PUBLICATIONS MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUES DE RENNES

MICHEL MÉTIVIER

Sur l'approximation des solutions d'une équation différentielle stochastique

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1974, fascicule 3
« Séminaire de probabilités », , p. 1-15

<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1974___3_A1_0>

© Département de mathématiques et informatique, université de Rennes, 1974, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications mathématiques et informatiques de Rennes » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

SUR L'APPROXIMATION DES SOLUTIONS D'UNE EQUATION DIFFERENTIELLE STOCHASTIQUE

Par Michel METIVIER

Le présent exposé donne une version Hilbertienne d'un théorème d'approximation montré dans [3] pour le cas d'équations relatives à des processus prenant leur valeur dans $\mathbb{R}^\alpha$. La méthode de Kunita reprise ici est directement inspirée d'un travail de Strook-Varadhan [7] . Ce problème, dans le cas de processus réels semble avoir été abordé pour la première fois par Wong et Zakai [8] . Melle Allain [1] a repris le travail de Wong et Zakai dans le cas de processus à valeurs dans $\mathbb{R}^\alpha$. Dans ces deux derniers travaux, les hypothèses permettent de conclure à la convergence presque sure des approximations (uniformément par trajectoire), alors que dans le présent exposé, comme dans ceux de Kunita et Strook-Varadhan, les conclusions sont celles d'une convergence en moyenne quadratique.

1. Position du problème. On se place sur une base stochastique $(\Omega,(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}^+},P)$, la suite croissante de tribus $(\mathcal{F}_t)$ étant continue à droite, et complète pour P , et on considère un mouvement brownien (B_t) relatif à cette base, à valeurs dans un Hilbert $\mathbb{H}$, de covariance nucléaire C . Ceci signifie que $C\in\mathbb{H}\ \hat{\otimes}\ \mathbb{H}$ avec :

a) (B_t) est une martingale relative à la base $(\mathcal{F}_t)$

b) $B_t \otimes B_t - t.C$ est une martingale relative à la base $\mathcal{F}_t$ à valeurs dans le produit tensoriel $\mathbb{H}\ \hat{\otimes}\ \mathbb{H}$ projectif (muni de la norme trace).

Il en résulte, comme il est connu, que le Brownien ainsi défini est un Brownien au sens usuel. (cf. Curtain and Falb par exemple [2]).

On considère l'équation différentielle stochastique :

$$(1.1.)\quad d\,X_t = \sigma(X_t)\,d\,B_t + b(X_t)\,dt$$

où :

$$\forall x \in \mathbb{H} \qquad \sigma(x) \in \mathcal{L}(\mathbb{H}\,;\,\mathbb{H}) \qquad b(x) \in \mathbb{H}\ .$$

On rappelle qu'une solution de (1.1) est un processus X tel que $\forall t$

$$X_t = X_o + \int_o^t \sigma(X_s)\,d\,B_s + \int_o^t b(X_s)\,ds\ .$$

On considère la suite $(\Pi_n)_{n\geq 1}$ de partages dyadiques de $\mathbb{R}^+$; $\Pi_n = \{k/_{2^n} : k \in \mathbb{N}\}$. On notera $t_k^n = k/_{2^n}$ pour abréger.

Soit :

$$(1.2.)\qquad \dot{B}_t^{(n)} = \sum_k 2^n \,.\, 1_{]t_k^n, t_{k+1}^n]}(t)\,(B_{t_{k+1}^n} - B_{t_k^n})\ .$$

Autrement dit, le processus B^n défini par

$$(1.3.)\qquad B_t^n = \int_o^t \dot{B}_s^{(n)}\,ds$$

est le linéarisé par intervalle de B pour le partage Π_n .

On considère les solutions X^n de l'équation différentielle (1.4.) approchée de (1.1.), de condition initiale X_o :

$$(1.4.)\qquad \frac{d\,X_t}{dt} = \sigma(X_t)\ \dot{B}_t + b(X_t)\,dt\ ,$$

c'est-à-dire les processus X^n , vérifiant :

$$(1.5.)\qquad X_t^n = X_o + \int_o^t \sigma(X_s^n)\ \dot{B}_s\,ds + \int_o^t b(X_s^n)\,ds$$

à supposer évidemment que (1.5.) admette une solution.

La question est de savoir si les processus X^n convergent en un certain sens vers X .

La réponse est que, moyennant des conditions suffisantes qui seront précisées par la suite, on peut établir une convergence de (X^n) vers la solution d'une équation qui n'est pas (1.1.) mais l'équation (1.7.) ci-dessous que nous allons maintenant définir.

Désignons par $D_x\sigma(x)$ la différentielle de $x \rightsquigarrow \sigma(x)$, en x. C'est une application linéaire de $\mathbb{H}$ dans $\mathcal{L}(\mathbb{H} ; \mathbb{H})$. Pour tout couple (h_1,h_2) de vecteurs de $\mathbb{H}$, $(D_x\sigma(x).(\sigma(x).h_1)).h_2$ est un vecteur de $\mathbb{H}$.

Définition 1. On notera $D_x\sigma.\sigma(x)$ l'application bilinéaire de $(\mathbb{H} \times \mathbb{H})$ dans $\mathbb{H}$, définie par

$$(D_x\sigma.\sigma(x))(h_1,h_2) = (D_x\sigma(x) \,.\, (\sigma(x)h_1))\, h_2 \quad .$$

Comme toujours on désignera de la même façon l'application linéaire correspondante de $\mathbb{H} \hat{\otimes} \mathbb{H}$ dans $\mathbb{H}$.

Avec cette définition, l'expression suivante a un sens :

$$(D_x\, \sigma.\sigma) \,.\, C \quad .$$

Dans le cas particulier où H est de dimension finie d, il est immédiat de vérifier que l'application bilinéaire $D_x\sigma.\sigma(x)$ est représentée par le "tenseur"

$$(D_x\, a\sigma\,(x))^{ijk} = \sum_{r=1}^{d} \frac{\partial\, \sigma^{ij}}{\partial\, x^r}(x) \quad \sigma^{rk}(x)$$

et que

$$(D_x\, a\sigma\,(x)).C = \sum_{r,j,k} \frac{\partial \sigma^{ij}}{\partial x^r}(x) \quad \sigma^{rk}(x)\; C^{kj}$$

Soit alors

$$\tilde{b}(x) = b(x) + 1/2(D_x\sigma.\sigma\,(x))\; C \tag{1.6.}$$

L'équation (1.7.) annoncée est :

$$X_t = X_o + \int_o^t \sigma(X_s)\, d\, B_s + \int_o^t \tilde{b}(X_s)\, ds \quad . \tag{1.7.}$$

2. Enoncé du Résultat.

2.1. Notations. On notera donc $\mathbb{H} \hat{\otimes} \mathbb{H}$ le produit tensoriel projectif des espaces de Hilbert $\mathbb{H}$, et $\mathbb{H} \hat{\otimes}_2 \mathbb{H}$ le produit tensoriel de Hilbert-Schmidt (i.e. le complété de $\mathbb{H} \otimes \mathbb{H}$ pour la norme préhilbertienne associée au produit scalaire $(x \otimes y \mid x' \otimes y') = (x \mid x').(y \mid y')$, $(x \mid y)$ désignant le produit scalaire de x et y dans $\mathbb{H}$). Rappelons que toute application bilinéaire β de $\mathbb{H} \times \mathbb{H}$ dans $\mathbb{G}$ s'identifie avec sa norme, à un élément de $\mathcal{L}(\mathbb{H} \hat{\otimes} \mathbb{H} ; \mathbb{G})$.

On notera $|| \ ||_{H.S.}$ la norme dans $\mathbb{H} \hat{\otimes}_2 \mathbb{H}$ et $|| \ ||_{H.S.}$ également la norme dans $\mathcal{L}(\mathbb{H} \hat{\otimes}_2 \mathbb{H} ; G)$.

On notera $|| \ ||_{Tr}$ la norme dans $\mathbb{H} \hat{\otimes} \mathbb{H}$ (norme "trace").

2.2. Hypothèses générales. Nous supposerons toujours que :

A) σ est bornée et différentiable comme application à valeurs dans $\mathcal{L}(\mathbb{H},\mathbb{H})$ de différentielle $D_x\sigma$ continue et bornée. On suppose en outre que $D_x\sigma.\sigma(x)$ (cf. définition 1) est un élément de $\mathcal{L}(\mathbb{H} \hat{\otimes}_2 \mathbb{H} ; \mathbb{H})$ et que $\sup_{x \in \mathbb{H}} ||D_x\sigma.\sigma(x)||_{H.S} < +\infty$.

B) b est borné différentiable comme application à valeurs dans $\mathbb{H}$, de différentielle $D_x b$ continue et bornée.

On sait que, sous ces hypothèses, les équations (1.1.), (1.5.) et (1.7.) ont une solution unique (forte) pour une condition initiale x_o donnée.

2.3. Théorème. Il existe une suite croissante de temps d'arrêt (τ_p), $\tau_n \uparrow +\infty$ telle que pour tout p et tout T

$$\lim_{n \to \infty} \sup_{t \leq T} E||X^n_{t \wedge \tau_p} - X_{t \wedge \tau_p}||^2 = 0 \quad . \tag{2.2.1.}$$

De façon plus précise, soit τ_p la famille de temps d'arrêt définie par :

$$\tau_p = \inf \{t : ||B_t|| \geq p\}$$

et soit $B_t^p = B_{t \wedge \tau_p}$ le Brownien arrêté à p .

Les solutions $X^{p,n}$ de l'équation

$$X_t^{p,n} = x_o + \int_o^t \sigma(X_s^{p,n}) \dot{B}_s ds + \int_o^{t \wedge \tau} b(X_s^{p,n}) ds$$

et la solution X^p de

$$X_t^p = x_o + \int_o^t \sigma(X_s^p) d B_s^p + \int_o^{t \wedge \tau} \tilde{b}(X_s^p) ds$$

vérifient

$$\lim_{n \to \infty} \sup_{t \leq T} E ||X_t^{p,n} - X_t^p||^2 = 0 \qquad (2.2.2.)$$

2.4. Théorème. Il est possible d'extraire de la suite (X^n) de processus une suite (X^{n_k}) telle que pour tout T

$$\text{ps.} \quad \lim_k \sup_{t \leq T} ||X_t^{n_k} - X_t|| = 0 .$$

3. Preuve des théorèmes. Remarquons que de la formule (2.2.2.) du théorème (2.3.) et un argument standard utilisant Borel-Cantelli, on déduit immédiatement le théorème 2.4.

Nous allons donc prouver par étape la relation (2.2.2.)

3.1. Rappel de lemmes sur la variation quadratique d'une martingale hilbertienne.

Lemme 1. Soit M une martingale bornée, continue, à valeurs dans H . Considérons les suites de variables aléatoires

$$U(n,t) = \sum_{\substack{t_k \in \Pi_n \\ t_k \leq t}} ||M_{t_{k+1}} - M_{t_k}||_H^2$$

$$V(n,t) = \sum_{\substack{t_k \in \Pi_n \\ t_k \leq t}} (M_{t_{k+1}} - M_{t_k}) \otimes (M_{t_{k+1}} - M_{t_k})$$

Soient M et M^2 les processus naturels de M^2 et M M respectivement (cf. 4).

On a alors, pour tout $T < \infty$,

$$\limsup_{n\to\infty} \; \sup_{t\leq T} E\left|U(n,t) - \langle\langle M\rangle\rangle_t\right|^2 = 0$$

$$\limsup_{n\to\infty} \; \sup_{t\leq T} E\left|\left|V(n,t) - \langle M\rangle_t\right|\right|^2_{H.S} = 0$$

Démonstration. (suivant une méthode due à Millar dans le cas réel([6])

On a l'égalité très simple :

$$(3.1.1.)\quad M_t\otimes M_t - M_o\otimes M_o = V(n,t) - \int_o^t \Phi^n(u)\otimes d\,M_u - \int_o^t dM_u \otimes \Phi^n(u)$$

en notant $\Phi^n(u) = \sum_k 1_{]t_k,t_{k+1}]}(u) \cdot M_{t_k}$

et en considérant un élément h de $\mathbb{H}$ comme un opérateur linéaire $g \rightsquigarrow h \otimes g$ (resp. $g \rightsquigarrow g \otimes h$) dans la première intégrale stochastique (resp. la deuxième intégrale stochastique) de (3.1.1.).

En considérant la forme bilinéaire $(h|g)$ à la place de l'application bilinéaire $h \otimes g$ on obtient de même

$$||M_t||^2 - ||M_o||^2 = U(n,t) - 2\int_o^t (\Phi^n(u) \mid d\,M_u) .$$

La convergence de Φ^n vers M simplement en étant borné, implique la convergence de Φ^n vers M dans $L^2_{\mathbb{H}}(\mathbb{R}^+\times\Omega,\mathcal{P},\langle\langle m\rangle\rangle)$, et donc la convergence de $\int_o^t \Phi^n_u \otimes d\,M_u$ vers $\int_o^t M_u \otimes d\,M_u$ dans $L^2_{\mathbb{H}\hat{\otimes}_2\mathbb{H}}(\Omega,\mathcal{F},P)$ et la convergence de $\int_o^t(\Phi^n_u|d\,M_u)$ vers $\int_o^t(M_u \mid d\,M_u)$ dans $L^2(\Omega,\mathcal{F},P)$.

Il existe donc un processus réel positif, évidemment croissant S_t et un processus A_t à valeurs dans $\mathbb{H}\hat{\otimes}_2\mathbb{H}$ tels que

$$\limsup_{n\to\infty} \; \sup_{t\in T} E \mid U(n,t) - S_t\mid^2 = 0$$

$$\limsup_{n\to\infty} \; \sup_{t\in T} E\,||V(n,t) - A_t||^2_{H.S.} = 0$$

avec en outre

$$(3.1.2.)\quad S_t = ||M_t||^2 - ||M_o||^2 + 2\int_o^t (M_u|dM_u)$$

$$(3.1.3.)\quad A_t = M_t \otimes M_t - M_o \otimes M_o + \int_o^t M_u \otimes d\,M_u + \int_o^t d\,M_u \otimes M_u .$$

La formule (3.1.2) prouve immédiatement que S_t est continu tel que $||M_t||^2 - S_t$ soit une martingale. Donc $S_t = \langle\langle M_t \rangle\rangle$. Rappelons que le processus naturel V d'une quasi-martingale X de classe D à valeurs dans un espace de Banach $\mathcal{B}$, dual séparable d'un espace de Banach $\mathbb{F}$, est caractérisé comme l'unique processus V continu à droite à valeurs dans $\mathcal{B}$, tel que pour tout $y \in \mathbb{F}$ $t \rightsquigarrow \langle V_t, y\rangle$ soit à variation bornée, et vérifiant

(3.1.4) $\forall t \quad \forall F \in \mathcal{F}_t \quad E(1_F . V_t) = \int_{]0,t] \times E} E(1_F | \mathcal{F}_{u-}) \, d\lambda$

où λ est la mesure définie sur la tribu des prévisibles par

$\forall s \leqslant t$, $F \in \mathcal{F}_s$

$$\lambda(]s,t] \times F) = E\{1_F . (X_t - X_s)\} \in \mathcal{B} .$$

Nous considérons ici $X_t = M_t \otimes M_t \in \mathbb{H} \hat{\otimes} \mathbb{H} \subset \mathbb{H} \hat{\otimes}_2 \mathbb{H}$.

Nous allons montrer que A est le processus naturel de X_t , considéré comme prenant ses valeurs dans l'espace de Hilbert $\mathbb{H} \hat{\otimes}_2 \mathbb{H}$. Comme λ prend ses valeurs dans $\mathbb{H} \hat{\otimes} \mathbb{H}$ la formule (3.1.4) montre qu'en fait $\langle M \rangle_t = A_t$ p.s, et comme $t \rightsquigarrow A_t(\omega)$ et $t \rightsquigarrow \langle M_t \rangle(\omega)$ sont tous deux continus à droite en tant qu'applications à valeurs dans $\mathbb{H} \hat{\otimes}_2 \mathbb{H}$, les processus A et $\langle M \rangle$ sont indistingables.

Pour montrer que (3.1.4) est vérifié pour un processus V donné, il suffit évidemment de montrer que pour un ensemble total $\mathbb{F}_o \subset \mathbb{F}$ on a

(3.1.5) $\forall y \in \mathbb{F}_o \quad \forall t \ , \quad \forall F \in \mathcal{F}_t$

$$E(1_F . \langle V_t, y\rangle) = \int_{]0,t] \times F} E(1_F | \mathcal{F}_{u-}) \, d\langle \lambda, y \rangle .$$

Notons que A_t est un élément symétrique de $\mathbb{H} \hat{\otimes}_2 \mathbb{H}$. Nous avons donc à montrer que $\forall h \in \mathbb{H}$, $t \in \mathbb{R}^+$ et $F \in \mathcal{F}_t$

(3.1.6) $E(1_F.\langle A_t,h\otimes h\rangle) = \int_{]o,t]\times F} E(1_F|\mathcal{F}_u^-)\, d\langle \lambda ,h\otimes h\rangle$.

Mais d'une part $\langle\lambda,h\otimes h\rangle$ est la mesure sur la tribu des previsibles engendrée par le processus $\langle M,h\rangle$ et d'autre part

$$\langle A_t,h\otimes h\rangle = \langle M_t,h\rangle^2 - \langle M_o,h\rangle^2 + 2\int_o^t \langle M_u,h\rangle\, d\langle M_u,h\rangle .$$

Comme cette dernière formule exprime que le processus continu $\langle A,h\otimes h\rangle$ est le processus croissant naturel de la sous martingale $|\langle M_t,h\rangle|^2$, la formule (3.1.6) en résulte.■

Lemme 2. On suppose que M est une martingale bornée, continue, à valeurs dans H . Soit Φ un processus continu, à valeurs dans $\mathcal{L}(H\hat{\otimes}_2 H ; G)$, de norme uniformément bornée par K .

$$\Phi^n(u,\omega) = \sum_{t_k\in\eta_n} 1_{]t_k,t_{k+1}]}(u)\ \Phi(t_k,\omega) .$$

Alors, pour tout T

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{t\le T} E\Big|\Big| \sum_{\substack{t_k\in\eta_n\\ t_{k+1}\le t}} \Phi(t_k,\cdot).(M_{t_{k+1}}-M_{t_k})\otimes(M_{t_{k+1}}-M_{t_k}) - \int_o^t \Phi_n\, d\langle M_u\rangle \Big|\Big|^2 = 0$$

Démonstration. Posons

$$(3.1.7)\quad W(n,t) = \sum_{\substack{t_k\in\eta_n\\ t_{k+1}\le t}} \Phi_{t_k}.(M_{t_{k+1}}-M_{t_k})\otimes(M_{t_{k+1}}-M_{t_k}) - \int_o^t \Phi_u\, d\langle M_u\rangle$$

on a, avec les notations du lemme précédent,

(3.1.8)

$$W(n,t) = \int_o^t (\Phi^n(u)-\Phi(u))\, d\langle M_u\rangle + \sum_{\substack{t_k\in\eta_n\\ t_k\ t}} \Phi_{t_k}\Big[(M_{t_{k+1}}-M_{t_k})^{\otimes 2} - \langle M_{t_{k+1}}\rangle + \langle M_{t_k}\rangle\Big] .$$

En posant $A_k = \Phi_{t_k}.\Big[(M_{t_{k+1}}-M_{t_k})\otimes(M_{t_{k+1}}-M_{t_k}) - \langle M_{t_{k+1}}\rangle + \langle M_{t_k}\rangle\Big]$

grâce à la propriété de martingale de M et de $M\otimes M-\langle M\rangle$:

on voit immédiatement que, si on pose

$$\alpha_t = \sum_{\{k:t_{k_n} \leqslant t\}} A_k$$

le processus $(\alpha_{t_k}, \mathcal{F}_{t_k})_{k \in \mathbb{N}}$ est une martingale. Par suite, d'après une inégalité de Doob (cf. [5] remarque 2 chap. VI)

$$E \sup_{t \leqslant T} ||\alpha_t||^2 \leqslant E \sup_{\{k:t_k \leqslant T\}} (||\alpha_{t_k}||^2) \leqslant 2\, E||\alpha_T||^2$$

Comme $E(\Lambda_k . A_\ell) = 0$, pour $k \neq l$ on a donc

$$(3.1.9) \quad E \sup_{t \leqslant T} ||\alpha_t||^2 \leqslant 2\, E \sum_{\{k:t_{k_n} \leqslant T\}} ||A_k||^2 .$$

En utilisant à nouveau la propriété de Martingale

(3.1.10)

$$E||\sum_{t_{k_n} \leqslant T} A_k||^2 \leqslant K^2 || \sum_{t_{k_n} \leqslant T} (M_{t_{k+1}} - M_{t_k})^{\otimes 2} - \langle M_{t_{k+1}} \rangle + \langle M_{t_k} \rangle ||^2_{H.S} .$$

Par ailleurs, pour chaque trajectoire ω, $\langle M_u \rangle$ définit une mesure à variation finie $d|\langle M_u \rangle|$ (majorée par la mesure définie par $\ll M \gg$)

$$E \sup_{t \leqslant T} ||\int_o^t (\Phi^n(u) - \Phi(u)) d\langle M_u \rangle||^2_{H.S} \leqslant E\left[\int_o^T ||\Phi^n(u) - \Phi(u)||_{H.S}\, d|\langle M_u \rangle|\right]^2$$

$$\leqslant E\left[\ll M \gg . \sup_{u \leqslant T} ||\Phi^n(u) - \Phi(u)||_{H.S}\right]^2$$

Comme les fonctions $\Phi^n - \Phi$ convergent sur toute trajectoire uniformément vers zéro, les processus $||\Phi^n - \Phi||_{H.S}$ étant par ailleurs borné, on a bien

(3.1.11)

$$\lim_{n \to o} E \sup_{t \leqslant T} ||\int_o^t (\Phi^n(u) - \Phi(u))\, d\langle M_u \rangle||^2_{H.S} = 0 .$$

Le lemme 1, avec les inégalités (3.1.9), (3.1.10) et (3.1.11) implique donc maintenant le lemme 2. ■

3.2. Expression approchée de X^n

On écrira B_t au lieu de B^p_t pour simplifier dans toute la suite.

1ère Formule : En intégrant deux fois par partie, pour une fonction trois fois différentiable f sur $\mathbb{R}$:

$$f(t_{k+1})-f(t_k)=(t_{k+1}-t_k)f'(t_k)+\frac{1}{2}(t_{k+1}-t_k)^2 f''(t_k)+\frac{1}{2}\int_{t_k}^{t_{k+1}}(t_{k+1}-u)^2 f'''(u)\,du$$

2ème Formule : On applique cette formule à Y^n trajectoire par trajectoire où $Y^n_t = \int_o^t A^n_u\,du$ avec :

$A^n_u = \sigma(X^n_u)\cdot \dot{B}^n_u$ processus à valeurs dans $\mathbb{H}$.

On obtient ainsi

$$(3.2.1.)\quad X^n(t) = \sum_{k:t^n_{k+1}\le t} (t^n_{k+1}-t^n_k)A^n_{t_k} + \frac{1}{2}\sum_{k:t^n_{k+1}\le t}(t_{k+1}-t_k)^2\,\dot{A}^n_{t_k}$$

$$+\frac{1}{2}\int_{t_k}^{t_{k+1}}(t_{k+1}-u)^2\,\ddot{A}^n_u\,du + Y^n(t)-Y^n_{[2^n t]2^{-n}}+\int_o^t b(X^n_s)ds$$

A partir de maintenant pour les évaluations intermédiaires on ne répétera plus n : on écrira $Y_t = \int_o^t A_u\,du$

$$A_u = \sigma(X_u)\,\dot{B}_u$$

3.3. Formule de Dérivation et majoration.

$$(3.3.1.)\quad \dot{X}_u = A_u + b(X_u)$$

$$(3.3.2.)\quad A_u = \sigma(X_u).\dot{B}_u \qquad \dot{B}_u \text{ étant constant dans chaque intervalle }]t_k,t_{k+1}] \ .$$

$$(3.3.3.)\quad \dot{A}_u = \left[D_x\sigma(X_u)\ .\ \left[A_u+b(X_u)\right]\right]\ .\ \dot{B}_u$$

Commentaire : $D_x\,\sigma(y) \in \mathcal{L}(\mathbb{H};\mathcal{L}(\mathbb{H};\mathbb{H}))$

$$D_x\,\sigma(y)\ .\ h \in \mathcal{L}(\mathbb{H};\mathbb{H})$$

$$\left[D_x\,\sigma(y)\ .\ h\right]\ .\ h \in \mathbb{H}$$

(3.3.4.)

$$\ddot{A}_u = \left[D^2_{x^2}\sigma(X_u).[A_u+b(X_u)]^{\otimes 2}\right].\dot{B}_u + D_x\sigma(X_u).\left[\dot{A}_u+D_xb(X_u).\dot{X}_u\right].B_u$$

Utilisant la formule de définition (1.2.), et la définition 1 .

(3.3.5.) $$\dot{A}_u = 2^{2^n}\left[D_x\sigma.\sigma(X_u)\right].(B_{t_{k+1}}-B_{t_k})^{\otimes 2} + 2^n\left[D_x\sigma(X_u).b(X_u)\right].(B_{t_{k+1}}-B_{t_k})$$

pour $t_k < u \leqslant t_{k+1}$.

On voit de même qu'en explicitant A_u et $\dot{A}_u$, la formule (3.3.4.) s'écrit, pour $t_k < u \leqslant t_{k+1}$

(3.3.6.)

$$\ddot{A}_u = 2^{3^n}\Psi_1(X_u).(B_{t_{k+1}}-B_{t_k})^{\otimes 3} + 2^{2^n}\Psi_2(X_u)(B_{t_{k+1}}-B_{t_k})^{\otimes 2} + 2^n\Psi_3(X_u)=(B_{t_{k+1}}-B_{t_k})$$

où Ψ_1, Ψ_2 et Ψ_3 sont des applications continues bornées de $\mathbb{H}$ dans $\mathcal{L}(\mathbb{H}^{\otimes 3}\ ;\ \mathbb{H})$, $\mathcal{L}(\mathbb{H}^{\otimes 2}\ ;\ \mathbb{H})$ et $\mathcal{L}(\mathbb{H}\ ;\ \mathbb{H})$ respectivement.

On déduit évidemment des formules qui précèdent l'existence d'une constante K , telle que

$$\forall u \in]t_k, t_{k+1}]$$

(3.3.7.) $$||A_u|| \leqslant K.2^n\ ||B_{t_{k+1}}-B_{t_k}||$$

(3.3.8.) $$||\ddot{A}_u|| \leqslant K\left[2^{3^n}\ ||B_{t_{k+1}}-B_{t_k}||^3 + 2^{2^n}||B_{t_{k+1}}-B_{t_k}||^2 + 2^n||B_{t_{k+1}}-B_{t_k}||\right]$$

3.4. Evaluation des différents termes de la formule (3.2.1.)

1er terme : On notera dans tout ce qui suit $[u^n] = \sup\{t_k^n : t_k^n < u\}$. On obtient ainsi :

(3.4.1.) $$\sum_{t^n_{k+1}\leqslant t}(t^n_{k+1}-t^n_k)A^n_{t^n_k} = \sum_k \sigma(X^n_{[u]})(B_{t^n_{k+1}}-B_{t^n_k}) =$$

$$= \int_0^t \sigma(X^n_{[u^n]})\ d\ B_u - \int_{[t^n]}^t \sigma(X^n_{[u^n]})\ dB_u$$

2ème terme :

$$(3.4.2.)\quad \frac{1}{2}\sum_{t^n_{k+1}\leq t}(t^n_{k+1}-t^n_k)^2\,\dot{A}^n_{t^n_k}=\frac{1}{2}\sum_{t^n_{k+1}\leq t}D_x\sigma.\sigma(X^n_{t^n_k}).(B_{t^n_{k+1}}-B_{t^n_k})^{\otimes 2}$$

$$+\frac{1}{2^{n+1}}\int_0^{[t^n]}D_x\sigma\,(X^n_u).b(X^n_{[u]})\,dB_u$$

3ème terme :

Le 3ème terme, en vertu de (3.3. 8.) se laisse majorer par

$$(3.4.3.)\quad I(n,t)\leq K\left[\sup_k||B_{t^n_{k+1}}-B_{t^n_k}||+\frac{1}{2^n}\right]\left(\sum_k||B_{t^n_{k+1}}-B_{t^n_k}||^2+\frac{1}{2^n}\right)$$

3.5. Majoration finale pour $X_t - X^n_t$, X_t vérifiant (1.7)

$$(3.5.1.)\quad X_t-X^n_t=\int_0^t\left[\sigma(X_u)-\sigma(X^n_{[u]})\right]d\,B_u+\int_0^t(b(X_u)-b(X^n_u))\,du$$

$$+\frac{1}{2}\left[\int_0^t D_x\sigma.\sigma(X_u).C\,du-\sum_{[k:t^n_{k+1}\leq t]}D_x\sigma.\sigma(X^n_{t^n_k})(B_{t^n_{k+1}}-B_{t^n_k})^{\otimes 2}\right.$$

$$+\ \varepsilon(n,t)$$

où, compte tenu de (3.2.1.) et des formules (3.4.1.) à (3.4.3.) le terme $\varepsilon(n,t)$ donne lieu à la majoration.

$$(3.5.2.)\quad ||\varepsilon(n,t)||\leq \text{constante}\times\left[\sup_{[t]\leq s\leq t}||B_t-B_s||\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2^n}||\int_0^t D_x\sigma.b(X^n_{[u]})d\,B_u||\right]+I(n,t)$$

Remarquons également que

$$\sup_{t\leq T}I(n,t)\leq K\left[\sup_{\substack{|t-s|\leq 2^{-n}\\ t,s\leq T}}||B_t-B_s||+\frac{1}{2^n}\right]\left(\sum_{\{k:t^n_{k+1}\leq T\}}||B_{t^n_{k+1}}-B_{t^n_k}||^2+\frac{1}{2^n}\right)$$

Comme $U_n=\sum_{\{k:t^n_{k+1}\leq T\}}||B_{t^n_{k+1}}-B_{t^n_k}||^2$ converge dans L^2 (lemme 1), la décroissance vers zéro, de la suite uniformément bornée de varia-

ble $\eta_n = \sup_{\substack{|t-s|\leq 2^{-n} \\ t,s\leq T}} ||B_t - B_s|| + \frac{1}{2^n}$, implique la convergence de $\eta_n \cdot U_n$ vers zéro dans L^2 (remarquer que $|U_n|^2$ est uniformément intégrable, qu'il en est de même de $\eta_n^2 \cdot U_n^2$ et que $\eta_n^2 \cdot U_n^2$ converge en outre en probabilité vers zéro).

Notons que (inégalité de Doob appliquée aux $T.2^n$ sous-martingale $(||B_t - B_{t_k}||^4)_{t\in]t_k, t_{k+1}]}$) ,

$$(3.5.3.)\quad E \sup_{\substack{t_k<t\leq T \\ t-t_k\leq \frac{1}{2^n}}} (||B_t - B_{t_k}||^2) \leq \text{constante}.2^n\, E||B_{t_{k+1}} - B_{t_k}||^4 \leq \text{constante}.\frac{1}{2^n}$$

et, en utilisant une inégalité de Doob (cf. [5] chap. VI, remarque 2),

$$E \sup_{t\leq T}||\int_o^t D_x\sigma.b(X^n_{[u]})d\,B_u||^2 \leq 4E||\int_o^T D_x\sigma.b(X^n_{[u]})d\,B_u||^2 =$$

$$\leq \text{constante}.E\int_o^T||\Psi||^2 d\,\langle B_u\rangle$$

où $\Psi = D_x\sigma.b\,(X^n_{[u]})$. Donc

$$E \sup_{t\leq T}||\int_o^t D_x\sigma.b(X^n_{[u]}).d\,B_u||^2 \leq \text{constante}.(E\,||B_T||^2) \ .$$

La formule (3.2.1.) implique donc :

$$(3.5.4.)\qquad \lim_{n\to\infty} E(\sup_{t\leq T}||\varepsilon(n,t)||^2) = 0$$

Notons également que si $[s] = t_k$

$$X^n_s - X^n_{[s]} = 2^n \int_{[s]}^s \sigma(X^n_u)(B_{t_{k+1}} - B_{t_k})du + \int_{[s]}^s b(X^n_u)\,du$$

d'où $||X^n_s - X^n_{[s]}||^2 \leq 2.2^{2^n}||B_{t_{k+1}} - B_{t_k}||^2 \left|\int_{t_k}^{t_{k+1}}||\sigma(X^n_u)||du\right|^2$

$$+ 2||\int_{t_k}^{t_{k+1}} b(X^n_u\,ds)||^2$$

Et

$$E \sup_{s\leq T}||X^n_s - X^n_{[s]}||^2 \leq 2K^2E\left[\sup||B_{t_{k+1}} - B_{t_k}||^2 + \frac{1}{2^{2^n}}\right] \leq \text{constante}.\frac{1}{2^n}$$

Un raisonnement déjà fait précédemment, appliqué à la martingale $\int_o^t (\sigma(X^n_s) - \sigma(X^n_{[s]}))\,d\,B_s$, et le caractère lipschitzien

de σ impliquent

$$(3.5.5.)\quad E \sup_{t\leq T} \left|\left| \int_o^t (\sigma(X_s^n)-\sigma(X_{[s]}^n))\, d\, B_s \right|\right|^2 \leq \left(\int_o^T K^2 . E\left|\left|X_s^n - X_{[s]}^n\right|\right|^2 ds\right)^2$$

On voit que, compte tenu du lemme 2 , de (3.5.4.) et (3.5.

on peut déduire de (3.5.1.), et du caractère lipschitzien de σ et b

$$E\left(\sup_{t\leq T} \left|\left|X_t - X_t^n\right|\right|^2\right) \leq 4\, K^2 \int_o^T E\left|\left|X_s - X_s^n\right|\right|^2 ds + \varepsilon'(n)$$

où $\lim_{n\to\infty} \varepsilon'(n) = 0$.

Le lemme classique de "Cronwal" permet de conclure

$$E\left(\sup_{t\leq T} \left|\left|X_t - X_t^n\right|\right|^2\right) \leq \varepsilon'_n \exp 4\, K^2 . T$$

D'où finalement le théorème.

REFERENCES

1. M-F Allain. Sur quelques types d'approximation des solutions d'équations différentielles stochastiques. Thèse 3ème cycle Rennes, Juin 1974.

2. R-F Curtain and P-L Falb. Stochastic Differential equations in Hilbert spaces. Journal of differential equations, 10, (1971), 412-430.

3. H Kunita. Stochastic Integrals band on martingales taking values in Hilbert spaces. Nogoya Math. J., vol. 38, (1970), 41-52.

4. M Métivier. Intégrale stochastique par rapport à des processus à valeurs dans un espace de Banach réflexif. Theory of Probability and Appl. vol. (1974),

5. A Meyer. Probabilités et Potentiels. Hermann, (1966).

6. P-W Millar. Martingale Integrals. Trans. Am. Math. Soc., vol. 133, (1968), 145-166.

7. J Stroock-Varadhan. On the support of diffusion processes with application to the strong maximum principle. 6th Berkeley Symposium, vol. 3.

8. E Wong et M Zakaï. On the relation between ordinary and stochastic differential equations. International Journal of Engeneering sciences, vol. 3, (1965), 213-229.