PUBLICATIONS MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUES DE RENNES

GUY SANDER

Application de certains éléments finis équilibre en dynamique des structures

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1975, fascicule S3
« Journées « éléments finis » », , p. 1-26

<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1975___S3_A10_0>

© Département de mathématiques et informatique, université de Rennes, 1975, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications mathématiques et informatiques de Rennes » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

APPLICATION DE CERTAINS ELEMENTS FINIS EQUILIBRE

EN DYNAMIQUE DES STRUCTURES

par Guy SANDER

Chargé de cours Associé
Université de Liége, Belgique

INTRODUCTION.

L'application des modèles d'éléments finis de type équilibre en dynamique des structures et plus particulièrement des plaques est rappelée. Une première série d'applications a indiqué la possibilité d'obtenir des fréquences propres inférieures aux solutions exactes et convergeant par valeurs croissant de manière monotonne (Réf. 2,3). Cette étude propose une méthode de dérivation d'une famille d'éléments finis de plaque statiquement admissibles et permettant par un procédé numérique de réduction du degré des polynomes sur les interfaces de faire varier le rapport entre les nombres de modes d'auto-tension et de modes de forces d'inertie. Par un examen des propriétés du quotient de RAYLEIGH on arrive à la conclusion qu'aucune garantie n'existe en général de voir les fréquences calculées par modèles équilibre converger par valeurs croissantes plutôt que décroissantes lorsque le nombre d'éléments augmente. Cette conclusion est vérifiée par l'expérience numérique. On en déduit simplement qu'une diminution relative du nombre de modes d'auto-tension abaisse les fréquences propres calculées.

Le principe de variation des impulsions

Le principe de Hamilton est bien connu pour l'étude des mouvements d'un système conservatif. Il s'agit essentiellement d'un principe de variation des déplacements.

Le principe dual a été développé par TOUPIN (Réf. 1) et appliqué au calcul des structures par la méthode des éléments finis par GERADIN (Réf. 2,3) et TABARROK (Réf. 4,5).

La fonctionnelle de ce principe s'écrit :

$$g\ (\sigma) = \int_{t_1}^{t_2} (\ V - T\ )\ dt \qquad (1)$$

où V est l'énergie potentielle complémentaire qui est la somme de deux termes.

$$V_1 = \int_R \phi\ (\sigma)\ dR \qquad (2)$$

est l'énergie complémentaire de déformation, tandis que

$$V_2 = - \int_{\partial R} \overline{U}_j\ (t)\ f_j\ d\partial R \qquad (3)$$

est l'énergie potentielle complémentaire des tractions de surfaces

$$f_j = n_i \sigma_{ij} \qquad (\vec{n} = \text{normale extérieure}) \qquad (4)$$

sur les déplacements imposés au contour ∂R du domaine

Dans ce principe on suppose à priori satisfaites

- les relations déformations-tensions

$$\varepsilon_{ij} = \frac{\partial \phi}{\partial \sigma_{ij}} \qquad (5)$$

- les équations d'équilibre dynamique

$$- \rho\ \mathring{v}_i + D_i \sigma_{ij} = o \qquad (6)$$

L'énergie cinétique peut être exprimée à partir des vitesses obtenues par intégration des équations d'équilibre

$$v_j\ (t_2) = v_j\ (t_1) + \frac{1}{\rho} D_i \int_{t_1}^{t_2} \sigma_{ij}\ dt \qquad (7)$$

Cette intégration est évitée si l'on introduit un champ d'impulsions τ_{ij} tel que

$$v_j = \frac{1}{\rho} D_i\ \tau_{ij} \qquad (8)$$

et donc que

$$\sigma_{ij} = \overset{\circ}{\tau}_{ij} \qquad (9)$$

L'énergie cinétique s'écrit alors

$$T = \frac{1}{\rho} \int_R \frac{1}{\rho} D_i \tau_{ij} D_m \tau_{mj} dR \qquad (10)$$

Particularisation à la flexion des plaques minces

Nous supposerons la plaque isotrope et d'épaisseur constante pour simplifier la présentation. Dans ce cas les relations (5) lient les moments M_{ij} aux courbures γ_{ij}

$$\gamma_{ij} = H^{-1} M_{ij}$$

avec

$$H^{-1} = \frac{1}{D^*} \begin{vmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{vmatrix} \qquad (11)$$

$$D^* = \frac{Ef^3}{12}$$

L'énergie potentielle complémentaire devient

$$V = \int_R \frac{1}{2D^*} \{ (\overset{\circ}{M}_x + \overset{\circ}{M}_y)^2 - 2 (1 + \nu) (\overset{\circ}{M}_x \overset{\circ}{M}_y - \overset{\circ}{M}_{xy}) \} \, dR \qquad (12)$$

et l'énergie cinétique

$$T = \int_R \frac{1}{2\rho} \left(\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} \right)^2 dR \qquad (13)$$

Si l'on se limite à l'étude des vibrations libres de la plaque, on introduira une solution générale de type harmonique pour les champs d'impulsions, d'amplitude $\overline{M}_x$, $\overline{M}_y$, $\overline{M}_{xy}$, soit

$$M_x = \overline{M}_x \cos (\omega t + \phi) \qquad (14)$$

En adoptant la notation matricielle

$$\begin{aligned} M^T &= (\overline{M}_x, \overline{M}_y, \overline{M}_{xy}) \\ D^T &= \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}, \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \right) \end{aligned} \qquad (15)$$

Le principe de variation des impulsions prend la forme

$$\delta \int_{t_1}^{t^2} \{ \int_R \left[M^T H^{-1} M - \frac{1}{2\rho\omega^2} (D^T M)^T (D^T M) \right] dR \} dt = o \qquad (16)$$

Discrétisation par éléments finis.

La théorie des modèles équilibre est bien connue (Réf. 6,7) et plusieurs éléments finis de plaque ont été proposés et utilisés en statique (Réf. 8,9).

Rappelons que les conditions d'équilibre sur les interfaces imposent l'équilibre exact

- des forces de coin $Z_i = M_{ns_{i+\varepsilon}} - M_{ns_{i-\varepsilon}}$
- des moments normaux $M_{n_{ij}}$
- des efforts tranchants de Kirchhoff $K_{n_{ij}} = Q_n + \frac{\partial M_{ns}}{\partial s}$

Si l'on choisit de représenter chaque composante de moment par un polynome complet de degré n, on a montré que pour chaque degré (n = o, 1, 2...) on peut construire un élément fini triangulaire (Réf. 9)

Le nombre total de modes de tension est

$$m_t = \frac{3}{2} (n + 1) (n + 2) \qquad (17)$$

Le nombre de connecteurs, ou forces généralisées au contour est

$$n_c = 6 (n + 1) \qquad (18)$$

Les modes solutions de l'équation d'équilibre non homogène et qui seuls contribuent donc à la représentation de l'énergie cinétique, sont en nombre

$$m_e = \frac{1}{2} n (n - 1)$$

Le nombre des modes "bulle" de tension, c'est-à-dire des modes de tension internes à l'élément pouvant prendre une valeur non nulle lorsqu'on impose la nullité de toutes les forces généralisées sur le contour,

$$n_b = n (n - 1)$$

Les cinq premiers membres de cette famille d'éléments sont représentés figure 1.

Les deux premiers éléments (n = o, n = 1) ne permettent pas de traiter des problèmes dynamiques car ils ne possèdent pas de modes de tension solutions de l'équation d'équilibre non homogène. Pour tourner cette difficulté GERADIN avait ajouté à l'élément à champ de moment linéaire une solution particulière choisie telle que les forces généralisées sur les interfaces restent inchangées (Réf. 2). Une procédure plus systématique est souhaitable pour dériver les matrices caractérisant les éléments de degrés plus élevés.

Dérivation des matrices de rigidité et d'inertie.

Le champ des moments est présenté sous la forme

$$M = \begin{vmatrix} x^T & o & o \\ o & x^T & o \\ o & o & x^T \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{vmatrix} = P\, b \qquad (21)$$

où $X^T = (1, x, y, x^2 \ldots y^n)$ n = degré choisi

$b^T = (b_1^T, b_2^T, b_3^T)$

$b_1^T = (b_{1,1}, b_{1,2} \quad b_{1,3} \ldots b_{1,k})$ $k = (n+1)(n+2)/2$

Les forces de volume seront notées

$$e = D^T M = \partial^2 X^T p \qquad (22)$$

où $\partial^2 X^T = (1, x, y, x^1 \ldots y^{n-2})$

et où $p = (p_1, p_2, \ldots p_{me}) = C_p\, b \qquad (23)$

sont les paramètres contrôlant l'intensité des modes solutions des équations d'équilibre non homogène.

Le plus souvent il s'agit d'un sous-ensemble des paramètres b. L'énergie complémentaire de déformation s'écrit

$$2V_1 = b^T I b = b^T \left(\int_R P^T H^{-1} P \, dR \right) b \qquad (24)$$

Si H^{-1} est une matrice de constantes (épaisseur et modules élastiques constants) la forme donnée à P (21) indique que le calcul de la matrice I ne demande que l'intégration de

$$I_{xx} = \int_R X^T X \, dR \qquad (25)$$

c'est-à-dire de termes du type $\int_R x^n y^m dR$ qui peuvent être tabulés une fois pour toutes (Réf. 10).

La matrice I est alors composée de 9 sous-matrices $h_{ij}^{-1} I_{xx}$. L'énergie cinétique complémentaire s'écrira de même

$$2T = \frac{1}{\omega^2} p^T N p = \frac{1}{\omega^2} p^T \left(\int_R \frac{1}{\rho} \partial^2 X^T \partial^2 X \, dR \right) p \qquad (26)$$

La matrice N a été appelée matrice de mobilité de l'élément. Pour évaluer l'énergie potentielle des charges V_2 il faut faire un choix de forces généralisées. Celles-ci seront séparées en 2 groupes : les forces généralisées de contour g assurant la codiffusivité et les forces d'inertie associées à chacun des modes solutions particulières de l'équation d'équilibre transversal. Ces forces s'expriment en fonction des paramètres b du champ du moment par (23) et par

$$g = C_g \, b \qquad (27)$$

On peut grouper (23) et (27) en

$$f = \begin{vmatrix} g \\ p \end{vmatrix} = C_b = \begin{vmatrix} C_g \\ C_p \end{vmatrix} b \qquad (28)$$

On dénotera q_o et $\tilde{q}$ les déplacements généralisés conjugués aux forces généralisées g et p respectivement. Ce sont des moyennes pondérées des déplacements donnant une connaissance faible de ce champ.

Si l'on égale l'énergie cinétique au produit scalaire des forces généralisées par leurs déplacements conjugués on obtient

$$\frac{1}{2} \frac{1}{\omega^2} p^T N p = p^T \tilde{q} \tag{29}$$

$$\tilde{q} = \frac{1}{\omega^2} Np = \frac{1}{\omega^2} NC_p b \tag{30}$$

$$p = \omega^2 N^{-1} \tilde{q} \tag{31}$$

L'énergie potentielle complémentaire V_2 ne dépend que des forces d'interfaces

$$V_2 = g^T q_o = b^T C_g q_o \tag{32}$$

En substituant dans l'expression du principe (1) les relations (23), (24), (26) et (32) et en variant les paramètres b, on obtient

$$Ib = \frac{1}{\omega^2} C_p^T NC_p b + C_g^T q_o \tag{33}$$

Par (30) puis (28)

$$Ib = C_p^T \tilde{q} + C_g^T q_o = C^T \ddot{q} \tag{34}$$

si q groupe l'ensemble des déplacements q_o et $\tilde{q}$.
Si l'on désire résoudre le problème par une méthode à déplacements inconnus, on tire b de (34) pour les substituer dans (28), compte tenu de l'invertibilité de I.

$$b = I^{-1} C^T q \tag{35}$$

$$f = C\ I^{-1}\ C^T q = Kq \tag{36}$$

On rappelle ensuite que les forces généralisées sont la somme des forces d'interface et des forces d'inertie , et par (31), on obtient

$$f = \begin{vmatrix} g \\ o \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} o \\ p \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} g \\ o \end{vmatrix} + \omega^2 N^{-1} \tilde{q} \tag{37}$$

La matrice N^{-1} est la matrice des masses de l'élément. Elle ne dépend que des seuls déplacements $\tilde{q}$. En pratique il est utile de définir une forme étendue de cette matrice soit

$$M = \begin{vmatrix} o & o \\ o & N^{-1} \end{vmatrix} \tag{38}$$

en la bordant d'un nombre de lignes et de colonnes de zéro égal au nombre de déplacements q_o de l'élément.
On peut alors réécrire (36) sous la forme

$$(K - \omega^2 M)\ q = \begin{vmatrix} g \\ o \end{vmatrix} \tag{39}$$

Les forces d'interface qui apparaissent au second membre décrivent l'interaction d'un élément sur ses voisins. Au cours de l'assemblage des éléments pour former le système d'équations relatif à la structure totale ces forces s'annulent l'une l'autre en l'absence de charges extérieures, conduisant au problème aux valeurs propres classiques de l'analyse dynamique modale

$$(K - \omega^2 M)\ q = o \tag{40}$$

On notera que la matrice des masses de la structure possède une forme très différente de celle qu'elle prend dans une approche déplacement. En effet si on partitionne encore les déplacements en déplacements d'interfaces q_ℓ et déplacements internes conjugués aux forces d'inertie q_i , les matrices de raideur et des masses sont de la forme

$$K = \begin{vmatrix} K_{\ell\ell} & K_{\ell i} \\ K_{i\ell} & K_{ii} \end{vmatrix} \qquad M = \begin{vmatrix} o & o \\ o & M_{ii} \end{vmatrix} \tag{41}$$

où M_{ii} est une sous matrice bloc diagonale ne comportant aucun couplage entre élément.
Le problème (40) possède donc autant de solutions à fréquence nulle qu'il y a de degrés de liberté d'interface. Ceux-ci peuvent être interprétés comme des modes d'auto-tension et sont seuls responsables du couplage entre les éléments.

L'expression de ces degrés de liberté d'interface en fonction des degrés de liberté internes peut être obtenue aisément

$$q_{\ell\ell} = - K_{\ell\ell}^{-1} K_{\ell i} q_i \tag{42}$$

et le problème (40) réduit à la forme

$$(K_{ii} - K_{i\ell} K_{\ell\ell}^{-1} K_{\ell i}) q_i - \omega^2 M_{ii} q_i = (\bar{K}_{ii} - \omega^2 M_{ii}) q_i = o \tag{43}$$

Cette réduction n'a évidemment rien de commun avec le procédé proposé par GUYAN et IRONS pour la réduction de la taille des problèmes aux valeurs propres dans une approche déplacement, et qui comporte une approximation dans la représentation des forces d'inertie, tandis que celui pratiqué ici est exact.

Le problème (43) ne comporte plus de mode à fréquence nulle et est en pratique de taille très réduite par rapport au problème initial.

Les calculs dynamiques par éléments équilibres peuvent donc être de ce fait beaucoup plus économiques, en nombre de degrés de liberté que ceux par modèles déplacements.

Réduction du degré des champs sur les interfaces.

Les éléments présentés figure 1 associent nécessairement une représentation détaillée des forces d'inertie (un nombre m_c) à un nombre élevé de forces généralisées de contour (n_c) et donc à un nombre élevé de modes d'auto tension. Il est même impossible d'utiliser tels quels les éléments des degrés n = o et n = 1.

On peut cependant aisément utiliser la technique de réduction du degré des forces d'interfaces pour tourner cette contrainte.

Elle consiste à partir d'un élément de degré élevé donnant la représentation souhaitée pour les forces d'inertie mais à lui imposer ensuite un degré plus réduit que celui qui apparaît normalement pour les forces d'interface.

Cette procédure peut être simple et économique à réaliser numériquement alors qu'analytiquement elle correspondrait à la recherche des solutions particulières ad hoc pour chaque cas particulier et une reprogrammation de l'élément en conséquence.

Il suffit pour l'appliquer de choisir comme forces généralisées d'interface, non pas les valeurs locales des moments normaux M_n et des efforts tranchants K_n mais bien les coefficients de leur développements polynominaux sur chaque interface. Par exemple, sur une interface ij d'abcisse courante s, on a

$$Mn_{ij}(s) = Mn_{ij_{(o)}} + Mn_{ij_{(1)}} s + Mn_{ij_{(2)}} s^2 + \ldots \qquad (44)$$

Le choix des coefficients $Mn_{ij(k)}$ comme forces généralisées est évidemment équivalent du point de vue de la codiffusivité au choix classique des valeurs locales du moment en certains points.

Il présente l'avantage que, ayant construit la matrice de raideur de l'élément, il suffit d'annuler dans (39) les forces correspondant aux coefficients indésirables de (44) et éliminer les équations correspondantes.

On notera que la procédure

- n'affecte pas les modes bulles,
- n'affecte pas les forces d'inertie, ni par conséquent la matrice des masses,
- permet de passer aisément dans une structure d'une partie idéalisée avec des éléments de degré élevé à une autre utilisant des éléments plus simples, tout en conservant la codiffusivité parfaite.
- permet d'obtenir simplement des éléments ayant les propriétés de connectivité d'un élément de degré inférieur, y compris n = o et n = 1 tout en conservant les caractéristiques internes et notamment les forces d'inertie d'un élément de degré supérieur quelconque.

Il a donc été possible de n'écrire qu'un seul programme pour l'ensemble de la famille d'éléments repris figure 1 y compris leurs versions à degré réduit aux interfaces.

Conditions d'obtention de bornes aux valeurs propres.

Cette discussion est basée sur les propriétés du quotient de RAYLEIGH et le principe du minimax de COURANT. Elle résume un travail plus détaillé réalisé par IDELSOHN (Réf. 11).

Considérons le problème aux valeurs propres

$$Ku = \lambda\ Mu \tag{45}$$

où K et M sont symétriques. Soient $v_{(r)}$ les vecteurs propres et

$$\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \lambda_3 \ \ldots \ \leqslant \lambda_n \tag{46}$$

les valeurs propres que nous appellerons exactes.

Le quotient de Rayleigh

$$R\ (u) = \frac{u^T\ Ku}{u^T\ Mu} \tag{47}$$

prend la valeur stationnaire λ_r pour u proche de $v_{(r)}$
Un vecteur u quelconque peut être représenté par une combinaison linéaire des n vecteurs propres de (45)

$$u = \Sigma\ C_{(r)}\ v_{(r)} \tag{48}$$

Considérons également un ensemble de contraintes linéaires

$$C\ u = o$$

et appelons u^C les vecteurs satisfaisant à ces contraintes qui en pratique résulteront de la discrétisation et correspondront à annuler une partie du spectres (48).

Le problème aux valeurs propres contraint sera

$$K_C\ U_C = \lambda_C\ M_C\ u_C \tag{49}$$

de valeurs propres et vecteurs propres notés

$$\lambda_{c_{(r)}} \quad \text{et} \quad v_{c_{(r)}}$$

Si l'on choisit un vecteur U_c orthogonal aux r - 1 premiers vecteurs propres $v_{(i)}$ du problème initial (49) on aura

$$\min \; R(U_c) = \overset{\circ}{\lambda}_{(r)} \geq \lambda_{(r)} \tag{50}$$

Si $\lambda_{c_{(r)}}$ est la valeur propre obtenue avec un vecteur U_c orthogonal aux r - 1 premiers vecteurs propres $v_{c_{(i)}}$ du problème contraint (49) le principe du minimax de COURANT permet d'écrire

$$\lambda_{c_{(r)}} \geq \overset{\circ}{\lambda}_{(r)} \geq \lambda_{(r)} \tag{51}$$

Si par contre on choisit un vecteur U_c orthogonal successivement aux n - r - 1 derniers vecteurs propres du problème initial puis du problème contraint on aura

$$\lambda_{c_{(r)}} \leq \overset{\circ}{\lambda}_{(r)} \leq \lambda_{(r)} \tag{52}$$

Dans une discrétisation par éléments finis du type déplacement le développement (48) est amputé de ses modes les plus élevés et on se trouve donc dans le cas (51). Les valeurs propres obtenues constituent des bornes supérieures aux valeurs propres du système continu ou non contraint.

Dans une discrétisation par éléments finis du type équilibre il faut noter que l'on se trouve dans une situation mixte. Le développement (48) comporte une double infinité de modes. La première comporte tous les modes d'auto-tension à fréquences nulles et la seconde tous les modes solutions particulières des équations

d'équilibre, de fréquences non nulles et croissantes.

La discrétisation conduit évidemment à amputer le développement des deux types de modes. Il n'est donc pas possible de situer les valeurs propres calculées par rapport aux valeurs propres exactes. Cependant il est possible (Réf. 10) de choisir des modes de tension orthogonaux à tous les modes d'auto tension, y compris à ceux qui sont ignorés par la discrétisation.

Dans ce cas, ces modèles équilibres conduisent également à une surestimation des fréquences propres et ne sont donc pas intéressant en pratique.

Influence du nombre de modes d'auto tension et de forces d'inertie

Les considérations du paragraphe précédent suggèrent que la position relative des valeurs propres calculées par modèles équilibres et des valeurs propres exactes pourrait dépendre du rapport entre le nombre des modes d'auto tension à fréquences nulles et le nombre des modes de force d'inertie.

Les premiers résultats (Réf. 2,3) obtenus en dynamique par des modèles équilibre faisaient apparaître une convergence des valeurs propres par valeurs croissantes lorsque l'on raffine le maillage au moyen d'un nombre croissant d'éléments. L'élément utilisé était le triangle à champ de moment linéaire (parfois dénommé EQT) dans lequel GERADIN a introduit 3 modes de forces d'inertie.

En utilisant la famille d'éléments décrits précédemment il était aisé de vérifier le comportement pour d'autres discrétisations.

On a choisi l'exemple d'une plaque cantilever carrée. Elle a été subdivisée en 1 x 1, 2 x 2 ou 3 x 3 carrés subdivisés chacun en 4 triangles par les diagonales.

Les éléments de degré n = 2, 3, 4 ont été utilisés. Ils sont appelés éléments à 1, 3 ou 6 modes contribuant à l'énergie cinétique. Le degré des moments et efforts tranchants aux interfaces a été réduit de manière à reproduire les connections entre éléments correspondant à chacun des degrés inférieure à celui de base.

Le nombre de modes d'auto-tension n_a pour un triangle du maillage est repris dans les tableaux de résultats.

Il est donné par

$$n_a = n_c + n_b - 3$$

où n_c est le nombre de forces d'interface, compte tenu de la réduction de degré effectivement réalisée, n_b le nombre de modes bulle du champ de base (égal à 2 fois le nombre de modes d'inertie) et où 3 est le nombre de modes rigides ou d'équations d'équilibre globales.

Les fréquences non dimensionnelles des 5 premiers modes sont repérés aux tableaux I, II et III extraits de la référence 12.

La convergence des fréquences 1, 3 et 5 est illustrée par les figures 2 , 3, 4 pour le champ à 3 forces d'inertie c'est-à-dire l'élément de base où n = 2. Une borne supérieure à chacun des 5 modes a été calculée par modèle déplacement de type CQ (Réf. 8) avec un maillage 2 x 2 et vaut :

mode 1 = 3.485 mode 2 = 8.606
mode 3 = 21.50 mode 4 = 27.63
mode 5 = 31.97

REFERENCES.

1. TOUPIN, R.A. "A Variational Principle for the Mesh-Type Analysis of a Mechanical System". Trans. ASME, Vol 74 - J.Appl. Mech. p 151-152 (1952).

2. GERADIN, M. "Equilibrium models in eigenvalue analysis" IUTAM, Proc. High Speed Computing of Elastic Structures, Université de Liège, 1971, Volume 61.

3. GERADIN, M. "Analyse dynamique duale des structures par la méthode des éléments finis". Coll. Publ. Fac. Sc.Appl. n° 36, 1973, Université de Liège.

4. TABARROK, B. et SAKEGUCHI, R. "Calculation of plate banding frequencies from complementary energy formulation" Int. Jnl. Num. Meth. in Eng. Vol. 2, pp 283-293, 1970.

5. TABARROK, B. "Complementary energy method in Elastodynamics". Proc. IUTAM, High Speed Computing of Elastic Structures, Univ. Liège, volume 61, 1971.

6. FRAEIJS DE VEUBEKE, B. "Displacement and Equilibrium Models in the Finite Element Methods". Chap. 9 in "Stress Analysis" éd. O.C. Zienkiewicz and Holister, John Wiley, 1965.

7. SANDER, G. and FRAEIJS DE VEUBEKE, B. "Upper and lower bounds to Structural deformations by dual analysis in finite elements". USAF Techn. Report - AFFDL-TR 199, 1966.

8. SANDER, G. "Application de la méthode des éléments finis à la flexion des plaques". Coll. Publ. Fac. Sc. Applic. Université Liège, n° 15, 1966.

9. SANDER, G. "Dual analysis principle".
Proc. IUTAM, High Speed Computing of Elastic Structures".
Univers. Liège, Vol. 61, 1971.

10. FRAEIJS DE VEUBEKE, B., GERADIN, M., HUCK, A.
"Structural Dynamics". CISM, Cours d'été 1972, Udine.

11. IDELSOHN, S. "Recherche des conditions d'obtention de bornes aux fréquences propres dans l'analyse dynamique par éléments finis de type statiquement admissibles." Rapport VF - 20 du LTAS, Université de Liège, 1972.

12. IDELSOHN, S. "Influence du nombre des modes d'auto tension dans l'analyse dynamique des plaques au moyen d'une famille d'éléments finis statiquement admissibles.
Rapport VF - 21 du LTAS, Université de Liège, 1972.

CHAMPS DE MOMENTS DONNANT 1 MODE POUR L'ENERGIE CINETIQUE			
MODE N°	NOMBRE DE MODES D'AUTOTENSION	IDEALISATION 1 x 1	IDEALISATION 2 x 2
1	5	2.6949	3.2209
	11	3.6973	3.5217
	17	3.7150	3.5255
2	5	8.3251	7.7621
	11	11.1436	8.9281
	17	12.1253	8.9905
3	5	11.0927	16.8798
	11	24.9013	24.3750
	17	25.46	24.4635
4	5	12.8137	22.9839
	11	59.2658	33.6397
	17	70.6656	34.050
5	5	n'existe pas	27.0186
	11	n'existe pas	36.3243
	17	n'existe pas	37.2663

$\bar{\omega} = \omega a^2 \sqrt{\frac{\rho}{E}}$

$\nu = 0.3$

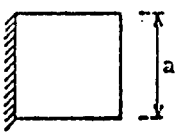


TABLE I

CHAMPS DES MOMENTS DONNANT 3 MODES POUR L'ENERGIE CINETIQUE				
MODE N°	NOMBRE DE MODES D'AUTOTENSION	IDEALISATION 1 x 1	IDEALISATION 2 x 2	IDEALISATION 3 x 3
1	9	2.60015	3.17786	
	15	3.45219	3.4650	3.4630
	21	3.47032	3.4694	
	27	3.47104	3.470	
2	9	6.58706	7.3902	
	15	8.11597	8.4452	8.48498
	21	8.51513	8.5022	
	27	8.52681	8.5063	
3	9	9.8544	15.6660	
	15	22.26141	21.2403	21.2642
	21	22.87977	21.3169	
	27	22.95712	21.3244	
4	9	12.62956	21.7007	
	15	28.77403	27.0793	27.1575
	21	30.4375	27.2916	
	27	30.9274	27.302	
5	9	22.06303	22.7962	
	15	29.2545	30.5269	30.8464
	21	37.0289	31.0606	
	27	37.1984	31.0737	

$$\bar{\omega} = \frac{\omega a^2}{\sqrt{\frac{D}{m}}}$$

$\nu = 0.3$

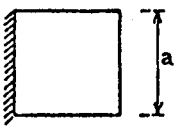


TABLE II

CHAMP DES MOMENTS DONNANT 6 MODES POUR L'ENERGIE CINETIQUE			
MODE	NOMBRE DE MODES D'AUTOTENSION	IDEALISATION 1 x 1	IDEALISATION 2 x 2
1	15	2.598	3.1779
	21	3.4485	3.4647
	27	3.4669	3.4691
	33	3.4681	3.4703
2	15	6.558	7.3874
	21	8.0873	8.4421
	27	8.4845	8.4939
	33	8.4960	8.5035
3	15	9.6268	15.6383
	21	20.8732	21.1990
	27	21.2193	21.2736
	33	21.3066	21.2826
4	15	12.2235	21.5822
	21	26.2933	26.9805
	27	26.9478	27.1906
	33	27.2358	27.2012
5	15	21.1256	22.7186
	21	26.5183	30.4118
	27	30.9334	30.9387
	33	31.0222	30.9543

$$\bar{\omega} = \frac{\omega a^2}{\sqrt{\frac{D}{m}}}$$

$\nu = 0.3$

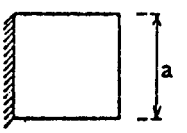
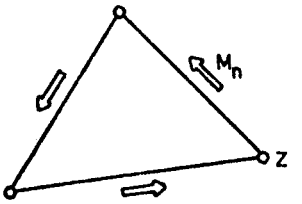
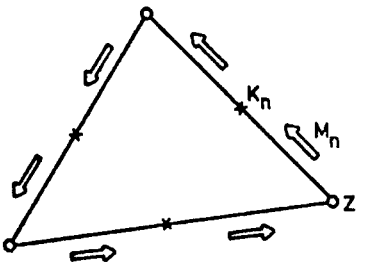


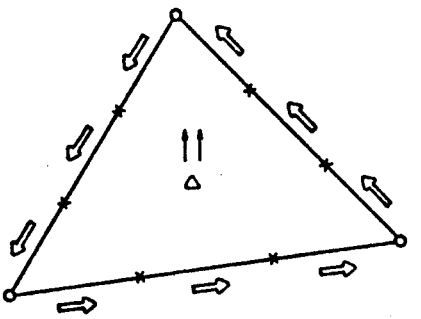
TABLE III



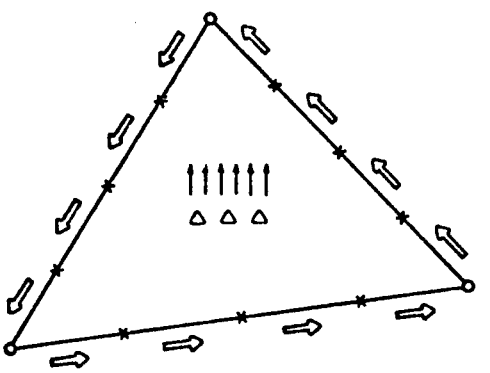
$n = 0$ $m_e = 0$
$m_t = 3$ $n_b = 0$
$n_c = 6$ $n_a = 3$



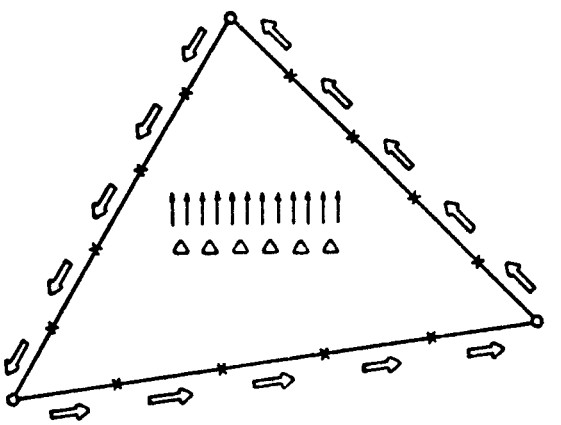
$n = 1$ $m_e = 0$
$m_t = 9$ $n_b = 0$
$n_c = 12$ $n_a = 9$



$n = 2$ $m_e = 1$
$m_t = 18$ $n_b = 2$
$n_c = 18$ $n_a = 17$



$n = 3$ $m_e = 3$
$m_t = 30$ $n_b = 6$
$n_c = 24$ $n_a = 27$



$n = 4$ $m_e = 6$
$m_t = 45$ $n_b = 12$
$n_c = 30$ $n_a = 39$

| MODES BULLE
Δ MODES DE FORCES D'INERTIE

FIG. 1 FAMILLE DES ELEMENTS FINIS DE PLAQUE EQUILIBRE TRIANGULAIRE

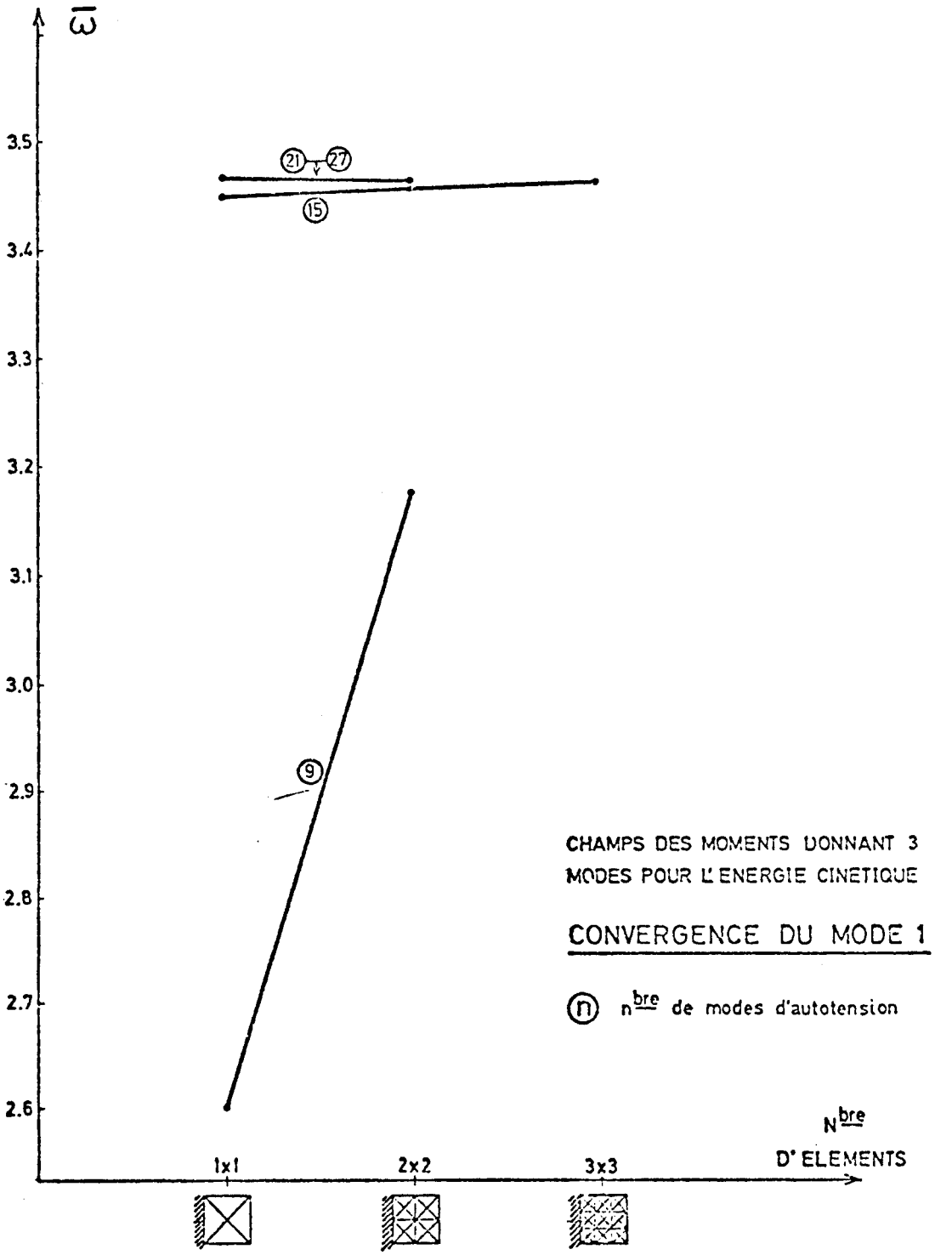

ω̄
3.5
3.4
3.3
3.2
3.1
3.0
2.9
2.8
2.7
2.6
21
27
15
9
1x1
2x2
3x3
N bre D' ELEMENTS
CHAMPS DES MOMENTS DONNANT 3 MODES POUR L'ENERGIE CINETIQUE
CONVERGENCE DU MODE 1
(n) n bre de modes d'autotension

Figure 2

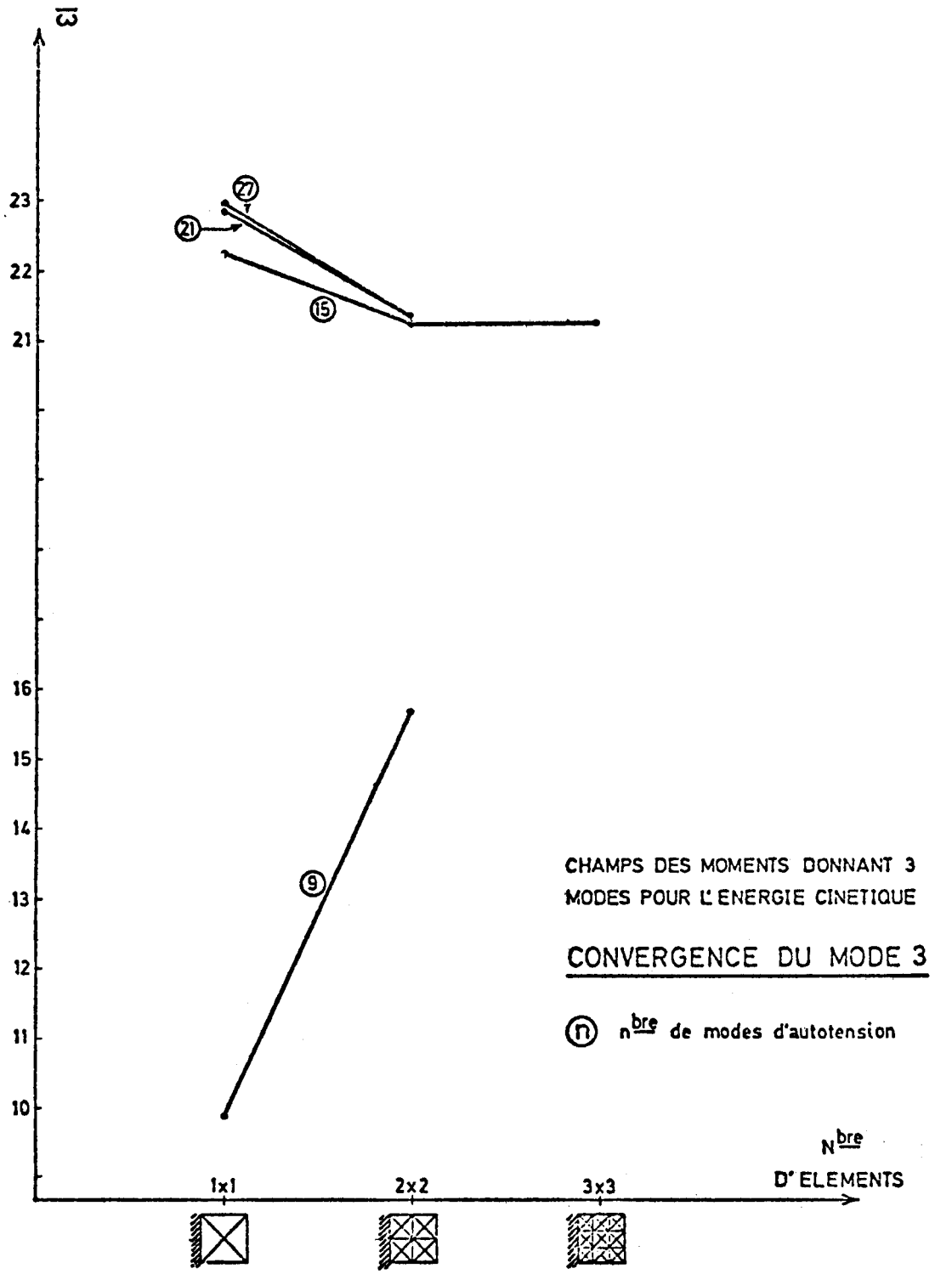

Ω
23
22
21
16
15
14
13
12
11
10
27
21
15
9
1x1
2x2
3x3
N bre
D' ELEMENTS
CHAMPS DES MOMENTS DONNANT 3
MODES POUR L'ENERGIE CINETIQUE
CONVERGENCE DU MODE 3
(n) n bre de modes d'autotension

Figure 3

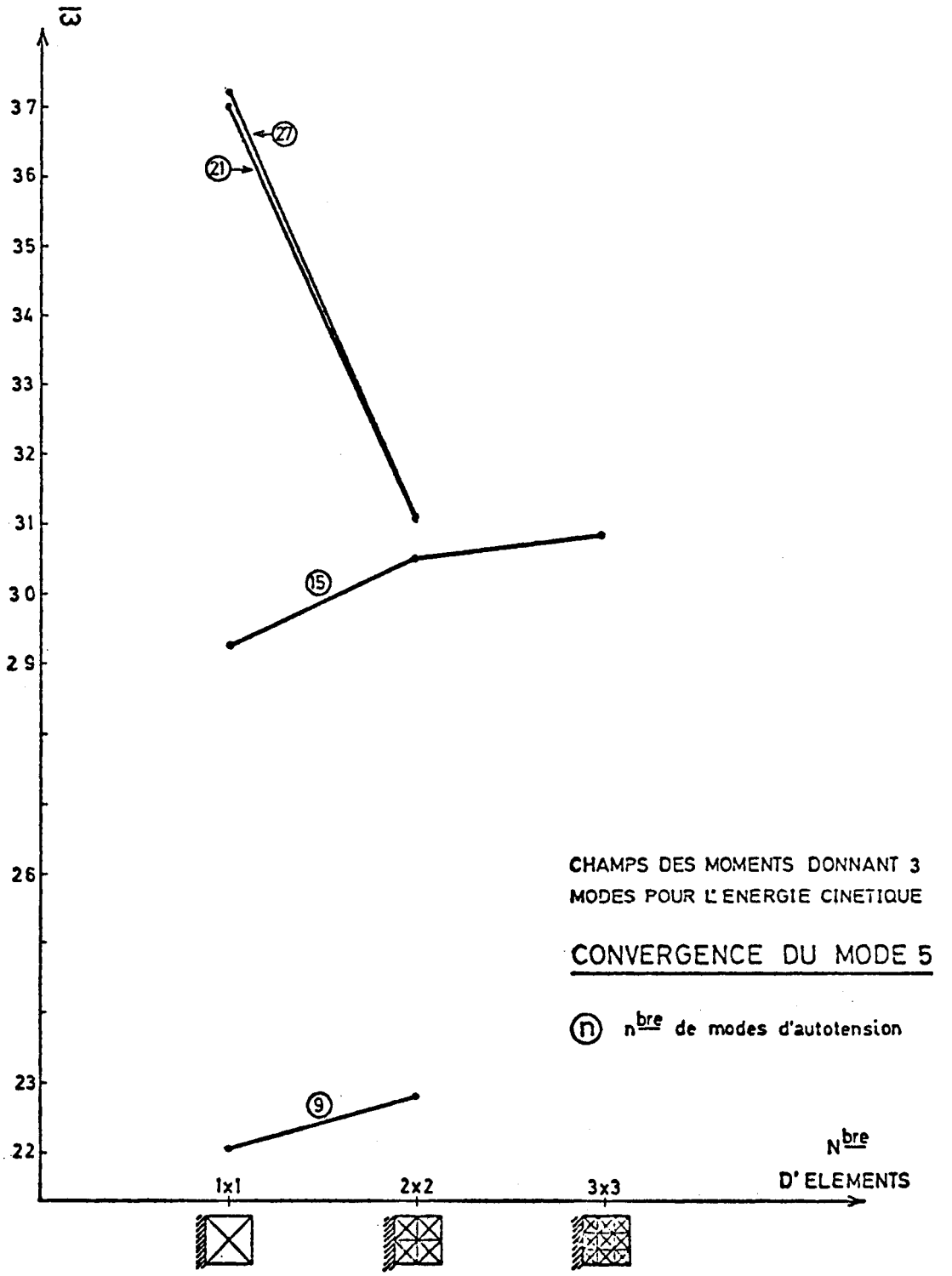

ω
37
36
35
34
33
32
31
30
29
26
23
22
27
21
15
9
1x1
2x2
3x3
N bre
D' ELEMENTS
CHAMPS DES MOMENTS DONNANT 3
MODES POUR L' ENERGIE CINETIQUE
CONVERGENCE DU MODE 5
(n) n bre de modes d'autotension

Figure 4