PUBLICATIONS MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUES DE RENNES

RAYMOND PAVEC

Un théorème d'existence et d'unicité pour l'équation : $\begin{cases} u' + Au = f \\ \sum_0^p \alpha_k u(t_k) = \xi \end{cases}$

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1969-1970, fascicule 1
« Séminaires d'analyse fonctionnelle », , exp. n° 4, p. 1-6
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1969-1970___1_A4_0>

© Département de mathématiques et informatique, université de Rennes, 1969-1970, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications mathématiques et informatiques de Rennes » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Un théorème d'existence et d'unicité pour l'équation :

$$\begin{cases} u' + A\,u = f \\ \sum_{o}^{p} \alpha_k\, u(t_k) = \xi \end{cases}$$

par

Raymond PAVEC

Soient V et H deux espaces de Hilbert. On suppose que V est contenu dans H, est dense dans H et que :

(1°) l'injection de V dans H est compacte.

En identifiant H à son antidual on a alors :

$$V \subset H \subset V' .$$

Soit a une forme hermitienne continue coercive sur V :

- $\forall u \in V , \forall v \in V : |a(u,v)| \leq M \, ||u||_V \, |'v||_V$
- $\forall u \in V : |a(u, u)| \geq \alpha \, ||u||^2_V .$

Il existe alors un isomorphisme A de V sur V' tel que

- $\forall u \in V, \forall v \in V : a(u, v) = < A\,u , v >_{V' \times V}$

Soit T > o. On désigne aussi par A l'isomorphisme de $L^2(0, T, V)$ dans $L^2(0, T, V')$ défini par :

$$u \in L^2(0, T, V) \longrightarrow (A(u(t)) \in L^2(0, T, V').$$

Soit $(f, \xi) \in L^2(0, T, V') \times H$. On considère le problème : Déterminer u tel que :

$$(I)\begin{cases} u \in L^2(0, T, V) \\ u'(t) + A\,u(t) = f(t) \quad , \quad \text{ppt} \in [o, T] \\ \sum_{k=o}^{p} \alpha_k \, u(t_k) = \xi \end{cases}$$

où $\alpha_k \in \mathbb{R}$, $t_o = o < t_1 < \ldots\ldots < t_p \leq T$. On suppose :

$$(2) \quad \begin{cases} \alpha_o \neq o \\ \forall \lambda \geq \alpha : \sum_{k=o}^{p} \alpha_k e^{-\lambda t_k} \neq o. \end{cases}$$

Théorème 1. Si l'hypothèse (2) est vérifiée, le problème (I) admet une solution u et une seule, et l'application

$$(f , \xi) \longrightarrow u$$

est un isomorphisme de

$$L^2(0, T, V') \times H \longrightarrow W(0, T, V) = \left\{ u \mid u \in L^2(0, T, V), u' \in L^2(0, T, V') \right\} .$$

Soit $D(A) = \left\{ u \in V \mid A u \in H \right\}$, muni de la norme du graphe

$$||u||^2_{D(A)} = |u|^2 + |A u|^2 \qquad (|u| = |u|_H)$$

L'opérateur (A, D(A)) est un opérateur non borné auto-adjoint dans H et son inverse est compact d'après l'hypothèse (1). Le spectre de A est constitué d'une suite $(\lambda_i)_{i \in \mathbb{N}}$ vérifiant : $\alpha \leq \lambda_i \leq \lambda_{i+1}$, $\lim_{i \to \infty} \lambda_i = + \infty$ et on peut trouver une base orthonormée de H constituée de vecteurs propres $(W_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de A. Si $u \in V'$ on a alors :

$$u = \sum_{i=o}^{\infty} u_i W_i \quad , \text{ avec } \quad u_i = \langle u, W_i \rangle_{V' \times V}.$$

et l'application $u \longrightarrow (u_i)$ est un isomorphisme entre les espaces suivants :

$$D(A) \longrightarrow D(A_o) = \left\{ (u_i) \in \ell^2 \mid (\lambda_i u_i) \in \ell^2 \right\}$$

$$V \longrightarrow V_o = \left\{ (u_i) \in \ell^2 \mid (\sqrt{\lambda_i}\, u_i) \in \ell^2 \right\}$$

$$H \longrightarrow H_o = \ell^2$$

$$V' \longrightarrow V'_o = \left\{ (u_i) \in \ell^2 \mid \left(\frac{u_i}{\sqrt{\lambda_i}}\right) \in \ell^2 \right\}.$$

L'opérateur A devient l'opérateur A_o de V_o dans V'_o :

$$(u_i) \in V_o \longrightarrow (\lambda_i u_i) \in V'_o.$$

De même si $u \in L^2(0, T, V')$ en posant

$$u_i(t) = \langle u(t) , W_i \rangle_{V' \times V}$$

on obtient un isomorphisme entre les espaces :

$$L^2(0, T, D(A)) \longrightarrow L^2(0, T, D(A_0))$$
$$L^2(0, T, V) \longrightarrow L^2(0, T, V_0)$$
$$L^2(0, T, H) \longrightarrow L^2(0, T, \ell^2)$$
$$L^2(0, T, V') \longrightarrow L^2(0, T, V'_0).$$

En utilisant ces isomorphismes on montre l'équivalence du problème (I) et du problème (II) suivant :

Trouver $(u_i(t))$ vérifiant :

$$\text{(II)} \quad \begin{cases} (u_i(t)) \in L^2(0, T, V_0) \\ u'_i(t) + \lambda_i u_i(t) = f_i(t) \quad , \quad \text{ppt} \in [0,T], \ i \in \mathbb{N}. \\ \sum_{k=0}^{p} \alpha_k \ u_i(t_k) = \xi_i \quad , \quad i \in \mathbb{N} . \end{cases}$$

où $f(t) = \sum_{0}^{\infty} f_i(t) W_i$, $\xi = \sum_{i=0}^{\infty} \xi_i W_i$.

La résolution du système (II) donne :

$$u_i(t) = e^{-\lambda_i t} \left(c_i + \int_0^t e^{\lambda_i u} f_i(u) \, du\right)$$

$$\text{(3)} \quad \sum_{k=0}^{p} \alpha_k \, e^{-\lambda_i t_k} \left(c_i + \int_0^{t_k} e^{\lambda_i u} f_i(u) \, du\right) = \xi_i$$

et la dernière équation donne c_i, compte tenu de (2). Il reste donc à montrer que $(u_i(t)) \in L^2(0, T, V_0)$.

Soit v la solution du problème :

$$\text{(III)} \quad \begin{cases} v \in L^2(0, T, V) \\ v'(t) + A \, v(t) = f(t) \\ v(0) = 0 \end{cases}$$

En résolvant ce système de la même manière que (I) on trouve :

$$v(t) = \sum_{i=o}^{\infty} v_i(t)\, W_i \ , \text{ avec } v_i(t) = e^{-\lambda_i t} \int_o^t e^{\lambda_i u} f_i(u)\, du$$

et on sait que :

$$||v||^2_{W(0,\ T,\ V)} \leq C\ ||f||_{L^2(0,\ T,\ V')}$$

$$v(t_k) \in H \ , \quad \text{soit } (v_i(t_k)) \in \ell^2.$$

On a donc :

$$u_i(t) = c_i\, e^{-\lambda_i t} + v_i(t)$$

$$c_i = \frac{\xi_i - \sum_{k=o}^{p} \alpha_k\, v_i(t_k)}{\sum_{k=o}^{p} \alpha_k\, e^{-\lambda_i t_k}} = \frac{\xi'_i}{\sum_{k=o}^{p} \alpha_k\, e^{-\lambda_i t_k}}$$

avec $(\xi'_i) = (\xi_i - \sum_{k=o}^{p} \alpha_k\, v(t_k) \in \ell^2$.

On en déduit $(c_i) \in \ell^2$ car le dénominateur est non nul pour tout λ_i et tend vers α_o quand i tend vers l'infini : il est donc minoré par une constante. On a donc :

$$\int_o^T |c_i\, e^{-\lambda_i t}|^2\, dt \leq |c_i|^2 \int_o^T e^{-2\lambda_i t}\, dt$$

$$\leq \frac{|c_i|^2}{2\lambda_i} \left[1 - e^{-2\lambda_i T}\right]$$

$$\leq \frac{|c_i|^2}{2\lambda_i}$$

Ce qui donne :

$$\sum_{i=o}^{\infty} \lambda_i \int_o^T |c_i\, e^{-\lambda_i t}|^2\, dt \leq \sum_{i\neq o}^{\infty} \frac{|c_i|^2}{2} \leq C\left(|\xi|^2_H + ||f||^2_{L^2(0,\ T,\ V')}\right)$$

On a donc :

$$(u_i(t)) \in L^2(0,\ T,\ V_o)$$

$$||(u_i(t))||^2_{L^2(0,\ T,\ V_o)} \leq C(|\xi|^2_H + ||f||^2_{L^2(0,\ T,\ V')}).$$

Le problème (I) admet donc une solution et une seule donnée par :

$$u = \sum_{i=o}^{\infty} u_i(t)\ W_i$$

$$u' = f - A\,u \in L^2(0,\ T,\ V')$$

et $||u||^2_{W(0,\ T,\ V)} \leq \ .||f||^2_{L^2(0,\ T,\ V')} + ||Au||^2_{L^2(0,\ T,\ V')} + ||u||^2_{L^2(0,\ T,\ V)}$

$$\leq C\ (|\xi|^2_H + ||f||^2_{L^2(0,\ T,\ V')}).$$

L'application

$$(f,\ \xi) \in L^2(0,\ T,\ V') \times H \longrightarrow u \in W(0,\ T,\ V)$$

est donc continue et injective. Elle est surjective car si $u \in W(0,\ T,\ V)$:

$$\begin{cases} u' + A\,u \in L^2(0,\ T,\ V') \\ \sum_{o}^{p} \alpha_k\ u(t_k) \in H \end{cases}$$

C'est donc un isomorphisme.

<u>Théorème 2.</u> Si $(f,\ \xi) \in L^2(0,\ T, H) \times V$ alors la solution du problème (I) appartient à l'espace :

$$\left\{ u \in L^2(0,\ T,\ D(A)) \ ,\ u' \in L^2(0,\ T,\ H) \right\}$$

et l'application $(f,\ \xi) \longrightarrow u$ est un isomorphisme entre ces espaces.

Plus généralement cette application est un isomorphisme de :

$$L^2(0,\ T,\ D(A^s)) \times D(A^{s+\frac{1}{2}}) \longrightarrow \left\{ u \in L^2(0,\ T,\ D(A^{s+1}),\ u' \in L^2(0,T,D(A^s)) \right\}$$

La démonstration du théorème 1 donne :

$$u_i(t) = c_i\ e^{-\lambda_i t} + v_i(t)$$

et on utilise le fait que si $f \in L^2(0,\ T,\ D(A^s))$

alors $(\lambda_i^{s+\frac{1}{2}} f_i(t) \in L^2(0, T, V_o')$

Remarques : 1) L'hypothèse (2) peut être remplacée par :

$$(4) \quad \begin{cases} \alpha_o \neq o \\ \sum_{k=o}^{p} \alpha_k e^{-\lambda t_k} \neq o \quad \text{pour toute valeur propre de } A. \end{cases}$$

2) On suppose $\alpha_o \neq o$. Soit $a(\lambda) = \sum_{k=o}^{p} \alpha_k e^{-\lambda t_k}$.

Quand $\lambda \longrightarrow + \infty$ $a(\lambda)$ tend vers α_o, et donc $a(\lambda)$ est non nul pour λ assez grand. Soit $I \subset \mathbb{N}$ l'ensemble fini des indices i tels que :

$$a(\lambda_i) = o .$$

Pour $i \notin I$ les équations (3) donnent c_i de manière unique, et pour $i \in I$ on obtient :

$$(4) \quad \sum_{k=o}^{p} \alpha_k e^{-\lambda_i t_k} \int_o^{t_k} e^{\lambda_i u} f_i(u) = \xi_i \quad , \quad i \in I.$$

Si ces équations sont vérifiées il y a une infinité de solutions, les c_i étant arbitraires pour $i \in I$. Si l'une au moins des relations (4) n'est pas vérifiée il n'y a pas de solution.