PUBLICATIONS MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUES DE RENNES

FRANÇOIS BERRONDO

Caractérisation topologique des corps valués henséliens

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1975, fascicule 2
« Séminaires d'algèbre et de logique », , exp. n° 3, p. 1-18

<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1975___2_A3_0>

© Département de mathématiques et informatique, université de Rennes, 1975, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications mathématiques et informatiques de Rennes » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

CARACTERISATION TOPOLOGIQUE

DES CORPS VALUES HENSELIENS

par

François BERRONDO

Nous caractériserons les topologies d'un corps qui peuvent être définies par une valuation hensélienne.

INTRODUCTION

Définition 0 :

Topologie valuative d'un corps : c'est une topologie qui peut être définie par une valuation.

Ce sont les topologies compatibles avec la structure de corps, séparées, localement rétrobornées ([2], ch. III, § 6, ex. 22) et telles que le corps contienne un sous - groupe non nul borné.

Définition 1 :

Corps valuatif : c'est un corps muni d'une topologie valuative.

Définition 2 :

Corps $\mathbb{R}$ - valuatif : c'est un corps valuatif $(K,\mathcal{C})$ possédant les propriétés équivalentes suivantes :

1) $\mathcal{C}$ peut être définie par une valuation à valeurs dans $\mathbb{R}$ (i. e. de hauteur 1)
2) Il existe des éléments de K non nuls topologiquement nilpotents.

Si $(K,\mathcal{C})$ désigne un corps valuatif, C la clôture algébrique de K et G le groupe de Galois de C sur K, on montre que $\mathcal{C}$ est la topologie d'une valuation hensélienne si et seulement si les conditions équivalentes suivantes sont vérifiées :

I - Il existe une seule topologie valuative de C prolongeant $\mathcal{C}$ (th. 1)

II - Il existe une topologie valuative de C prolongeant $\mathcal{C}$ telle que tous les éléments de G soient continus. (th. 2).

III - (Quand $(K,\mathcal{C})$ n'est pas $\mathbb{R}$ - valuatif)
Quel que soit le voisinage V de 0 dans K, il existe un voisinage V' tel que, si $f = X^n + c_1 X^{n-1} + \ldots + c_n$ est un polynôme irréductible de $K[X]$, $c_n \in V' \Longrightarrow c_i \in V$ $\forall\, i \in [1, \ldots, n]$ (th. 3)

EXTENSIONS MONOTOPOLOGISABLES DES CORPS VALUATIFS

Définition 3

Soit $(K,\mathcal{C})$ un corps valuatif et L une extension algébrique de K. Nous dirons que L est une extension monotopologisable s'il existe une seule topologie valuative de L qui prolonge $\mathcal{C}$.

Exemple :

Si K est complet, toute extension finie est monotopologisable ([1], § 5 , n° 2, prop. 4).

Théorème 0

Soit $(K,\mathcal{C})$ un corps valuatif, L une extension algébrique de K et $\mathcal{C}'$ une topologie valuative de L prolongeant $\mathcal{C}$. Si v est une valuation de K définissant $\mathcal{C}$, il existe une valuation v' de L prolongeant v qui définit $\mathcal{C}'$.

Soit v_1 une valuation de L définissant $\mathcal{C}'$ et soit $\bar{v}_1$ sa restriction à K. $\bar{v}_1$ et v sont dépendantes ([1], § 7 , n° 2, proposition 3). Si A_1 et A désignent leurs anneaux, A_1 et A ont un idéal premier commun P et $(A_1)_P = A_P$ ([1], § 4, n° 1, prop. 1). Si v_p est la valuation de K dont l'anneau est A_p, les prolongements de v_p à L sont de la forme $v'_{p'}$, où v' est un prolongement de v et p' un idéal premier de v' au dessus de P ([4] , F, prop. 4). Il existe donc un v' et un p' tels que $v'_{p'} = (v_1)_{p'}$. Les valuations v_1 et v' sont dépendantes donc v' définit $\mathcal{C}'$.

Théorème 1

Soit $(K,\mathcal{C})$ un corps valuatif , L une extension algébrique de K. Pour que cette extension soit monotopologisable, il faut et il suffit que $\mathcal{C}$ puisse être définie par une valuation ayant un seul prolongement à L.

La condition est suffisante d'après le théorème 0. Montrons qu'elle est nécessaire. On suppose d'abord que L est une extension de dimension finie sur K. Soit v une valuation de K définissant sa topologie et A son anneau. Soient $B_1, B_2, \ldots B_s$ les anneaux de valuation de L au dessus de A. Si $L : K$ est monotopologisable, les anneaux $B_1, B_2, \ldots, B_s$ sont dépendants, donc ils ont un idéal premier commun π tel que

$$(B_1)_\pi = (B_2)_\pi = \ldots = (B_s)_\pi \quad .$$

Posons $P = \pi \cap A$. Les seuls anneaux de valuation de L au dessus de A_p sont les $(B_i)_\pi$ ([4], F - prop. 4). Il n'y en a qu'un seul. La valuation dont l'anneau est A_p définit la topologie de K et n'a qu'un seul prolongement à L.

- Cas général

Soit v une valuation de K définissant $\mathcal{C}$, A son anneau et X son spectre. On munit X de l'ordre opposé de l'inclusion ($x \leq x' \Longleftrightarrow x' \subset x$); $\forall\, x \in X$ on note v_x la valuation dont l'anneau est A_x.

Supposons que $\forall\, x \in X$, v_x admet plusieurs prolongements à L et montrons qu'alors l'extension $L : K$ n'est pas monotopologisable.

Lemme 1

Il existe une partie X' cofinale dans X et une application croissante Λ de X' dans l'ensemble des corps compris entre K et L ($x \longrightarrow \Lambda\, x$) telles que :

a) $\forall\, x \in X'$ v_x a plusieurs prolongements à Λ_x et

b) $\forall\, x, y \in X'$, $x < y \Longrightarrow v_y$ a un seul prolongement à Λ_x.

Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des couples (X', Λ) où X' est une partie de X et Λ une application croissante de X' dans l'ensemble des corps compris entre K et L vérifiant les conditions a) et b) du lemme 1 et la condition c) suivante

c) si X' a un plus grand élément x_0, $\exists\, z \in X$ tel que v_z a un seul prolongement à Λ_{x_0}.

- $\mathcal{F} \neq \emptyset$. En effet, v a plusieurs prolongements à L donc il existe un corps $\Lambda_{\mathfrak{M}}$ de dimension finie sur K tel que v a plusieurs prolongements à $\Lambda_{\mathfrak{M}}$. Si $\Lambda_{\mathfrak{M}} : K$ est polytopologisable, à fortiori, $L : K$ aussi et le théorème est établi. On peut donc supposer $\Lambda_{\mathfrak{M}} : K$ monotopologisable et comme $[\Lambda_{\mathfrak{M}} : K]$ est fini, $\exists\, z \in X$ tel que v_z a un prolongement à $\Lambda_{\mathfrak{M}}$. Si $\mathfrak{M}$ désigne l'idéal maximal de v, le couple $(\mathfrak{M}, \Lambda_{\mathfrak{M}})$ vérifie bien les conditions de $\mathcal{F}$.

- Ordre sur $\mathcal{F}$: soient (X',Λ') et (X'',Λ'') des éléments de $\mathcal{F}$. On pose $(X',\Lambda') \leq (X'',\Lambda'')$ si $X' \subset X''$ et si la restriction de Λ'' à X' coïncide avec Λ'. $\mathcal{F}$ est inductif pour cet ordre : soient $(X'_i,\Lambda_i)_{i\in I}$ une famille totalement ordonnée d'éléments de $\mathcal{F}$. Posons $X' = \bigcup_{i\in I} X'_i$ et définissons Λ sur X' par $\Lambda/_{X'_i} = \Lambda_i$. $\forall\ x, y \in X'$ $\exists\ i : x,y \in X'_i$ donc v_x a plusieurs prolongements à Λ_x et v_y a un seul prolongement à Λ_x si $x < y$. Enfin, si X' a un plus grand élément x_o, c'est aussi le plus grand élément d'un X'_i donc $\exists z \in X : v_z$ a un seul prolongement à Λx_o. Par suite $\mathcal{F}$ contient un élément maximal (X',Λ).

- Montrons que X' n'a pas de plus grand élément. En effet, si x_o est le plus grand élément, $\exists\ z \in X : v_z$ a un seul prolongement à Λx_o. On a nécessairement $z > x_o$. v_z a plusieurs prolongements à L donc il existe un corps L' fini sur K tel que v_z a plusieurs prolongements à L'. Soit Λ_z le corps engendré par Λ_{x_o} et L'. v_z a plusieurs prolongements à Λ_z. Λ_z est de dimension finie sur Λ_{x_o} et on peut supposer l'extension $\Lambda_z : \Lambda_{x_o}$ monotopologisable (sans quoi $L : K^o$ serait polytopologisable et le théorème démontré). Donc $\exists\ z' \in X : v_{z'}$ a un seul prolongement à Λ_z. Posons $\bar{X}' = X' \cup \{z\}$ et prolongeons Λ à $\bar{X}'$ en posant $\Lambda(z) = \Lambda_z$. $(\bar{X}',\Lambda) \in \mathcal{F}$ ce qui contredit la maximalité de (X',Λ).

- Montrons que X' est cofinal dans X. S'il n'en était pas ainsi, soit m un majorant de X'. Posons $\tilde{\Lambda} = \bigcup_{x\in X'} \Lambda_x$. $\forall\ x \in X'$, $\exists\ y \in X'$ $x < y < m$; v_y a un seul prolongement à Λ_x, donc v_m aussi et par suite v_m a un seul prolongement à $\tilde{\Lambda}$. Comme ci dessus on construit un extension finie Λ_m de $\tilde{\Lambda}$ telle que v_m a plusieurs prolongements à Λ_m et on montre que $\exists\ z \in X : v_z$ a un seul prolongement à Λ_m. Posons $\bar{X}' = X' \cup \{m\}$ et prolongeons Λ $(m) = \Lambda_m$, $(\bar{X}',\Lambda) \in \mathcal{F}$, impossible. Ce qui établit le lemme 1.

- Pour tout corps Λ $(K \subset \Lambda \subset L)$ et tout prolongement w de v à Λ, on note w_x la valuation de Λ moins fine que w qui prolonge v_x.

- Soit A l'ensemble des couples (Λ,w) où Λ est un corps $(K \subset \Lambda \subset L)$ et w un prolongement de v à Λ ; on ordonne A en posant $(\Lambda_1,w_1) \leq (\Lambda_2,w_2)$ si $\Lambda_1 \subset \Lambda_2$ et $w_2/\Lambda_1 = w_1$.

Lemme 2

Soit $\bar{v}$ un prolongement quelconque de v à L. Il existe une partie $\bar{X}$ cofinale dans X et une application croissante de $\bar{X}$ dans A, $(x \to (\Lambda_x, w^{(x)}))$, notée (Λ, w), telle que $\forall x \in \bar{X}$, $w_x^{(x)} \neq \bar{v}_x /\!\!/ \Lambda_x$.

Considérons un couple (X', Λ) vérifiant les conditions du lemme 1. Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des couples $(\bar{X}, (\Lambda, w))$ où $\bar{X}$ est une partie de X' et (Λ, w) une application croissante de $\bar{X}$ dans A dont la première composante coïncide avec Λ et qui vérifie les conditions du lemme 2.

$\mathcal{F}$ n'est pas vide : si m désigne l'idéal maximal de v, v a plusieurs prolongements à Λ_m donc on peut choisir un w_m distinct de $\bar{v}_{/\Lambda_m}$. On a $(m, (\Lambda_m, w_m)) \in \mathcal{F}$. On ordonne $\mathcal{F}$ en posant $(\bar{X}_1, (\Lambda, w)_1) \leq (\bar{X}_2, (\Lambda, w)_2)$ si $\bar{X}_1 \subset \bar{X}_2$ et si $(\Lambda, w)_2$ prolonge $(\Lambda, w)_1$. $\mathcal{F}$ est évidemment inductive. Soit donc $(\bar{X}, (\Lambda, w))$ un élément maximal de $\mathcal{F}$. Si $\bar{X}$ n'était pas cofinale dans X', il existerait un majorant strict m de $\bar{X}$. Posons $\tilde{\Lambda} = \bigcup_{x \in \bar{X}} \Lambda_x$ et soit $\tilde{w}$ la valuation de $\tilde{\Lambda}$ qui prolonge les $w^{(x)}$. v_m a un seul prolongement à Λ_x, $\forall x \in \bar{X}$, donc v_m a un seul prolongement à $\tilde{\Lambda}$ et ce prolongement est $\tilde{w}_m$. v_m a plusieurs prolongements à Λ_m, donc $\tilde{w}_m$ aussi, et l'un d'entre eux est distinct de $\bar{v}_{m/\Lambda_m}$. Or tout prolongement de $\tilde{w}_m$ est de la forme $w_m^{(m)}$ où $w^{(m)}$ est un prolongement de $\tilde{w}$ à Λ_m ([4] : E - prop. 4). Il existe donc un prolongement $w^{(m)}$ de $\tilde{w}$ à Λ_m tel que $w_m^{(m)} \neq \bar{v}_{m /\!\!/ \Lambda_m}$. Posons $\bar{\bar{X}} = \bar{X} \cup \{m\}$ et prolongeons (Λ, w) à $\bar{\bar{X}}$ en posant $(\Lambda, w)(m) = (\Lambda_m, w^{(m)})$. $(\bar{\bar{X}}, (\Lambda, w)) \in \mathcal{F}$ ce qui contredit la maximalité de $(\bar{X}, (\Lambda, w))$. Donc $\bar{X}$ est cofinale dans X' et par suite dans X, ce qui établit le lemme 2.

Démonstration du théorème :

Considérons un prolongement quelconque $\bar{v}$ de v à L et un couple $(\bar{X}, (\Lambda, w))$ vérifiant les conditions du lemme 2. Posons $\tilde{\Lambda} = \bigcup_{x \in \bar{X}} \Lambda_x$ et soit $\tilde{w}$ la valuation de $\tilde{\Lambda}$ qui prolonge les $w^{(x)}$. Si l'extension $L : K$ était monotopologisable, à fortiori $\tilde{\Lambda} : K$ aussi, donc $\bar{v}_{/\tilde{\Lambda}}$ et $\tilde{w}$ seraient dépendantes. On aurait $\bar{v}_{x/\tilde{\Lambda}} = \tilde{w}_x$ pour un x de $\bar{X}$. Comme $\bar{X}$ est cofinale, $\exists y \in \bar{X}$, $y \geq x$. On a $w_y^{(y)} \neq \bar{v}_{y/\Lambda_y}$. Comme $x \leq y$, $w_x^{(y)} \neq \bar{v}_{x/\Lambda_y}$ et comme $\Lambda_y \subset \tilde{\Lambda}$, $\tilde{w}_x \neq \bar{v}_{x/\tilde{\Lambda}}$, d'où la contradiction.

Remarque : la démonstration précédente peut être considérablement simplifiée dans le cas où la topologie est métrisable. (cf. appendice)

CAS DES EXTENSIONS NORMALES

Théorème 2

Soit $(K,\mathcal{C})$ un corps valuatif, N une extension normale de K et $\mathcal{C}'$ une topologie valuative de N prolongeant $\mathcal{C}$. Soit G le groupe de Galois de l'extension N : K.

Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1) $\mathcal{C}'$ est la seule topologie valuative de N prolongeant $\mathcal{C}$.

2) $\forall\, \sigma \in G$, σ est continu .

3) G est une famille équi-continue d'automorphismes de N.

1) $\Longrightarrow$ 3) D'après le théorème 1, la topologie de K est définie par une valuation v ayant un seul prolongement $\bar{v}$ à N. Donc, $\forall\, \sigma \in G$, $\bar{v} \circ \sigma = \bar{v}$ G est une famille équi-continue pour la topologie de $\bar{v}$.

3) $\Longrightarrow$ 2) évident

2) $\longrightarrow$ 1) soit $\bar{v}$ une valuation définissant la topologie de N et v sa restriction à K. $\forall\, \sigma \in G$, σ est un homéomorphisme car σ et σ^{-1} sont continues. Par suite, $\bar{v}$ et $\bar{v} \circ \sigma$ définissent la même topologie. Tous les prolongements de v à L sont du type $\bar{v} \circ \sigma$ ([1], § 8, n° 6, prop. 7) et les topologies valuatives de L sont définies par ces prolongements (th. 0) ; il n'y en a donc qu'une seule.

Théorème 3

Soit $(K,\mathcal{C})$ un corps valuatif non $\mathbb{R}$ - valuatif et N une extension algébrique normale de K. Quel que soit y dans N, on note $X^{n(y)} + C_1(y)\, X^{n(y)-1} + \ldots + C_{n(y)}(y)$ son polynôme minimal unitaire.

L'extension $N : K$ est monotopologisable si et seulement si $\forall V$ $\exists V' : C_{n(y)}(y) \in V' \longrightarrow c_i(y) \in V \quad \forall i \in [1,n(y)]$. (V et V' désignant des voisinages de 0 dans K).

Si $N : K$ est monotopologisable, $\exists$ v définissant $\mathcal{C}$ et ayant un seul prolongement à N. Comme $\mathcal{C}$ n'est pas $\mathbb{R}$ - valuative , V contient un idéal premier P de v. P est l'idéal maximal de la valuation v_p et, d'après ([3] , ch. III , § 16, 3), $C_{n(y)}(y) \in P \longrightarrow c_i(y) \in P$. Le voisinage $V' = P$ convient.

Réciproquement, soit v une valuation définissant $\mathcal{C}$ et supposons que $\exists V : \forall V' \exists y \in N : c_{n(y)}(y) \in V' , c_i(y) \notin V$. Soit P un idéal premier de v inclus dans V , en prenant $V' = P$, on déduit que v_p a plusieurs prolongements à N. $\forall P \in \text{Spec}(v)$, v_p a plusieurs prolongements donc $\mathcal{C}$ ne peut être définie par une valuation à prolongement unique.

CAS DE LA CLOTURE ALGEBRIQUE

Définition 4

Soit $(K,\mathcal{C})$ un corps valuatif et C sa clôture algébrique. $(K,\mathcal{C})$ sera dit hensélienne ment valuatif si C est une extension monotopologisable de $(K,\mathcal{C})$.

Exemple

Tout corps $\mathbb{R}$ - valuatif complet est hensélienne ment valuatif.

Montrons qu'il existe un corps valuatif complet non hensélienne ment valuatif.

Lemme 0

Soit (K,v) un corps value et v_p la valuation de K associée à l'idéal premier p de l'anneau de v ([4], C, th. 1). La topologie de K peut être définie par une valuation hensélienne si et seulement s'il existe p tel que v_p soit une valuation hensélienne.

S'il existe p tel que v_p soit hensélienne, c'est évident puisque v et v_p définissent la même topologie.

S'il existe v' hensélienne définissant la même topologie que v, alors il existe v'' moins fine que v et que v' ([1], § 7, n° 2, prop. 3). Comme v'' est moins fine que v', v'' est hensélienne ([4], F, prop. 9) et comme v'' est moins fine que v, il existe p tel que $v'' = V_p$ ([4], C, th. 1).

Construction du contre - exemple

Choix du groupe ordonné

$\mathbb{Z}_-$ désigne l'ensemble des entiers ≤ 0. Soit G le groupe des applications à support fini de $\mathbb{Z}_-$ dans $\mathbb{Z}$ ordonné lexicographiquement. Les sous - groupes isolés de G forment une suite croissante. Précisément, ce sont les sous - groupes $G_n = \{g \in G : g(x) = 0 \quad \forall\, x \leq -n\}$. Notons g_n l'élément de G défini par $g_n(-n) = 1$, $g_n(-n') = 0$ si $n \neq n'$. G_n est engendré par $g_0, g_1, \ldots, g_{n-1}$ et g_n est la borne supérieure de G_n.

Lemme 1

Il existe un isomorphisme de groupes ordonnés φ_n de G dans G/G_n.

Soit $H_n = \{g \in G : g(x) = 0 \ \forall x > -n\}$. Il est clair que H_n est un sous-groupe et que $G = G_n \oplus H_n$. Soit φ'_n l'application de G dans H_n définie par $\varphi'_n(g) = g'$ avec $g'(x) = \begin{cases} g(x+n) & \text{si } x \leq -n \\ 0 & \text{si } -n \leq x \leq 0 \end{cases}$
φ'_n est un isomorphisme et comme H_n est isomorphe à G/G_n, on en déduit un isomorphisme φ_n de G dans G/G_n tel que $\varphi_n(g_k) = \overline{g_{k+n}}$ (classe de g_{k+n} dans G/G_n).

Choix du corps valué

Soit k un corps, $K = k(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ et v la valuation de K à valeurs dans G qui induit sur k la valuation triviale et telle que $v(X_n) = g_n$. Soit v_n la valuation subordonnée dont le groupe des valeurs est G/G_n ([4], C, th. 1). On a $v = v_o$. Pour tout corps k et tout entier n, nous noterons $(K, v_n)_k$ le corps valué ainsi défini.

Lemme 2

Les corps valués $(K,v)_{k(T_o,\ldots,T_{n-1})}$ et $(K,v_n)_k$ sont isomorphes.

Soit ψ_n l'isomorphisme de $k(T_o,\ldots,T_{n-1})(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ dans $k(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ défini par $\psi_n(T_i) = X_i$, $0 \leq i \leq n-1$ et $\psi_n(X_k) = X_{k+n}$. Il suffit de vérifier la commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccc} k(T_o,\ldots,T_{n-1})(X_i) & \xrightarrow{v} & G \\ \downarrow{\scriptstyle \psi_n} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_n} \\ k(X_i) & \xrightarrow{v_n} & G/G_n \end{array}$$

$v_n \circ \psi_n(T_i) = v_n(X_i) = 0 = \varphi_n \circ v(T_i)$ pour $1 \leq i \leq n-1$

et $v_n \circ \psi_n(X_i) = v_n(X_{i+n}) = \overline{g_{i+n}} = \varphi_n(g_i) = \varphi_n \circ v(X_i)$.

On suppose désormais la caractéristique de k différente de 2.

Lemme 3

Quel que soit $z \in (K,v)_k$, on a $v(z^2 + X_o - 1) < g_1$

Montrons d'abord que le polynôme $f = T^2 + X_o - 1$ n'a pas de racine dans K. En effet, toute racine est entière sur $k[X_o]$ et $k[X_o]$ est intégralement fermé dans K, donc, s'il existe une racine dans K, c'est un polynôme P de $k[X_o]$. Or, si le degré de P est supérieur à 1, $d^\circ(P^2 + X_o - 1) = 2\,d^\circ(P) > 0$, et, si $d^\circ(P) = 0$, $d^\circ(P^2 + X_o - 1) = 1 > 0$. f n'a pas de racine dans K.

Soit t une racine de f dans une extension quadratique L de K. v admet deux prolongements à L. En effet $L = K[t-1]$ et le polynôme minimal de $t-1$ est $T^2 + 2T + X_o$. La trace de $t-1$ a pour valuation 0 et la norme a pour valuation $g_o > 0$. On conclut par ([3], ch. III, § 16, th. 16-2). Soit v' un des prolongements de v à L, son groupe des valeurs est encore G. Notons que $k(X_o,t)$ étant algébrique sur $k(X_o)$, la restriction de v' à $k(X_o,t)$ est à valeurs dans G_1.

Soit z un élément de K, posons $z = \frac{P}{Q}$ où P et Q sont des éléments de $k[X_o,\ldots,X_s]$. Si $v(P) \neq v(Q)$, alors $v(z^2 + X_o - 1) \leq 0$. On suppose que $v(P) = v(Q) = n_o g_o + \ldots + n_s g_s$ $(n_i \in \mathbb{N})$.

En regroupant tous les monômes de P de la forme $X_o^m . X_1^{n_s} \ldots X_s^{n_s}$ (avec $m \in \mathbb{N}$), on obtient
$P = X_1^{n_1} \ldots X_s^{n_s} P'(X_o) + U$ où $P' \in k[X_o]$ et U un polynôme tel que $v(U) \geq (n_1+1) g_1 + n_2 g_2 + \ldots + n_s g_s$.

De même, $Q = X_1^{n_1} \ldots X_s^{n_s} Q'(X_o) + V$ avec $Q' \in k[X_o]$ et $v(V) \geq (n_1 + 1) g_1 + n_2 g_2 + \ldots + n_s g_s$. Par suite,
$P - tQ = X_1^{n_1} \ldots X_s^{n_s} (P' - tQ') + U - tV$; $P' - tQ' \in k(X_o,t)$, donc
$v'(P' - tQ') \leq g_1$;
$v'\left[X_1^{n_1} \ldots X_s^{n_s} (P' - tQ')\right] < v'(U - tV)$ et
$v'(P - tQ) = v'\left[X_1^{n_1} \ldots X_s^{n_s} (P' - tQ')\right] < (n_1+1)g_1 + n_2 g_2 + \ldots + n_s g_s$.
$v'\left(\frac{P}{Q} - t\right) = v'(P - tQ) - v(Q) < g_1$.
Si σ désigne le K - automorphisme de L, on a de même $v' \circ \sigma (z-t) < g_1$ et $v(z^2 + X_o - 1) = v'(z - t) + v' \circ \sigma (z - t) < g_1$ car g_1 est borne supérieur de G_1.

Corollaire 1

Le complété $(\hat{K}, v)_k$ de $(K, v)_k$ n'est pas hensélien.

Si $(\hat{K},v)$ était hensélien, le polynôme $T^2 + 2T + X_o$ aurait une racine dans $\hat{K}$ puisqu'il a des racines simples dans le corps résiduel. Il en serait de même de $f = T^2 + X_o - 1$. On aurait $0 \in f(\hat{K}) \subset \overline{f(K)}$ fermeture de $f(K)$ dans $\hat{K}$. Ceci est impossible puisque, d'après le lemme 3, $v[f(K)] < g_1$.

Corollaire 2

Quel que soit l'entier n, le complété $(\hat{K},v_n)_k$ de $(K,v_n)_k$ n'est pas hensélien.

D'après le lemme 2, $(\hat{K},v_n)_k = (\hat{K},v)_{k(T_o,\ldots,T_{n-1})}$ qui n'est pas hensélien d'après le corollaire 1.

Conclusion

La topologie de $(\hat{K},v)_K$ ne peut être définie par une valuation hensélienne d'après le lemme 0 et le corollaire 2 du lemme 3.

HENSELISE TOPOLOGIQUE D'UN CORPS VALUATIF

Définition 5

Soit K un corps valuatif. Un hensélisé topologique de K est un corps valuatif K^* topologiquement hensélien tel que :

1) K^* contient un sous - corps homéomorphe à K
2) Si L est un corps valuatif topologiquement hensélien contenant un sous - corps homéomorphe à K, L contient un sous - corps homéomorphe à K^*.

Remarque

Dans (2), on peut supposer que L est algébrique sur K, car si L est topologiquement hensélien, il en est de même de la fermeture algébrique de K dans L.

- Un corps valué admet toujours un hensélisé relativement à sa valuation mais un corps valuatif n'a pas toujours de hensélisé topologique comme le montre le

Théorème 4

Soient $(K,\mathcal{C})$ un corps valuatif et $\hat{K}$ son complété. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1) K admet un hensélisé topologique
2) $\hat{K}$ est topologiquement hensélien
3) il existe une valuation v de K définissant $\mathcal{C}$, dont les prolongements à la clôture algébrique de K sont deux à deux

indépendants. Le hensélisé topologique de K est alors la fermeture algébrique séparable de K dans $\hat{K}$.

Les propriétés ci dessus sont évidemment vérifiées si K est $\mathbb{R}$ - valuatif ; on supposera donc qu'il ne l'est pas.

Soit $\tilde{K}$ la fermeture algébrique séparable de K dans $\hat{K}$. La condition (2) est équivalente à (2') : $\tilde{K}$ est topologiquement hensélien d'après ([1] , § 8, ex. 14). Montrons que $(2') \Longrightarrow (3)$:

Soit $\tilde{v}$ une valuation hensélienne de $\tilde{K}$ et v sa restriction à K . Soit C la clôture algébrique séparable de K et $\mathcal{C}'$ une topologie valuative de C qui induit $\mathcal{C}$ sur K . La fermeture topologique de K dans $(C,\mathcal{C}')$ est homéomorphe à $\tilde{K}$, car dans un complété $\hat{C}$ de $(C,\mathcal{C}')$, $\tilde{K} = \hat{K} \cap C$. Soit w l'unique prolongement de $\tilde{v}$ à C . w est le seul prolongement de v définissant $\mathcal{C}'$. En effet, si w' est un autre tel prolongement, il existe un K - automorphisme σ de C tel que $w' = w \circ \sigma$ et σ est un homéomorphisme de $(C,\mathcal{C}')$ donc sa restriction à $\tilde{K}$ est l'identité.

w et w' ont même restriction $\tilde{v}$ à $\tilde{K}$ et comme $(\tilde{K},\tilde{v})$ est hensélien, $w = w'$.

Par suite, deux prolongements distincts de v à C définissent deux topologies différentes et il en est de même des prolongements à la clôture algébrique de K.

$3) \longrightarrow 1)$

Soit v une valuation de K dont les prolongements à C sont deux à deux indépendants et soit K^* le hensélisé de K relativement à v. Soit L une extension algébrique de K et $\mathcal{C}'$ une topologie valuative de L qui induit $\mathcal{C}$ sur K et telle que $(L,\mathcal{C}')$ soit topologiquement hensélien.

Il existe un prolongement $\tilde{v}$ de v à L qui définit $\mathcal{C}'$ (théorème 0) et les prolongements de $\tilde{v}$ à C sont dépendants. Comme ce sont aussi des prolongements de v, il n'y en a qu'un donc $(L,\tilde{v})$ est hensélien ; il contient donc K^* qui est un hensélisé topologique de K.

1) $\Longrightarrow$ 2')

Soit $(K^*, \mathcal{C}')$ un hensélisé topologique de K. Tous les K^* - automorphismes de C sont continus pour la topologie $\mathcal{C}''$ de C qui induit $\mathcal{C}'$ (théorème 2). Par suite, leur restriction à la fermeture $\tilde{K}$ de K dans $(C, \mathcal{C}'')$ est l'identité, donc $\tilde{K} \subset K^*$.

Soit v une valuation de K définissant $\mathcal{C}$ et w un prolongement de v à C. Pour tout idéal premier P de v, on note v_p et w_p les valuations déduites de v et w par les localisations correspondantes. Soit G le groupe de Galois de C sur K et $G_p^z = \{ \sigma \in G : w_p \circ \sigma = w_p \}$.

L'application $P \longrightarrow G_p^z$ est une application décroissante du spectre de v dans l'ensemble des sous - groupes de G. Soit K_p le corps des invariants de G_p^z. C'est un hensélisé de v_p ([4], F, théorème 2). Comme K_p est topologiquement hensélien, $K_p \supset K^*$. Donc $K^* \subset \bigcap_p K_p$. Un hensélisé est une extension immédiate ([4], F, théorème 3), donc, si A désigne l'anneau de v, A^* celui de la restriction de w à K^*, et p^* l'idéal premier de A^* au dessus de p, on a :

$$B_{p^*} = A_p + p^* B_{p^*} = A_p + p^* \quad ([4], C, \text{proposition } 1)$$

Donc $B \subset \bigcap_{p^*} (K + P^*)$. Comme $(K,\mathcal{C})$ est supposé non $\mathbb{R}$ - valuatif, les p^* forment un système fondamental de voisinages de 0 dans K^* et $\bigcap_{p^*} (K + P^*)$ est la fermeture de K dans K^*. Par suite, K est dense dans K^* donc $K^* \subset \tilde{K}$ et finalement $K^* = \tilde{K}$.

APPENDICE :

THEOREME 1 DANS LE CAS OÙ LA TOPOLOGIE EST METRISABLE

Théorème :

Soit $(K;\mathfrak{T})$ *un corps valuatif métrisable et* C *sa clôture algébrique. Si* C *est une extension monotopologisable de* $(K;\mathfrak{T})$ *, il existe une valuation hensélienne de* K *définissant* $\mathfrak{T}$.

Démonstration :

Soit G le groupe de Galois topologique de l'extension C : K ([1 bis] appendice n° 2). Soit v une valuation de K définissant $\mathfrak{T}$ et $\tilde{v}$ un prolongement à C . Comme $\mathfrak{T}$ est métrisable, le spectre non nul de v possède, pour la relation d'inclusion, une partie coïnitiale dénombrable ([4] , D , ex. 1). Soit P_n une telle suite décroissante d'idéaux premiers de v. On note v_n (resp. $\tilde{v}_n$) la valuation dont l'anneau est le localisé de l'anneau de v par P_n (resp. le localisé de l'anneau de $\tilde{v}$ par son idéal premier au dessus de P_n ([4] , F , proposition 1, cor. 4)).

Soit G_n le groupe de décomposition de $\tilde{v}_n$.

$G_n = \{ \sigma \in G : \tilde{v}_n \circ \sigma = \tilde{v}_n \}$. Les G_n^z constituent une suite croissante de sous - groupes fermés de G . ([3] , ch. III , 15-5).

Montrons que $G = \bigcup_n G_n^z$. Soit $\sigma \in G$. Comme C : $(K;\mathfrak{T})$ est une extension monotopologisable, $\tilde{v}$ et $\tilde{v} \circ \sigma$ sont dépendantes et donc elles possèdent un idéal premier commun P ([1] , § 7, prop. 3 et § 4, prop. 1) Comme la suite P_n est coïnitiale, $\exists\, n : P_n \subset P$ et P_n est aussi un idéal commun. Par suite, $\tilde{v}_n \circ \sigma = \tilde{v}_n$ et $\sigma \in G_n^z$.

Montrons que si $G_n \neq G$, G_n^z est d'intérieur vide. Soit L une extension de K de dimension finie et H le sous - groupe ouvert de G correspondant : $H = \{ \sigma \in G : \sigma/_L = Id_L \}$. Si l'on avait $H \subset G_n^z$, la restriction de $\tilde{v}_n$ à L serait hensélienne ; il en serait de même de v_n d'après ([1] , § 8 , ex. 17). Donc on aurait $G_n = G$. Par suite, si $G_n \neq G$, tout ouvert non vide rencontre le complémentaire de G_n^z, $\overset{o}{G}{}_n^z = \emptyset$.

Montrons qu'il existe n tel que $G = G_n^z$. Sinon, on aurait , $\forall$ n, $\overset{o}{G}{}_n^z = \emptyset$. Comme G est compact ([1 bis] appendice n° 2 - proposition 3), il est de Baire ([2] , ch. 9 , § 5, n° 3, th. 1) donc $\overbrace{\bigcup_n G_n^z}^{o} = \emptyset$ et, par suite, $G \neq \bigcup_n G_n^z$, d'où la contradiction. Enfin, si $G = G_n^z$, la valuation v_n est hensélienne et répond à la question.

[1] BOURBAKI

Algèbre commutative - Ch. 6 (valuations)

[1 bis] BOURBAKI

Algèbre - Ch. 4

[2] BOURBAKI

Topologie (livre III)

[3] ENDLER

Valuation theory (Springer Verlag - 1972)

[4] RIBENBOIM

Théorie des valuations (Université de Montréal - 1964)

F. BERRONDO
Mathématiques
U.E.R. Scientifiques
6, avenue Le Gorgeu
29283 - BREST-CEDEX