PUBLICATIONS MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUES DE RENNES

MICHEL LAZARUS

Les familles libres maximales d'un module ont-elles même cardinal ?

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1973, fascicule 4
« Séminaire d'algèbre et de logique », , exp. n° 4, p. 1-12

<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1973___4_A4_0>

© Département de mathématiques et informatique, université de Rennes, 1973, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications mathématiques et informatiques de Rennes » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

LES FAMILLES LIBRES MAXIMALES D'UN MODULE ONT-ELLES MEME CARDINAL ?

par

Michel LAZARUS

1. Généralités

Le théorème de la dimension pour les espaces vectoriels [1] peut s'exprimer ainsi : toutes les familles libres maximales d'un espace vectoriel ont même cardinal. Soit maintenant A un anneau et M un A-module. Rappelons qu'une partie S de M est dite libre si toute égalité de la forme $\sum_{s \in S'} \lambda_s.s = 0$, où S' est une partie finie de S, entraîne les égalités $\lambda_s = 0$, $\forall\ s \in S'$. ϕ est une partie libre de M. Ce peut être la seule (dans le $\mathbb{Z}$-module $\mathbb{Z}/(2)$ p.e.).

1.1. Les parties libres de M forment un sous-ensemble inductif, pour l'inclusion, de $\mathcal{P}(M)$. Soit $\mathcal{F}$ une famille totalement adonné de parties libres de M et $T = \bigcup_{S \in \mathcal{F}} S$. T est une partie libre car si $\sum_{t \in T'} \lambda_t.t = 0$, où $T' \subset T$ est finie, on a $T' \subset S$ pour $S \in \mathcal{F}$; et, S étant libre, $\lambda_t = 0$ $\forall\ t \in T'$.

Le théorème de Zorn et (1.1) justifient le titre.

Nous disons qu'un A-module M vérifie la propriété (P) si toutes les familles libres maximales de M ont même cardinal. Dans la suite, A sera toujours supposé commutatif et unitaire. Rappelons que toutes les bases d'un module libre M ont même cardinal [1] que nous noterons dim M.

Si S est une partie libre de M, nous désignerons par L(S) le sous-module libre de M engendré par S ; on a dim L(S) = card S. Enfin remarquons que pour qu'une partie libre S de M soit maximale, il faut et il suffit que

$$\forall\, x \in M,\quad \exists \lambda \neq 0 : \lambda\, x \in L(S).$$

Soient $(x_1,\ldots x_p)$ des éléments de A^n. Nous appellerons mineurs d'ordre p du système $(x_1,\ldots x_p)$ les mineurs d'ordre p de la matrice n x p dont les colonnes sont les coordonnées, dans la base canonique de A^n, des x_i.
Si $1 \leqslant i_1 <\ldots< i_p \leqslant n$, le mineur d'ordre p correspondant sera noté $\Delta^{i_1<\ldots<i_p}$.

1.2. Tout système libre de A^n a au plus n éléments.
Soit S un système libre de p éléments de A^n. On a $L(S) \hookrightarrow A^n$, d'où $\Lambda^p L(S) \hookrightarrow \Lambda^p A^n$. Comme $\Lambda^p L(S) \simeq A$, on a $\Lambda^p A^n \neq 0$, donc $p \leqslant n$ ([2]).

1.3. Soit $x = (a_1,\ldots a_n) \in A^n$. Dire que {x} est une partie libre, c'est dire que $\mathrm{Ann}(\Sigma(a_i)) = 0$.
En effet, $\mathrm{Ann}(\Sigma(a_i)) = \bigcap \mathrm{Ann}\ a_i$ et dire que {x} est libre, c'est dire qu'il n'existe pas de λ non nul tel que $\lambda a_i = 0 \quad \forall\, i$.

1.4. Soient $x_1,\ldots x_p \in A^n - (x_1,\ldots x_p)$ libre $\Longleftrightarrow \mathrm{Ann}\Big(\sum_{i_1<\ldots} (\Delta^{i_1<\ldots<i_p})\Big) = 0$
Dire que $(x_1,\ldots x_p)$ est libre, c'est dire que $x_1 \wedge\ldots\wedge x_p \in \Lambda^p A^n$ est libre [2]. Mais les coordonnées de $x_1 \wedge\ldots\wedge x_p$ par rapport à la base canonique de $\Lambda^p A^n$ sont les $\Delta^{i_1<\ldots<i_p}$. D'où le résultat d'après 1.3.

Soit $\varphi : A^n \longrightarrow A^n$; alors [2] il existe $\psi : A^n \longrightarrow A^n$ telle que $\varphi\psi = \psi\varphi = \det\varphi . I$; par suite $\det\varphi . A^n \subset \mathrm{Im}\varphi$.

1.5. Soit $(x_1,\ldots x_n)$ un système libre de A^n. Alors il existe $d \in A$, non diviseur de 0, tel que $dA^n \subset L(x_1,\ldots x_n)$.

Soit $\varphi : A^n \longrightarrow A^n$ telle que $\varphi(e_i) = x_i$ (e_i = base canonique de A^n). $d = \det\varphi$ est le déterminant du système $(x_1,\ldots x_n)$. Comme ce système est libre, d est régulier (1.4), et on a $dA^n \subset \mathrm{Im}\,\varphi = L(x_1,\ldots x_n)$.

Rappelons le :

Lemme d'évitement : Soient $p_1,\ldots p_n$ des idéaux premiers de A et L un A-module libre. Alors si M est un sous-module de L, inclus dans $\bigcup_{i=1}^{n} p_i L$, il existe i tel que $M \subset p_i L$.

On observe d'abord que si $p \subset A$, $x \in pL$ est équivalent à : toutes les coordonnées de x (par rapport à une base de L) sont dans p ; puis si p est premier que $\alpha x \in pL \Longleftrightarrow x \in pL$ ou $\alpha \in p$.
Ceci dit si $M \subset \bigcup_{i=1}^{n} p_i L$, on peut supposer que $i \neq j \Longrightarrow p_i \not\subset p_j$. Si $M \not\subset p_i L$ pour tout i, soit $x_i \in M \setminus p_i L$ et $\alpha_i \in \bigcap_{j\neq i} p_j \setminus p_i$ (qui existe puisque p_i est premier et $j \neq i \Longrightarrow p_j \not\subset p_i$). Alors $\Sigma\alpha_i x_i \in M$, donc $\Sigma\alpha_i x_i \in p_j L$ pour un j ; mais $i \neq j \Longrightarrow \alpha_i x_i \in p_j L$, et on en déduit que $\alpha_j x_j \in p_j L$, ce qui est contradictoire puisque $x_j \notin p_j L$ et $\alpha_j \notin p_j$. Donc $\exists i : M \subset p_i L$.

Remarque. Si L = A, M est un idéal de A.

1.6. Soit S la partie multiplicative formée des éléments réguliers de A. Si M est un A-module, il est immédiat de dire que M vérifie (P), c'est dire que $S^{-1}M$ vérifie, comme $S^{-1}A$-module, la propriété (P).

1.7. Soient $A_1,\ldots A_n$ des anneaux et M un $A_1 \times\ldots\times A_n$-module. Alors $M = M_1 \times\ldots\times M_n$ où M_i est un A_i-module, la multiplication externe étant donnée par

$$(a_1,\ldots a_n)(M_1,\ldots M_n) = (a_1M_1,\ldots,a_nM_n).$$

On voit tout de suite que "M vérifie (P)" est équivalent à "Il existe i tel que M_i vérifie (P), et si C est le cardinal d'un système libre maximal de

M_i, tous les systèmes libres maximaux d'un M_j ont un cardinal $\geqslant C''$.
En particulier, si tous les M_i vérifient (P), il en est de même de M.
Enfin, dire que tout $A_1 \times \ldots \times A_n$-module vérifie (P), c'est dire que pour tout i, tout A_i-module vérifie (P).

2. Exemples de modules vérifiant (P)

2.1. Soit M un A-module libre de dimension infinie. Alors M vérifie (P).
Soient B une base de M et S un système libre maximal de M. Tout $s \in S$ peut s'écrire $s = \sum_{b \in B_s} \lambda_s^b . b$ où B_s est une partie finie de B. On définit ainsi une application φ^s de S dans l'ensemble $\mathcal{P}_F(B)$ des parties finies de B telle que $\varphi(s) = B_s$.

- $\bigcup_{s \in S} \varphi(s) = B$. Sinon, soit b' n'appartenant pas à cette réunion ; alors Su{b'} est libre : si $\alpha b' + \sum_{s \in S'} \alpha_s . s = 0$, on en déduit

$$\alpha b' + \sum_{\substack{s \in S' \\ b \in \bigcup_{s \in S'} B_s}} \alpha_s \lambda_s^b . b = 0,$$

d'où $\alpha = 0$ puisque B est libre, et enfin $\alpha_s = 0 \quad \forall s \in S'$ puisque S est libre. Et S ne serait pas maximale.
B étant infini et les $\varphi(s)$ finis, un raisonnement élémentaire de théorie des ensembles montre alors que card B $\leqslant$ card $\varphi(S) \leqslant$ card S.

- card B $\geqslant$ card S. Supposons en effet card B < card S. Comme B est infini, on a card B = card $\mathcal{P}_F(B)$, d'où card $\mathcal{P}_F(B)$ < card S. Il existerait donc $B' \in \mathcal{P}_F(B)$ tel que $\varphi^{-1}(B')$ soit infini. Ceci signifie que tout $s \in \varphi^{-1}(B')$ s'écrit $\sum_{b \in B'} \lambda_s^b . b$ et en particulier le module libre de rang fini L(B') contiendrait le système libre infini $\varphi^{-1}(B')$, ce qui est impossible (1.2.)

En conclusion, card S = card B ne dépend pas de S.

Si A est un corps, tout A-module vérifie la propriété (P).

Voici un autre cas :

2.2. Soit A un anneau réduit tel que Min A soit fini. Alors tout A-module vérifie (P).

D'après (1.6), il suffit de le montrer pour l'anneau total des fractions de A. Soit $A' = S^{-1}A$ cet anneau. Comme A est réduit, $S = \complement \bigcup_{MinA} p$ et comme MinA est fini, le lemme d'évitement montre que

$$MaxA' = MinA' = \{p'_1,\ldots p'_n\} \text{ est fini.}$$

$A' \longrightarrow \prod_{i=1}^{n} A'/p'_i$ est donc un isomorphisme entre A' et un produit fini de corps ; et le résultat découle de 1.7.

2.3. Soit A un anneau intègre ou un anneau noethérien réduit, alors tout A-module vérifie (P).

Ceci résulte directement de (2.2).

Remarque 2.4. Min A est un sous-espace topologique séparé de SpecA.
Y. QUENTEL a construit ([5]) un anneau réduit, à spectre minimal compact, dans lequel il existe un idéal de type fini, fidèle, ne contenant aucun élément régulier. De plus ([5], prop. 8), on peut supposer cet anneau local, car le spectre minimal de $S^{-1}A$ est fermé dans le spectre minimal de A.

Soient A cet anneau et $I = (a_1,\ldots a_n)$ un idéal de type fini, fidèle, sans éléments libres. Soient $(e_1,\ldots e_n)$ la base canonique de A^n et $x = \Sigma\, a_i\, e_i$. x est un élément libre de A^n (1.3). Soit $(x,x_2,\ldots x_p)$ un système libre maximal de A^n. Montrons que $p < n$. Sinon (1.4 avec $p = n$) le déterminant du système $(x,x_2,\ldots x_n)$ serait non diviseur de 0. Or ce déterminant, dont la première colonne est $(a_1,\ldots a_n)$, est un élément de I, ce qui est par hypothèse contradictoire.
Il y a donc dans A^n un système libre maximal de cardinal $p < n$.

Remarque 2.5. Voici un exemple d'anneau dont le spectre est réduit à un point et d'un module possèdant un système libre maximal de un élément et un système libre infini.

Soit $A = k[X_n]_{n \in \mathbb{N}} / (\Sigma(X_n))^2$ (k = corps). A est une k-algèbre locale de base $(1, \overline{X}_o, \ldots \overline{X}_n, \ldots)$. Son radical est $m = (\overline{X}_o, \ldots \overline{X}_n, \ldots)$ et $m^2 = 0$.

Soit $\varphi : M \longrightarrow A^{(\mathbb{N})}$ définie par $\varphi(\Sigma\, a_i\, \overline{X}_i) = (a_o\overline{X}_o, \ldots, a_n\overline{X}_o, \ldots)$.

φ est A-linéaire et injective. Considérons la suite exacte

$$0 \longrightarrow m \xrightarrow{\Psi} A \times A^{(\mathbb{N})} \xrightarrow{\Pi} M \longrightarrow 0$$

où $\Psi(x) = (x, \varphi(x))$.

Il est clair que $\Pi|_{0 \times A^{(\mathbb{N})}}$ et $\Pi|_{A \times 0}$ sont injectives. Donc M possède un système libre infini, image par Π d'une base de $A^{(\mathbb{N})}$. Montrons que $\{\Pi(1,0)\}$, qui est libre, est maximal. Soit $\Pi(x,y) \in M$; on a $\overline{X}_o.y \in \mathrm{Im}\varphi$.

Soit $\overline{X}_o.y = \varphi(z)$, $z \in m$. D'où $\overline{X}_o.(x,y) = (z, \varphi(z)) + (\overline{X}_o.x - z)(1,0)$ et $\overline{X}_o.\Pi(x,y) = (\overline{X}_o.x - z)\,\Pi(1,0)$ avec $\overline{X}_o \neq 0$; $\{\Pi(1,0)\}$ est donc bien maximal.

3. Cas des anneaux noethériens

Dans tout ce numéro, A sera un anneau noethérien.

Rappelons d'abord [3] qu'on désigne par AssA l'ensemble des idéaux premiers de A qui sont aussi l'annulateur d'un élément de A. AssA est fini et contient les idéaux premiers minimaux de A. L'ensemble des diviseurs de 0 de A est la réunion des idéaux de AssA.

3.1. Soit I un idéal de A. $\mathrm{Ann}I \neq 0 \Longleftrightarrow \exists\, p \in \mathrm{Ass}A : I \subset p$.

Si $\mathrm{Ann}I \neq 0$, tout élément de I est diviseur de 0 ; donc $I \subset \bigcup_{p \in \mathrm{Ass}A} p$ et, d'après le lemme d'évitement, $I \subset p$ pour un p. Réciproquement, si $I \subset p$, où $p \in \mathrm{Ass}A$, on a $p = \mathrm{Ann}x$ pour un x nécessairement non nul ; on a $xI = 0$, d'où $\mathrm{Ann}I \neq 0$.

3.2. Soit $M \subset A^n$. On suppose que $\forall\, x \in M$, $\mathrm{Ann}\, x \neq 0$. Alors $\mathrm{Ann}\, M \neq 0$.

Si $x = (a_1, \ldots a_n) \in M$ il existe donc un $\lambda \neq 0$ tel que $\lambda a_i = 0 \quad \forall i$. Donc $\mathrm{Ann}\,(\Sigma(a_i)) \neq 0$ et, d'après (3.1), il existe $p \in \mathrm{Ass}A$ tel que $\Sigma(a_i)$ $\Sigma(a_i) \subset p$, d'où $x \in pA^n$. Ainsi $M \subset \cup p A^n$ et, d'après le lemme d'évitement, $M \subset pA^n$ pour un p. $p = \mathrm{Ann}\, x$ pour un x non nul qui appartient à $\mathrm{Ann}M$.

3.3. Soit $(x_1, \ldots x_p)$ un système libre de A^n. Si $p < n$, $\exists\, x : (x_1, \ldots x_p, x)$ soit libre.

Soit $\Delta^{i_1 < \ldots < i_p}$ les mineurs d'ordre p du système $(x_1, \ldots x_p)$.

Si $x = (a_1, \ldots a_n)$, les mineurs d'ordre $p+1 \leqslant n$ du système $(x_1, \ldots x_p, x)$ sont, au signe près,

$$\Delta_x^{i_1 \ldots i_{p+1}} = \sum_{k=1}^{p+1} (-1)^h a_{ik}\ \Delta^{i_1 < \ldots < \hat{i_k} < \ldots < i_{p+1}}$$

($\hat{i_k}$ signifiant qu'on ôte l'indice i_k) ; ils sont au nombre de $C_n^{p+1} = N$.

Soit $\varphi : A^n \longrightarrow A^N$ l'application A-linéaire telle que

$$\varphi(x) = (\Delta_x^{i_1 < \ldots < i_{p+1}})_{i_1 < \ldots < i_{p+1}} \quad \text{et} \quad M = \mathrm{Im}\,\varphi.$$

- $\mathrm{Ann}M = 0$. Sinon, soit $\lambda \in \mathrm{Ann}M$ et $\lambda \neq 0$. Pour toute suite $i_1 < \ldots < i_p$, soit i tel que $i \neq i_k \quad \forall k$. Alors

$$\lambda \varphi(e_i) = 0 \Longrightarrow \lambda\, \Delta^{i_1 < \ldots < i < \ldots < i_p} = \pm\lambda \Delta_{e_i}^{i_1 < \ldots < \hat{i} < \ldots < i_p} = \pm\lambda \Delta^{i_1 < \ldots < i_p} = 0$$

Mais alors $(x_1, \ldots x_p)$ ne serait pas libre (1.4).

- D'après (3.2), il existe donc $x \in A^n$ tel que $\mathrm{Ann}\ \varphi(x) = 0$, ce qui exprime que $(x_1, \ldots x_p, x)$ est libre.

3.4. Soit A un anneau noethérien et L un A-module libre. Alors toutes les familles libres maximales de L ont pour cardinal $\dim L$.

Le résultat est connu si $\dim L$ est infinie (2.1). Si $L \simeq A^n$, on a $\dim L = n$; soit $(x_1, \ldots x_p)$ un système libre maximal de L. $p \leqslant n$ (1.2) et $p < n$ est impossible (3.3), d'où $p = n$.

Remarque 3.5. Soit A un anneau noethérien dans lequel tout élément régulier est inversible (par exemple un anneau artinien, ou l'anneau total des fractions d'un anneau noethérien). Alors les bases de A^n sont les systèmes libres maximaux de A^n. En effet si $(x_1,\ldots x_p)$ est un système libre maximal de A^n, on a $p = n$ (3.4) et il existe d non diviseur de 0 tel que $dA^n \subset L(x_1,\ldots x_n)$ (1.5). Mais par hypothèse, d est inversible, donc $A^n = L(x_1,\ldots x_n)$.

3.6. Soit $M \subset A^n$. Alors M possède la propriété (P).

Quitte à se placer sur l'anneau total des fractions de A (1.6), on peut supposer que tout élément régulier de A est inversible.

Soient $(x_1,\ldots x_p)$ et $(y_1,\ldots y_q)$ deux systèmes libres maximaux de M. Il existe $x_{p+1},\ldots x_n$ et $y_{q+1},\ldots y_n$ tels que $(x_1,\ldots x_n)$ et $(y_1,\ldots y_n)$ soient des bases de A^n (3.5). Supposons enfin $p < q$. On a $y_i = \Sigma\, a_{ij}\, x_j$.

Posons

$$\alpha_i = \sum_{j\le p} a_{ij}\, x_j \qquad \beta_i = \sum_{j>p} a_{ij}\, x_j \ , \quad N = (\beta_1,\ldots \beta_q) \text{ et } x = \Sigma \lambda_i\, \beta_i \in N;$$

l'élément $x' = \sum_{i=1}^{q} \lambda_i\, \alpha_i + x = \sum_{i=1}^{q} \lambda_i\, y_i$ est dans M.

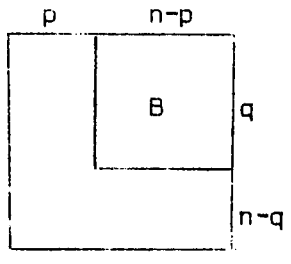
Donc il existe $\lambda \neq 0 : \lambda\, x' \in L(x_1,\ldots x_p)$.

D'où $\lambda\, x \in L(x_1,\ldots x_p) \cap N \subset L(x_1,\ldots x_p) \cap L(x_{p+1},\ldots x_n) = 0$. Donc $\lambda x = 0$.

D'après (3.2), il existe $\lambda \neq 0 : \lambda N = 0$.

Considérons la matrice $(y_1,\ldots y_n)$ par rapport à la base $(x_1,\ldots x_n)$.

C'est un tableau :



où B est la matrice de $(\beta_1,\ldots \beta_q)$ et tous les termes de B sont annulés par λ . Comme $n-q < n-p$, il est clair que $\lambda \det(X) = 0$.

Mais $(y_1,\ldots y_n)$ étant un système libre, detX est inversible, d'où $\lambda = 0$. Ce qui est contradictoire. Donc $q \leqslant p$. De même $p \leqslant q$ et $p = q$. c.q.f.d.

3.7. Soit M un A-module possèdant un système libre infini. Alors M vérifie (P).

Soit T un système libre infini de M et S un système libre maximal. Pour tout $t \in T$, $\exists \lambda_t \neq 0 : \lambda_t.t = \sum_{s \in S_t} a_p^s.s$ où $S_t \in \mathcal{P}_F(S)$. Ceci définit une application $\varphi : T \longrightarrow \mathcal{P}_F(S)$ telle que $\varphi(t) = S_t$. Supposons card T > card S. Alors, T étant infini, si S est fini ou si S est infini (et alors card $\mathcal{P}_F(S)$ = card S), on a card T > card $\mathcal{P}_F(S)$. Donc il existe $S' \in \mathcal{P}_F(S)$: $\varphi^{-1}(S')$ soit infini.

Comme A est noethérien et L(S') de type fini, $N = L(S') \cap L(\varphi^{-1}(S'))$ est de type fini. Soient $x_1,\ldots x_k$ des générateurs de N. Ce sont des éléments, en nombre fini, de $L(\varphi^{-1}(S'))$ donc $\exists T' \subset \varphi^{-1}(S')$, finie, telle que $x_i \in L(T')$ $\forall i$, ou $N \subset L(T')$. Soit alors $t \in \varphi^{-1}(S') \setminus T'$, il existe $\lambda \neq 0$ tel que $\lambda t \in L(S')$, donc $\lambda t \in N$. D'où $\lambda t \in L(T')$. Ce qui est contradictoire car le système $T' \cup \{t\}$ est libre.

En résumé, si T est un système libre infini de M et S un système libre maximal, on a card T $\leq$ card S. En particulier, tous les systèmes maximaux sont infinis et on voit qu'ils ont même cardinal.

3.8. Soit M un sous-module d'un module plat. Alors M vérifie (P).

Le résultat est connu (3.7) si M possède un système libre infini. Sinon, soient $(x_1,\ldots x_p)$ et $(y_1,\ldots y_q)$ deux systèmes libres maximaux de M, $N = (x_1,\ldots x_p, y_1,\ldots y_q)$. $(x_1,\ldots x_p)$ et $(y_1,\ldots y_q)$ sont encore des systèmes libres maximaux de N-N, de type fini sur A noethérien, est de présentation finie ; et comme $N \subset M$, N est sous-module d'un module plat E.
Donc [4] l'injection $N \xrightarrow{i} E$ se factorise en $N \xrightarrow{j} L \longrightarrow E$ où L est libre de type fini, et j injective. D'après (3.6), on a donc p = q.

4. Cas des anneaux artiniens

Comme un anneau artinien est produit d'anneaux locaux artiniens, nous supposerons (1.7) que A est un anneau local artinien.

4.1. Montrons d'abord comment on pourrait construire facilement un A-module ne vérifiant pas la propriété (P). Soient $a,b \in A$, non nuls, tels que Anna = Annb et (a) ∧ (b) = 0.

Soit K le sous module de $A \times A^2$ engendré par (a,o,a) et (b,a,o) et considérons la suite exacte

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow A \times A^2 \xrightarrow{\Pi} M \longrightarrow 0.$$

- $K \cap (A \times 0) = 0$ car si $\lambda(a,o,a) + \mu(b,a,o) = (\alpha,o,o)$, on a $\mu a = \lambda a = 0$. Comme Ann(a) = Ann(b), on en déduit $\mu b = 0$, d'où $\alpha = 0$.

- $K \cap (0 \times A^2) = 0$ car si $\lambda(a,o,a) + \mu(b,a,o) = (o,\beta,\gamma)$, on a $\lambda a + \mu b = 0$. Donc $\lambda a, \mu b \in (a) \cap (b) = 0$, donc $\lambda a = \mu b = 0$ et, comme plus haut $\mu a = 0$ d'où $\beta = \gamma = 0$.

Donc $\Pi|_{A \times 0}$ et $\Pi|_{0 \times A^2}$ sont injectives. En particulier, M possède un système libre de deux éléments. Montrons que $\{\Pi(1,0)\}$, qui est libre, est maximal. Si $\Pi(x,y,z) \in M$, on a $a(x,y,z) = z(a,o,a) + y(b,a,o) + (ax-za-yb)(1,0,0)$. D'où $a.\Pi(x,y,z) = (ax-za-yb)\,\Pi(1,0)$ et $a \neq 0$ par hypothèse.

Donc M possède aussi un système maximal de un élément et ne vérifie donc pas (P).

4.2. Soit A un anneau local artinien. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) Tout A-module vérifie (P)

(ii) (0) est ∩-irréductible dans A.

(i) $\Longrightarrow$ (ii) Sinon soient $I,J \subset A$, non nuls, tels que $I \cap J = 0$. I et J sont de longueurs finies et soient I_0, J_0 les premiers termes non nuls d'une suite de Jordan-Mölder de I et J. I_0 et J_0 sont nécessairement principaux ;

$$I_0 = (a) \quad J_0 = (b) \quad \text{et} \quad (a) \cap (b) = 0, a, b \neq 0.$$

Soit $m = \mathrm{Rad}A$. I_0 et J_0, de longueur 1, sont isomorphes à A/m.

Donc $ma = mb = 0$ et comme a,b sont non nuls, $\mathrm{Ann}(a) = \mathrm{Ann}(b) = m$. Mais alors (i) serait faux d'après (4.1).

(ii) $\Longrightarrow$ (i) Soit I un idéal de A minimal parmi les idéaux non nuls. Si $J \subset A$ et $J \neq 0$, on a $I \cap J \neq 0$ d'après (ii) et comme $I \cap J \subset I$, il y a égalité, ce qui montre que I est minimum. Il est principal, soit $I = (a)$.

Soit M un A-module. Si M possède un système libre infini, il vérifie (P) (3.7), sinon on se ramène, comme dans la démonstration de (3.8) au cas où M est de type fini. Soit S un système libre maximal de M, $L = L(S)$.

Par hypothèse, pour tout $x \in M$, il existe $\lambda \neq 0$ tel que $\lambda x \in L$. Mais $(\lambda) \supset (a)$, d'où $ax \in L$, ainsi $aM \subset L$. On observe alors que dans A, $\mathrm{Ann}\, m = (a)$ (car $(a) \simeq A/m$ et si $mx = 0$, $x \neq 0$, on a $(x) \simeq A/m$ et $(x) \supset (a)$).

On a donc $m.(aM) = 0$; mais, en regardant les coordonnées, dans L, des éléments de aM, on voit que ceci implique $aM \subset aL$, donc en fait $aM = aL$ qui est un A/m-module. Comme L est libre sur A, on a :

$$\dim_A L = \dim_{A/m} aL = \dim_{A/m} aM \text{ qui ne dépend pas de S.}$$

Exemple 4.3. Soit $A = k[X,Y]/(X,Y)^2$, $a = \overline{X}$, $b = \overline{Y}$ alors on construit comme en (4.1) un A-module ne vérifiant pas (P).

BIBLIOGRAPHIE

[1] BOURBAKI Algèbre, chapitre II, § 7 n° 2.

[2] BOURBAKI Algèbre, chapitre III, § 7 et 8.

[3] BOURBAKI Algèbre commutative, chapitre IV, § 1.

[4] LAZARD D. Autour de la platitude. Thèse Bull. Sc. Math t. 97, 1969, p. 81 à 128.

[5] QUENTEL Y. Sur la compacité du spectre minimal. Pub. Fac Sc. Brest. Sur le spectre d'un anneau et la localisation : Bourbaki Alg. Comm., chapitre II.