2$ orthogonaux dans $[L^2(\Omega)]^2$.

2 - 2 - 1 -Un sous-espace de $[L^2(\Omega)]^2$: $G(\Omega)$.

Pour toute fonction scalaire (réelle) φ définie à une constante additive près et assez régulière, on sait associer son gradient $\nabla\varphi \equiv \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}, \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\right)$.
Plus précisément, on a un opérateur linéaire continu

$$\nabla : \quad \varphi \in H^1(\Omega)/\mathbb{R} \longmapsto \nabla\varphi \in [L^2(\Omega)]^2$$

grâce à l'inégalité

$$\|\nabla\varphi\|_{[L^2(\Omega)]^2} \leq \|\varphi\|_{H^1(\Omega)/\mathbb{R}} .$$

On introduit $G(\Omega) \equiv \left\{\nabla\varphi ;\ \varphi \in H^1(\Omega)/\mathbb{R}\right\}$ sous-espace de $[L^2(\Omega)]^2$.

On a les propriétés suivantes :

1°) $\vec{V} \in G(\Omega) \cap [H^1(\Omega)]^2 \Longleftrightarrow \vec{V} \in [H^1(\Omega)]^2$ et $\operatorname{rot}\vec{V} = 0$,
$\gamma_{\Gamma_i}(\vec{V}) = 0$, $i = 0, p$.

2°) $\vec{W} \in G(\Omega)^{\perp} \cap [H^1(\Omega)]^2 \Longleftrightarrow \vec{W} \in [H^1(\Omega)]^2$, et
$\int_\Omega \vec{W}.\vec{\nabla\varphi}\, dx = 0$, $\forall \varphi \in H^1(\Omega)/\mathbb{R}$

$\Longleftrightarrow \vec{W} \in [H^1(\Omega)]^2$ et $-\int_\Omega \operatorname{div}\vec{W}.\varphi\, dx + \int_{\partial\Omega} \vec{W}.\vec{n}\,\varphi\, ds = 0$,
$\forall \varphi \in H^1(\Omega)/\mathbb{R}$

$\Longleftrightarrow \vec{W} \in [H^1(\Omega)]^2$ et $\operatorname{div}\vec{W} = 0$, $\gamma_n \vec{W} = 0$

$\Longleftrightarrow \exists!\ \psi \in H^2(\Omega)/\mathbb{R}$, $\psi|_{\Gamma_i} = c^{te}$ p. p.

tel que $\vec{W} = \operatorname{curl}\psi \quad \left(= \left(\frac{\partial\psi}{\partial x_2}, -\frac{\partial\psi}{\partial x_1}\right)\right)$.

En particulier, il vient

$$G(\Omega)^{\perp} \cap \left[H^1(\Omega)\right]^2 = \left\{ \operatorname{curl} \psi \, ; \, \psi \in H^2(\Omega)/\mathbb{R} \, , \, \psi_{\Gamma_i} = C^{te}, \, i = 0, p \right\}$$

On établit ces résultats par densité en utilisant le fait que $\operatorname{rot} \vec{V} = 0$ et $\operatorname{div} \vec{W} = 0$ sont les conditions d'intégrabilité des formes différentielles respectives $u_1 \, dx_1 + u_2 \, dx_2 \; (= d\rho)$ et $-w_2 \, dx_1 + w_1 \, dx_2 \quad (= d\psi)$.

L'unicité de ψ est assurée par les propriétés du prochain paragraphe.

2 - 2 - 2 - Un sous-espace de dimension finie de $\left[L^2(\Omega)\right]^2$ et de $G(\Omega)^{\perp}$

On introduit un sous-espace de dimension p (ordre de multiple connexité de Ω) de $\left[H^1(\Omega)\right]^2$ et de $G(\Omega)^{\perp}$ soit

$$C(\Omega) = \left\{ \vec{W} = \operatorname{curl} \chi \, ; \, \chi \in H^2(\Omega)/\mathbb{R} \, , \, \Delta \chi = 0, \, \chi|_{\Gamma_i} = C^{te}, \, i = 0, p \right\} .$$

On a la caractérisation suivante :

$$\vec{W} \in C(\Omega) \Longleftrightarrow \vec{W} \in \left[H^1(\Omega)\right]^2 \text{ et } \operatorname{div} \vec{W} = \operatorname{rot} \vec{W} = 0 \, , \, \gamma_n \vec{W} = 0 \, .$$

Ainsi tout élément de $C(\Omega)$ est entièrement déterminé par les valeurs de p formes linéaires continues linéairement indépendantes .

Exemple : Pour $W \in C(\Omega)$, on a

$$\gamma_{\Gamma_i}(\vec{W}) = \int_{\Gamma_i} \vec{W} \cdot \vec{t} \, ds = - \int_{\Gamma_i} \frac{\partial \chi}{\partial n} \, ds \quad , \quad i = 0, p \; ;$$

$\gamma_{\Gamma_i} \, , \, i = 0, p$ engendrent le dual de $C(\Omega)$:

$\left(\gamma_{\Gamma_i} \, , \, i = 1, p \right)$ est donc $C(\Omega)$-unisolvent.

Remarque : Ce système correspondra aux conditions dites de Kutta-Joukowski en aérodynamique des fluides parfaits .

Autre caractérisation de $\mathbb{C}(\Omega)$

$$\left\{\begin{array}{l}\vec{W}\in\mathbb{C}(\Omega)\\ \text{et}\\ \gamma_{\Gamma_i}(\vec{W})=c_i\\ i=1,p\,.\end{array}\right\}\Longleftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\exists!\ \tilde{\varphi}\in C^2_{loc}(\Omega)/\mathbb{R}\ ,\\ \Delta\tilde{\varphi}=0\,,\ \left.\dfrac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial n}\right|_{\partial\Omega}=0\\ \text{et}\ \int_{\Gamma_i}d\tilde{\varphi}=c_i\ ,\ i=1,p.\end{array}\right\}$$

2 - 2 - 3 - Etude du supplémentaire de $\mathbb{G}(\Omega)\oplus\mathbb{C}(\Omega)$: $\mathbb{C}'(\Omega)$

On a d'abord les caracterisations suivantes :

$$\vec{W}\in\mathbb{G}^{\perp}(\Omega)\cap\left[H^1(\Omega)\right]^2\Longleftrightarrow\vec{W}\in\left[H^1(\Omega)\right]^2\ \text{et}\ \left|\begin{array}{l}\operatorname{div}\vec{W}=0\,,\\ \gamma_n\vec{W}=0.\end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow\vec{W}=\operatorname{curl}\psi\,,\ \psi\in H^2(\Omega)/\mathbb{R}\,,\ \psi|_{\Gamma_i}=c^{te}\ ;$$

puis :

$$\vec{W}\in\left[\mathbb{C}(\Omega)\right]^{\perp}\cap\left[H^1(\Omega)\right]^2\Longleftrightarrow\vec{W}\in\left[H^1(\Omega)\right]^2\ \text{et}\ \int_\Omega\vec{W}.\operatorname{curl}\chi\,dx=0$$

où $\chi\in H^2(\Omega)/\mathbb{R}\ ,\ \Delta\chi=0\ ,\ \chi|_{\Gamma_i}=c^{te}\,,\ i=0,p$

$$\Longleftrightarrow\vec{W}\in\left[H^1(\Omega)\right]^2,\ \sum_{i=0}^{p}\chi|_{\Gamma_i}\gamma_{\Gamma_i}(\vec{W})=\int_\Omega\operatorname{rot}\vec{W}\ \chi\,dx$$

où $\chi\in H^2(\Omega)/\mathbb{R}\ ,\ \Delta\chi=0.\,,\ \chi|_{\Gamma_i}=c^{te}\,,\ i=0,p\,.$

Introduisons alors un système générateur de $\mathbb{C}(\Omega)$, soit $\chi_i\,,\ i=0,p$ où $\Delta\chi_i=0$ avec $\chi_i|_{\Gamma_j}=\delta_{ij}$ (symbole de Kronecker), $\chi_i\in C^\infty(\Omega)$.

Dans la suite, nous noterons $\mathbb{C}'=\left[\mathbb{G}(\Omega)\oplus\mathbb{C}(\Omega)\right]^{\perp}$

Il vient alors les caractérisations suivantes :

$$w \in \mathcal{C}(\Omega) \cap [H^1(\Omega)]^2 \iff \exists!\, \psi \in H^2(\Omega)/\mathbb{R} \ ,$$

$$\text{avec} \int_\Omega \operatorname{curl}\psi \cdot \operatorname{curl}\chi_i \, dx = 0 \ , \ i = 0, p \ \text{ et } \vec{W} = \operatorname{curl}\psi$$

$$\iff \exists!\, \psi \in H^2(\Omega)/\mathbb{R}$$

$$\text{avec} \sum_{i=0}^{p} \gamma|_{\Gamma_i} \gamma_{\Gamma_k}(\overrightarrow{\operatorname{curl}}\chi_j) = 0 \ , \ j = 0, p \ \text{ et } \vec{W} = \operatorname{curl}\psi$$

$$\iff \exists!\, \psi \in H^2(\Omega)/\mathbb{R}$$

$$\text{avec} \quad \psi|_{\Gamma_i} - \psi|_{\Gamma_0} = 0 \ , \ i = 1, p \ \text{ et } \quad \vec{W} = \operatorname{curl}\psi$$

$$\iff \exists!\, \psi \in H^2(\Omega)/\mathbb{R}$$

$$\text{avec} \quad \psi|_{\partial\Omega} = C^{te} \quad \text{et } \vec{W} = \operatorname{curl}\psi \ .$$

Alors, $\gamma_{\Gamma_i}(\vec{W}) = -\int_{\Gamma_i} \frac{\partial\psi}{\partial n} \, ds = \int_\Omega \operatorname{rot}\vec{W} \cdot \chi_i \, dx$

sont diverses représentations équivalentes de la circulation du champ $\vec{W}$ le long de chaque Γ_i , $i = 0, p$ lorsque

$$\vec{W} \in \mathcal{C}(\Omega) \cap [H^1(\Omega)]^2 \ .$$

2 - 3 - Décomposition de $\vec{V} \in [H^1(\Omega)]^2$.

Les caractérisations précédentes nous conduisent à la décomposition unique suivante :

$$[H^1(\Omega)]^2 = \left\{ \mathcal{G}(\Omega) \cap [H^1(\Omega)]^2 \right\} \oplus \mathcal{C}(\Omega) \oplus \left\{ \mathcal{L}(\Omega) \cap [H^1(\Omega)]^2 \right\}$$

$$[H^1(\Omega)]^2 \ni \vec{V} = \nabla\varphi + \left\{ \begin{matrix} \operatorname{curl} \chi \\ \text{ou} \\ \nabla\tilde{\varphi} \end{matrix} \right\} + \operatorname{curl} \psi ,$$

où

$$\varphi \in H^2(\Omega)/\mathbb{R} , \quad \psi \in H^2(\Omega)/\mathbb{R} , \quad \left\{ \begin{matrix} \chi \in C^\infty(\bar{\Omega}) \\ \tilde{\varphi} \in C^\infty_{loc}(\bar{\Omega}) \end{matrix} \right\} ;$$

En ce qui concerne les opérateurs div et rot, il vient :

$$\operatorname{div} \vec{V} = \Delta\varphi \quad \text{et} \quad \operatorname{rot} \vec{V} = -\Delta\psi , \quad \text{avec}$$

$$\vec{V} = \underbrace{\nabla\varphi}_{\text{rot nul}} + \underbrace{\left\{ \begin{matrix} \operatorname{curl} \chi \\ \nabla\tilde{\varphi} \end{matrix} \right\} + \operatorname{curl} \psi}_{\text{div nulle}}$$

En ce qui concerne les opérateurs frontières, il vient :

$$\gamma_n \vec{V} = \frac{\partial\varphi}{\partial n} \qquad \left(\int_{\partial\Omega} \gamma_n \vec{V} \, ds = \int_\Omega \operatorname{div} \vec{V} \, dx \right),$$

$$\gamma_t \vec{V} = \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \left\{ \begin{matrix} -\frac{\partial\chi}{\partial n} \\ \text{ou} \\ \frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial t} \end{matrix} \right\} - \frac{\partial\psi}{\partial n} ,$$

$$\gamma_{\Gamma_i}(\vec{V}) = -\int_{\Gamma_i} \frac{\partial\chi}{\partial n} \, ds - \int_{\Gamma_i} \frac{\partial\psi}{\partial n} \, ds , \quad i = 1, p$$

$$\left(-\int_{\Gamma_i} \frac{\partial\psi}{\partial n} \, ds = \int_\Omega \operatorname{rot} \vec{V} . \gamma_i \, dx \right),$$

$$\gamma_{\Gamma_0}(\vec{V}) = \int_\Omega \operatorname{rot} \vec{V} \, dx - \sum_{i=1}^{p} \gamma_{\Gamma_i}(\vec{V}) .$$

2 - 3 - 1 - Détermination de φ par un problème bien posé.

$\vec{V} \in [H^1(\Omega)]^2$ étant donné, pour déterminer la composante $\nabla\varphi \in \mathcal{G}(\Omega) \cap [H^1(\Omega)]^2$, on introduit le problème bien posé suivant :

trouver $\varphi \in H^1(\Omega)/\mathbb{R}$ tel que

$$\begin{cases} \Delta\varphi = \operatorname{div} \vec{V}, \\ \left.\dfrac{\partial\varphi}{\partial n}\right|_{\partial\Omega} = \gamma_n \vec{V}, \end{cases}$$

sachant que $\displaystyle\int_\Omega \operatorname{div} \vec{V}\, dx = \int_{\partial\Omega} \gamma_n \vec{V}\, ds$.

Une formulation faible en est :

trouver $\varphi \in H^1(\Omega)/\mathbb{R}$ tel que

$$\int_\Omega (\vec{\nabla\varphi} - \vec{V}) \cdot \vec{\nabla\theta}\, dx = 0, \quad \forall \theta \in H^1(\Omega)/\mathbb{R}.$$

Une formulation variationnelle équivalente est :

$$\min_{\varphi \in H^1(\Omega)/\mathbb{R}} \left[\frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla\varphi|^2 dx - \int_\Omega \vec{V} \cdot \vec{\nabla\varphi}\, dx \right].$$

Remarque : Ces problèmes trouvent la composante $[\nabla\varphi]$ de $\vec{V} \in [H^1(\Omega)]^2$ qui soit de rotationnel nul et de circulation nulle sur chaque Γ_i, $i = 0, p$.

2 - 3 - 2 - Détermination de χ.

Théoriquement (pratiquement, on procède souvent autrement) on suppose connue la suite χ_i, $i = 0, p$, où

$$\Delta\chi_i = 0, \qquad \chi_i\big|_{\Gamma_j} = \delta_{ij}, \text{ puis}$$

- on construit les p nombres $\int_\Omega rot\,\vec{V}.\,\chi_i\,dx$, $i=1,p$
- on choisit alors $\chi \in S_p\left\{\chi_i, i=0,p\right\}$ de telle sorte que

$$\int_{\Gamma_i}\frac{\partial\chi}{\partial n}\,ds = \int_\Omega rot\,\vec{V}.\,\chi_i\,dx - \gamma_{\Gamma_i}(\vec{V}) \quad , \; i=1,p$$

($\mathbb{C}(\Omega)$—unisolvence des formes

$$\chi \longrightarrow \int_{\Gamma_i}\frac{\partial\chi}{\partial n}\,ds\,,\; i=1,p\;).$$

On a, en conséquence :

$$\int_{\partial\Omega}\frac{\partial\chi}{\partial n}\,ds = \int_\Omega rot\,\vec{V}\,dx - \gamma_t\vec{V} = 0$$

2 - 3 - 3—Détermination de ψ.

On introduit le problème bien posé suivant :

trouver $\psi \in H^1(\Omega)/\mathbb{R}$ tel que

$$\begin{cases}\Delta\psi = -rot\,V\,,\\ \dfrac{\partial\psi}{\partial n} = -\gamma_t\vec{V} + \dfrac{\partial\varphi}{\partial\tau}\Big|_{\partial\Omega} - \dfrac{\partial\chi}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega}\,,\end{cases}$$

sachant que

$$\int_\Omega rot\,\vec{V}\,dx = \int_{\partial\Omega}\gamma_t\vec{V}\,ds \qquad \left(= -\int_{\partial\Omega}\frac{\partial\psi}{\partial\tau}\,ds\right).$$

Une formulation faible équivalente est, avec

$$k = \begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\,,\quad g = \frac{\partial\varphi}{\partial t} - \frac{\partial\chi}{\partial n} \in H^{-1/2}(\partial\Omega),$$

trouver $\psi \in H^1(\Omega)/\mathbb{R}$ tel que

$$\int_\Omega(\vec{\nabla}\psi - k\vec{V}).\vec{\nabla}\theta\,dx - \int_{\partial\Omega} g\,\theta\,ds = 0\,,\quad \forall\,\theta\in H^1(\Omega)/\mathbb{R}\,.$$

Une formulation variationnelle équivalente en est :

$$\min_{\psi\in H^1(\Omega)/\mathbb{R}}\left\{\frac{1}{2}\int_\Omega|\nabla\psi|^2\,dx + \int_\Omega\vec{V}.\vec{curl}\,\psi\,dx - \int_{\partial\Omega} g\psi\,ds\right\}.$$

Remarque : $\mathrm{curl}\,\psi$ est alors la composante de $\vec{V} \in \left[H^1(\Omega)\right]^2$ de divergence nulle et de circulation sur chaque Γ_i, $i = 1, p$ due uniquement à la participation de $\mathrm{rot}\,\vec{V} \neq 0$ dans Ω :

$$\gamma_{\Gamma_i}(\mathrm{curl}\,\psi) = -\int_{\Gamma_i} \frac{\partial \psi}{\partial n}\, ds = \gamma_{\Gamma_i}(\vec{V}) - \gamma_{\Gamma_i}(\mathrm{curl}\,\chi) = \int_\Omega \mathrm{rot}\,\vec{V}.\gamma_{-i}\, dx .$$

2 - 3 - 4 - Exemples de représentations simplifiées.

1er cas : Soit $\vec{V} \in \left[H^1(\Omega)\right]^2$ tel que $\mathrm{div}\,\vec{V} = 0$

et $\vec{V}.\vec{n}\,\big|_{\Gamma_i} = 0$, $i = 1, p$.

Dans ce cas, la composante de $\mathcal{G}(\Omega)$ est déterminée par

$$\Delta\varphi = 0 \quad , \quad \frac{\partial \varphi}{\partial n}\Big|_{\Gamma_0} = \vec{V}.\vec{n}\,\big|_{\Gamma_0} \quad , \quad \frac{\partial \varphi}{\partial n}\Big|_{\Gamma_i} = 0 \qquad \left(\int_{\Gamma_0} \vec{V}.\vec{n}\, ds = 0\right)$$

et on sait que

$$\gamma_{\Gamma_i}(\nabla\varphi) = 0, \quad i = 0, p .$$

Il existe alors un unique $\psi_0 \in H^1(\Omega)/\mathbb{R}$, tel que $\nabla\varphi = \mathrm{curl}\,\psi_0$, qui est déterminé par le problème bien posé suivant :

$$\begin{cases} \Delta\psi_0 = 0 \\ \psi_0\big|_{\Gamma_0}(s) = \displaystyle\int_{s_0}^{s} (\gamma_n \vec{V})(t)\, dt + C^{te} \quad , s \text{ abscisse curviligne sur } \Gamma_0 \ , \\ \psi_0\big|_{\Gamma_i} = c_i \ , \ i = 1, p \ , \text{ où } c_i \text{ sont déterminées par le système unisolvent :} \\ \qquad \displaystyle\int_{\Gamma_i} \frac{\partial \psi}{\partial n}\, ds = 0 \quad , \quad i = 1, p. \end{cases}$$

Ainsi dans ce cas, V est entièrement déterminée par la connaissance d'un $\psi_1 \in H^1(\Omega)/\mathbb{R}$ avec $\vec{V} = \mathrm{curl}\,\psi_1$:

$\psi_1 = \psi_0 + \chi + \psi$, ψ_0, χ, ψ étant eux-mêmes donnés par des problèmes bien posés associés aux conditions aux limites qui conduisent à des composantes curl ψ_0 , curl χ et curl ψ orthogonales (ψ_1 est la fonction de courant des aérodynamiciens).

2ème cas : Soit $\vec{V} \in [H^1(\Omega)]^2$ tel que $\text{rot}\,\vec{V} = 0$. Alors $\vec{V}$ pourra être mis sous la forme $\vec{V} = \vec{\nabla}\varphi_1$, où $\varphi_1 = \varphi + \tilde{\varphi}$, $\tilde{\varphi}$ étant une fonction non uniforme dans Ω . Les sauts de détermination de $\tilde{\varphi}$ sont liés directement à $\gamma_{\Gamma_i}(\vec{V})$, $i = 1, p$:

$$\int_{\Gamma_i} d\tilde{\varphi} = \gamma_{\Gamma_i}(\vec{V})$$

(φ_1 est un "potentiel" non uniforme).

2 - 4 - Résumé des résultats précédents .

Nous allons énoncer un résumé des résultats précédents sans développer la décomposition attachée à la circulation.

Théorème . Tout champ $\vec{V} \in [H^1(\Omega)]^2$ se décompose de la façon unique en deux composantes $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$, $L^2(\Omega)$- orthogonales telles que $\text{rot}\,\vec{V}_1 = 0$, $\gamma_{\Gamma_i}(\vec{V}_1) = 0$, $i = 0, p$, et $\text{div}\,\vec{V}_2 = 0$, $\gamma_n \vec{V}_2 = 0$, (pour les notations cf. 2.1.). Pour chacune de ces composantes $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$, il existe une fonction de $H^2(\Omega)/\mathbb{R}$ (donc définie à une constante additive près) soient φ et ψ respectivement telles que :

$$V_1 = \nabla\varphi = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}, \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\right) \quad \text{et} \quad V_2 = \text{curl}\,\psi = \left(\frac{\partial\psi}{\partial x_2}, -\frac{\partial\psi}{\partial x_1}\right)$$

φ et ψ sont uniquement déterminés par

$$\Delta\varphi = \text{div}\,\vec{V} \ , \quad \frac{\partial\varphi}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega} = \gamma_n \vec{V}$$

et

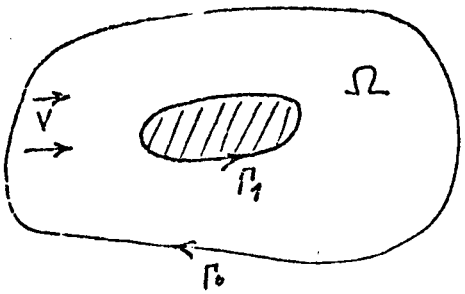
$$\Delta\psi = -\,\text{rot}\,\vec{V} \ , \quad \psi|_{\Gamma_i} = C^{te} \ ,$$

$$\int_{\Gamma_i} \frac{\partial\psi}{\partial n}\, ds = -\,\gamma_{\Gamma_i}(\vec{V}) \ , \quad i = 0, p \ .$$

3 - APPLICATION AU CALCUL D'ECOULEMENTS PERMANENTS D'UN FLUIDE PARFAIT.

3 - 1 — Ecoulement compressible irrotationnel .

Comme premier exemple [4], prenons le cas de l'écoulement permanent autour d'un obstacle d'un fluide parfait compressible. Nous supposons que l'écoulement est irrotationnel : $\mathrm{rot}\,\vec{V} = 0$.



L'entropie du fluide est alors constante. L'équation de conservation de l'énergie indique que l'enthalpie est égal sur une ligne de courant à $-V^2/2+C^{te}$. Ainsi, dans l'hypothèse d'un écoulement isoénergétique, (même Cte pour chaque ligne de courant) pression p et masse spécifique ρ du fluide sont des fonctions de la seule variable $\frac{V^2}{2}$. On a de plus, avec S = Cte, $\frac{dp}{d(\frac{V^2}{2})} = -\rho$. L'équation d'état du fluide permet d'expliciter la fonction pression : $p\left(\frac{V^2}{2}\right)$.

Maintenant, on peut vérifier que, dans les hypothèses précédentes, l'équation de la dynamique est vérifiée tant que l'écoulement est continu. L'équation de la conservation de la masse, $\mathrm{div}\,(\rho\vec{V}) = 0$, demeure la seule relation différentielle à satisfaire. Il faudra encore ajouter des conditions aux limites sur Γ_0 et Γ_1 : ce sont essentiellement les conditions de flux

$$\rho\vec{V}.\vec{n}\,|_{\Gamma_0} = m \quad , \quad \rho\vec{V}.\vec{n}\,|_{\Gamma_1} = 0,$$

avec $\int_{\Gamma_0} m\,ds = 0$, m étant une donnée.

Le champ de vitesse $\vec{V}$, comme le montrent les résultats de décomposition du paragraphe précédent, a une composante nulle dans $\mathcal{V}(\Omega)$. $\mathbb{C}(\Omega)$ est de dimension 1 . Soit alors $\tilde{\varphi}$ une fonction de $C^\infty_{\ell oc}(\Omega)$, non uniforme, telle que $\int_{\Gamma_1} d\tilde{\varphi} = 1$. Posant $\Phi = \varphi + \lambda\tilde{\varphi}$, où $\varphi \in H^2(\Omega)/\mathbb{R}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$; rechercher $\vec{V}$, c'est rechercher φ et λ tels que

$$\vec{V} = \nabla\Phi = \nabla\varphi + \lambda\nabla\tilde{\varphi} . \quad \text{On a} \quad \gamma_{\Gamma_1}(\vec{V}) = \lambda .$$

La forme faible de div $(\rho \vec{V}) = 0 \in L^2(\Omega)$ est

$$0 = \int_\Omega \operatorname{div}(\rho \nabla \phi_I) \theta \, dx \quad , \quad \forall \theta \in L^2(\Omega) .$$

Après intégration par parties, il vient

$$-\int_\Omega \rho \nabla \phi_I . \nabla \theta \, dx + \int_{\partial\Omega} \rho \nabla \phi_I . \vec{n} \, \theta \, ds = 0 \quad , \quad \forall \theta \in H^1(\Omega) .$$

Compte-tenu des conditions aux limites cette relation s'écrit :

$$-\int_\Omega \rho \nabla \phi_I \nabla \theta \, dx + \int_{\Gamma_0} m \, \theta \, ds = 0 \quad , \quad \forall \theta \in H^1(\Omega)/\mathbb{R} .$$

Elle exprime que la fonctionnelle

$$\theta \in H^2(\Omega)/\mathbb{R} \rightsquigarrow J(\theta) \equiv \int_\Omega \rho \left(\frac{1}{2} | \nabla \theta + \lambda \nabla \tilde{\varphi} |^2 \right) dx + \int_{\Gamma_0} m \, \theta \, ds$$

est stationnaire en $\varphi \in H^2(\Omega)/\mathbb{R}$

On peut montrer que J est concave en θ pour $| \nabla \phi_I |^2 \leq \frac{dp}{d\rho} \left(\frac{|\nabla \phi_I|^2}{2} \right)$ p.p. Ω (nombre de Mach local inférieur à 1).

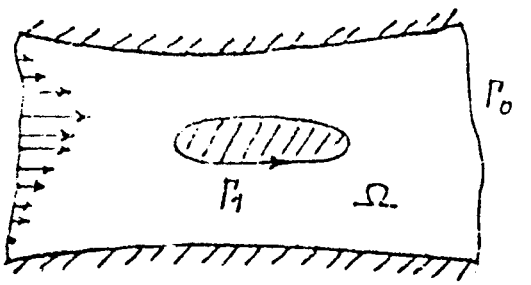
Résoudre l'écoulement subsonique compressible autour d'un obstacle d'un fluide parfait d'équation d'état donnée dans l'hypothèse d'un écoulement isoénergétique et irrotationnel, c'est rendre maximum la fonctionnelle J précédemment définie, où $\theta \in H^2(\Omega)/\mathbb{R}$. λ est déterminé pour une condition de Kutta-Joukowski (choix d'un point d'arrêt sur l'obstacle).

Ce problème a été résolu par la méthode des éléments finis : pour la détermination de φ , on recherche une approximation par éléments conformes triangulaires du premier degré. La recherche du maximum utilise une méthode des gradients conjugés. Les résultats numériques sont très réguliers. Une majoration de l'erreur sur la solution est obtenue de façon classique en utilisant la concavité de J : celle-ci est de l'ordre de l'erreur de la meilleure approximation de la solution par les éléments finis choisis [4].

Il est à remarquer que la formulation introduite ici est valable également si l'écoulement devient localement supersonique en restant continu. La fonctionnelle J possède alors un point col au lieu d'un maximum à la solution .

3_2_ Ecoulement incompressible rotationnel .

Comme deuxième exemple [5] , prenons le cas de l'écoulement permanent autour d'un obstacle d'un fluide parfait incompressible et de rotationnel non nul: $\omega \equiv \text{rot } \vec{V} \neq 0$. La condition d'incompressibilité, $\text{div } \vec{V} = 0$, et la condition de glissement, $\gamma_n \vec{V}\big|_{\Gamma_1} = 0$ entraine l'existence d'un



$\psi \in H^1(\Omega)/\mathbb{R}$ tel que $\vec{V} = \text{curl}\,\psi$ (cf. 2.3.4.- 1^e cas).

Il y a découplage dans les équations qui déterminent les quantités cinématiques et les quantités thermodynamiques. La seule relation différentielle à considérer pour trouver $\vec{V}$ est $\text{div}(\omega \vec{V}) = \nabla\omega . \vec{V} = 0$.

Cette équation indique que ω est constant sur les lignes de courant et donc que ω est fonction composée de ψ : on doit résoudre une équation du type $\Delta\psi = -\omega(\psi)$. Mais la valeur de ω sur une ligne de courant est connue si cette dernière aboutit sur une frontière où ω est donné On montre [5] , dans une hypothèse d'écoulement non décollé, que, résoudre cet écoulement, c'est trouver le minimum d'une fonctionnelle: soit

$$J(\psi) \equiv \frac{1}{2}\int_\Omega \left(|\nabla\psi|^2 - F\circ\psi \right) d\mathcal{L} \quad ; \text{ J est définie sur}$$

un convexe de $H^1(\Omega)/\mathbb{R}$, car F est une fonction scalaire complétement explicitée par la donnée de ω sur la partie connexe de Γ_0 où le flux est entrant.

Le convexe, domaine de définition de J, dépend de la condition de Kutta. J est convexe tant que la dérivée seconde de F reste faible (la borne est précisée dans [5]). On a obtenu des solutions approchées dans ce cas en utilisant pour l'approximation de ψ des éléments conformes triangulaires du premier degré et pour rechercher le minimum un algorithme de gradients conjugués .

On peut remarquer que ce problème a une structure mathématique identique au problème précédent.

BIBLIOGRAPHIE

1 R. BELLMAN "Methods of nonlinear analysis" vol 1, 2
Academic Press, 1973.

2 J.H. BRAMBLE, M. ZLAMAL "Triangular elements in the finite element method". Math. comp. 24, pp 809 - 820, 1970.

3 P.G. CIARLET - P.A. RAVIART "General Lagrange and Hermite interpolation in $\mathbb{R}^n$ with applications to finite element methods", Arch. Rat. Mech. Anal, 46, pp 177 - 199, 1972.

4 J. COUOT, D. KALFON Ref. 73/611 Rapport n° 1 contrat 3046 DRME, Centre d'Etudes et de Recherches de Toulouse (ONERA - CERT).

5 J. COUOT "Approximation par éléments finis d'un écoulement portant tourbillonnaire à l'aide d'une fonctionnelle convexe". présenté au Congrès Français de Mécanique, Toulouse, Sept 75.

6 B.A. FINLAYSON "The method of weighted residuals and variational principles"
Academic Press, 1972.

7 O.A. LADYZHENSKAYA "The mathematical theory of viscous incompressible flow" Gordon and Breach 1963.

8 J.L. LIONS - E. MAGENES "Non homogeneous boundary value problems ans applications" Vol 1, 2 - Springer, 1971.

9 P.A. RAVIART "Méthode des éléments finis" Université Paris VI, 1972.

10 G. STRANG - FIX "An analysis of the finite elements methods" Prentice Hall - New-York, 1973.

11 K. YOSIDA "Functionnal Analysis" - Springer, 1965.

12 O.C. ZIENKIEWICZ "The finite element method in engineering science" Mc Graw-Hill (1971).